This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

LSoc 1726.9

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters
shall be spent for books and one quarter
be added to the principal.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

MIT 15 FIGUREN IM TEXT UND 2 TAFELN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.

1084-5/4

L Soc 1726.9

Lowell fund

INHALT.

Seite

O. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass . . . 1
Martin Krause, Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunctionen . . . 65
Wilhelm His, Antrag an die internationale Association der Akademien auf Bestellung einer Fach-Commission für menschliche und thierische Entwickelungsgeschichte . . . 77
Hermann Credner, Das sächsische Schüttergebiet des Sudetischen Erdbebens vom 10. Januar 1901. (Mit 1 Figur u. 1 Tafel) . . . 83
Martin Krause, Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunctionen . . . 105
Willibald Reichardt, Ueber Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mittels hyperelliptischer Funktionen integrirbar sind . . . 124
Paul Stäckel, Ueber das Dirichlet'sche Integral . . . 147
Felix Hausdorff, Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . 152
Gerh. Kowalewski, Ueber Systeme von Pfaff'schen Gleichungen . . . 179
H. Liebmann, Ueber die Verbiegung von Rotationsflächen. (Mit 3 Figuren) . . . 215
Ad. Mayer, Zur Theorie der gleitenden Reibung . . . 235
C. Neumann, Ueber eine neue Methode zum Beweise der sogenannten Schliessungstheoreme . . . 319
Gerhard Kowalewski, Ueber Fusspunktcurven von Ovalen mit Mittelpunkt. (Mit 1 Figur) . . . 333
E. Study, Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie . . . 338
Friedrich Engel, Zur Flächentheorie. Erste Mittheilung . . . 404
Wilh. His, Ueber wissenschaftliche Centralanstalten und speciell über Centralanstalten zur Förderung der Gehirnkenntniss . . . 413
Erich Marx, Ueber ein Hochfrequenz-Messgeräth zur Bestimmung von Periode, Capacität und Selbstinduction eines Entladungskreises. (Mit 2 Figuren) . . . 437
Arthur v. Oettingen, Eine Forderung der malerischen Perspective vom mathematischen Standpuncte aus betrachtet. (Mit 6 Fig.) . . . 443
F. Hausdorff, Ueber eine gewisse Art geordneter Mengen . . . 460
H. Liebmann, Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln. (Mit 1 Tafel.) . . . 477
K. Rohn, Einige Beiträge zum Problem der Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades. (Mit 2 Fig.) . . . 492
Martin Krause, Nekrolog auf Oscar Schlömilch . . . 507

OCT 26 1901

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

I.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1901.

Einzelpreis 1 Mark 50 Pfg.

SITZUNG VOM 7. JANUAR 1901.

Vorträge hielten:

Herr O. Hölder, o. M.: Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass.

Herr H. Bruns, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn Dr. Grossmann in Leipzig: Beobachtungen am Repsold'schen Meridiankreise; für die Abhandlungen, Bd. XXVI, No. VI.

Herr E. Hering, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn Dr. Garten in Leipzig: Rhythmische elektrische Vorgänge im quergestreiften Skelettmuskel; für die Abhandlungen, Bd. XXVI, No. V.

Herr M. Krause, o. M.: Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunktionen.

O. Hölder: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass.*

Man hat schon in einem doppelten Sinne von Axiomen der Arithmetik gesprochen. Einmal werden vielfach die Thatsachen Axiome der Arithmetik genannt, mit denen sich die folgenden Entwicklungen beschäftigen, und die ich lieber als Axiome der Quantität oder als Axiome der Grössenlehre bezeichnet haben möchte; andererseits ist auch gesagt worden, dass die Arithmetik im engeren Sinn, d. h. die Arithmetik der ganzen Zahlen, auf unbeweisbaren Thatsachen, d. h. auf Axiomen, beruhe. So hat v. Helmholtz die Formel

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

auf die H. Grassmann die Lehre von der Addition der ganzen Zahlen gegründet hat, als Axiom der Arithmetik bezeichnet.[1])

1) Vergl. H. Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik, 1861, S. 4, No. 15; v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, 3. Bd. 1885, S. 363 (aus „Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet,“ 1887, S. 11 bis 52). Im Uebrigen fasst v. Helmholtz a. a. O. das Verhältnis von Arithmetik und Grössenlehre genau so auf, wie es in der vorliegenden Arbeit durchgeführt worden ist (Vergl. auch F. Klein, Mathematische Annalen, 37. Bd., S. 572).

Diese Formel ist aber nur eine Beschreibung des Additionsverfahrens. Sie besagt, dass die Zahl, welche wir als Summe von a und von der auf b folgenden Zahl $b+1$ anzusehen haben, in der Zahlenreihe auf die Zahl $a+b$ folgt. Die Formel bestimmt also, dass $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $\cdots$ $a+c$ aufeinanderfolgende Zahlen sein sollen, sie bestimmt also, dass wir die Zahl $a+c$ dadurch finden, dass wir, mit der auf a folgenden Zahl $a+1$ beginnend, so lange aufeinanderfolgende Zahlen aneinanderreihen, bis wir gleichzeitig von 1 auf c gezählt haben. Deshalb ist es besser, die angeführte Formel als die Definition eines in unserer Gewalt befindlichen Begriffs und nicht als Axiom anzusehen.

Als eine evidente und nicht beweisbare Voraussetzung könnte man es freilich ansehen, dass dieses Additionsverfahren immer ausgeführt werden kann. Man kann noch mehr derartige Voraussetzungen in der Arithmetik finden, die darin beruhen, dass wir es als evident zulassen, dass gewisse Verfahren, die, wie wir sagen, nach bestimmten Regeln verlaufen, stets in bestimmter Weise ausführbar sind und in gewissen Fällen auch ohne Ende fortgesetzt werden können. Auch dass ein Verfahren zu einem Ende führt, kann unter Umständen evident sein, während es unter anderen Umständen natürlich bewiesen werden muss. Jede solche Voraussetzung, die als evident zugelassen wird, steht in einem engen Zusammenhang mit der Regel, nach der das betreffende Verfahren verläuft, d. h. mit dem Begriff des Verfahrens, und es scheint mir, dass wir diese Voraussetzungen nicht so aus unserem Denken herauslösen können, dass wir aus einer bestimmten Anzahl von ihnen, ohne neue, ähnliche Voraussetzungen zu machen, die ganze niedere und höhere Arithmetik herleiten könnten. Es handelt sich hier um eine Art von Erfahrung, welche aber nicht zur eigentlichen Erfahrung unserer Sinne gerechnet wird, da wir sie auch in Gedanken machen können, und es ist dies im Grund die gleiche — combinatorische — Art von Erfahrung, die wir für die äussere, sinnliche, bisweilen setzen, nämlich dann, wenn wir sagen, dass wir deductiv beweisen. Es erscheint deshalb zweckmässig, alle derartigen Gedankenbildungen als „rein logische" zu bezeichnen, und wir können, wenn wir dies thun, sagen, dass die Arithmetik der ganzen Zahlen rein logisch[1]) aufgebaut werden könne und

1) Ich betrachte es als unzweifelhaft, dass die Gesammtheit der Entwicklungen, die im Sinn des Textes „rein logisch" sind, sich nicht

keine Axiome voraussetze. Dasselbe gilt dann auch von der Arithmetik der gebrochenen Zahlen und der irrationalen Zahlgrössen, wenn diese entsprechend definirt werden.

Anders liegen die Verhältnisse in der Geometrie und in der Mechanik, wo gewisse Axiome vorausgesetzt werden müssen, die aus der Erfahrung der Sinne (oder, wie Andere wollen, aus der Anschauung) stammen. In ähnlicher Weise wie die Geometrie und die Mechanik kann man auch die allgemeine Lehre von den messbaren Grössen auf eine gewisse Zahl von Thatsachen gründen, die ich als Grössenaxiome oder als Axiome der Quantität bezeichnen möchte. Die Lehre von den messbaren Grössen gilt in derselben Weise für die Vergleichung und die Addition von Zeiten, Massen, Strecken, Inhalten u. s. w. Um jedoch gleich einem Missverständniss vorzubeugen, bemerke ich, dass die Axiome der Grössenlehre nicht in der Form, in der sie hier auftreten werden, in der Geometrie vorausgesetzt und auf Strecken und Inhalte angewendet werden sollen. Es bieten sich im Gegentheil, z. B. für Punkte und Strecken einer Geraden, rein geometrische Axiome dar, aus denen dann bewiesen werden kann (vergl. den zweiten Theil), dass für die Strecken die Thatsachen erfüllt sind, die in der allgemeinen Lehre der messbaren Grössen als Axiome vorausgesetzt werden.[1])

Die Lehre von den messbaren Grössen ist bereits von Euklid auf eine hohe Stufe gebracht worden. Sie hat neuerdings von verschiedenen Seiten eingehende Behandlung erfahren. Trotz-

---

auf die in der Philosophie hergebrachten logischen Formalismen und nicht auf einen fertigen Symbolkalkül zurückführen lässt.

1) Während bei den Strecken vorausgesetzt werden muss, dass man zwei Strecken vergleichen kann und dass man sie dabei nothwendig entweder gleich oder ungleich findet, kann man auf Grund von Axiomen, in denen das Wort „Inhalt" gar nicht vorkommt, und auf Grund einer gewissen Definition beweisen, dass zwei Figuren dem Inhalt nach verglichen werden können (Schur, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft 1892; Killing, Grundlagen der Geometrie, Bd. 2, 1898, Abschn. 5, § 5; Hilbert, Grundlagen der Geometrie 1899, S. 48). Dies beruht darauf, dass die Gleichheit der Strecken als „ursprünglicher", die Inhaltsgleichheit der Figuren als „construirbarer" Begriff der Geometrie angesehen wird (vergl. meine Schrift: Anschauung und Denken in der Geometrie 1900, S. 2 und Zindler, Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe der K. Akad. d. Wiss. zu Wien 118. Bd. 1889: Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntniss S. 32; Zindler nennt die ursprünglichen Begriffe „axiomatisch").

dem scheint mir diese Lehre noch nicht erschöpfend abgehandelt zu sein; auch haben sich in einige der neueren Bearbeitungen Irrthümer und Unklarheiten eingeschlichen, weshalb ich glaube, dass eine erneute Entwicklung dieser so wichtigen und elementaren Theorie von Nutzen ist.

Erster Theil.

Grössen und Masszahlen.

§ 1. Die Axiome.

Die Axiome der Quantität, d. h. die in der Lehre von den messbaren (absoluten) Grössen vorauszusetzenden Thatsachen sind die folgenden[1]):

---

1) Aus Zweckmässigkeitsgründen ist die Annahme gemacht worden, dass keine gleichen Grössen existiren, die unterscheidbar, also nicht-identisch sind. Dadurch fallen die Axiome weg, dass zwei Grössen gleich sind, wenn sie einer dritten gleich sind, und dass Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches giebt. Diese Thatsachen müssen natürlich bei den Anwendungen zu ihrem Recht gelangen (vergl. Axiom (ζ) in § 18).

Ich habe hier nur im Sinn, ein einfaches System von Axiomen zu geben, aus dem sich die Eigenschaften des gewöhnlichen Grössencontinuums ableiten lassen; ich beabsichtige nicht, besondere Arten von Grössen aufzustellen, wie es Bettazzi gethan (Teoria delle grandezze 1890), oder den landläufigen Begriff des Continuums zu erweitern, was Veronese mit seinem „Continuo assoluto" versucht hat (Atti della R. Acc. dei Lincei, ser. 4, menorie d. cl. d. sc. f. vol. 6, 1889, p. 613; vergl. auch Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unita rettilinee esposti in forma elementare, 1891, deutsch von Schepp 1894).

Es lässt sich noch Einiges über die Unabhängigkeit der aufgegestellten Axiome sagen. Ich will dabei aber die Axiome I, III, VI, von vornherein annehmen. Dann kann gezeigt werden, dass die Axiome II, IV, V, VII von einander und von den bereits angenommenen Axiomen in gewissem Sinne unabhängig sind. Es giebt nämlich ein System von Dingen, für welche das Axiom II nicht gilt, während I, III, IV, V, VI, VII erfüllt sind, nämlich die Gesammtheit der positiven ganzen Zahlen. Es giebt auch ein System von Dingen, für welche das Axiom VII nicht besteht, während alle anderen Axiome erfüllt sind, nämlich die Gesammtheit der positiven rationalen Zahlen. Eine Mannigfaltigkeit, für die alle Axiome gelten ausser IV, ist durch die sämmtlichen reellen, positiven und negativen (rationalen und irrationalen) Zahlen (Zahlgrössen) zusammen mit der Null vorgestellt, wenn man die Begriffe „grösser" und „kleiner" im algebraischen Sinne nimmt. Um nun noch eine Mannigfaltigkeit zu erhalten, welche allein das Axiom V nicht erfüllt, betrachte man alle Zahlenpaare (x, y), wo x alle positiven

I. Wenn zwei Grössen a und b gegeben sind, so ist entweder a mit b identisch ($a = b$, $b = a$), oder es ist a grösser als

---

von Null verschiedenen Zahlen, und y alle Zahlen von a bis b mit Einschluss dieser Zahlen a und b selbst, die positiv und von Null verschieden sein mögen, annehmen kann. Es sei dabei $(x, y) > (x', y')$, wenn entweder $x > x'$, oder wenn $x = x'$, und $y > y'$ ist. Die Summe $(x, y) + (x'', y'')$ sei durch die Formel $(x + x'', \bar{y})$ definirt, wo y die grössere von den Zahlen y und y'' bedeutet.

Die hier gewählten Axiome I bis VI stimmen mit Princ. I bis III von Veronese (vergl. Atti d. Acc. d. Linc. a. a. O. p. 604 u. 610) überein. Axiom VII ist im Grund das Dedekind'sche Stetigkeitsaxiom (vergl. Axiom ($\varkappa$) in § 18 u. d. Anm. auf S. 40), welches unser Grössensystem zu einem Continuum macht, wenn die Axiome I bis VI von vornherein als erfüllt gedacht werden.

Natürlich können verschiedene gleichwerthige Axiomsysteme angenommen werden. So kann man z. B. die Begriffe „grösser" und „kleiner" vorläufig aus dem Spiel lassen, wobei wieder, wie im Text, nichtidentische Grössen als verschieden angesehen werden sollen, und ausserdem nur vorausgesetzt wird:

[1] Zwei Grössen a und b haben in bestimmter Ordnung eine eindeutig bestimmte Summe $a + b$.

[2] $a + b$ ist von a und von b verschieden.

[3] $(a + b) + c = a + (b + c)$.

[4] Wenn a von b verschieden ist, so giebt es entweder x so, dass $a + x = b$, oder x' so, dass $b + x' = a$.

Es zeigt sich sofort, dass von den beiden in [4] genannten Grössen x und x' in einem gegebenen Fall nur die eine existiren kann, denn es wäre sonst $(a + x) + x' = a$, d. h. $a + (x + x') = a$, was mit [2] im Widerspruch steht. Man kann jetzt festsetzen, dass a dann kleiner als b genannt wird, wenn $a + x = b$ ist, und es ist nun offenbar das Axiom I erfüllt. Die Begriffe „kleiner" und „grösser" erscheinen bei dieser Auffassung als construirte Begriffe, während sie im Text als ursprüngliche, d. h. als axiomatische Begriffe behandelt sind.

Von den im Text aufgestellten Axiomen wären nun noch nicht alle erfüllt; so wäre es z. B. von IV und von V zunächst nur der erste Theil. Fordern wir nun noch folgendes:

[5] Zu zwei Grössen a und x giebt es stets eine dritte y so, dass $y + a = a + x$ ist,

so erkennt man sofort, dass auch der zweite Theil von V erfüllt ist. Es lässt sich ausserdem jetzt auch der zweite Theil von IV beweisen, der besagt, dass $b < a + b$ ist. Man bedenke zunächst, dass nach [2] jedenfalls $a + b$ von b verschieden ist; es muss also entweder $b < a + b$, oder $a + b < b$ sein. Wäre aber letzteres der Fall, so hätte man $(a + b) + x = b$, also nach [5] $y + (a + b) = b$, oder $(y + a) + b = b$, was mit [2] unvereinbar ist. Es ist also nun IV erfüllt, und es müssten nur noch zwei Axiome, die II und VII analog sind, in geeigneter Formulirung hinzugefügt werden.

b, und b kleiner als a ($a > b$, $b < a$), oder umgekehrt b grösser als a, und a kleiner als b; diese drei Fälle schliessen sich aus.

Man könnte das Axiomsystem auch in anderer Weise abzuändern suchen, z. B. so, dass die Axiome I bis IV, ferner VI und VII beibehalten werden, während das Axiom V durch Aussagen ersetzt wird, welche nichts über Gleichheit enthalten, sondern sich nur auf die Begriffe „grösser" und „kleiner" beziehen. Man wird dabei noch die Thatsachen, welche in § 2, Nr. 1, 2, 3 gefolgert werden, von Anfang an fordern. Die sämmtlichen Grössen können nun, wenn $a < b$ ist, in zwei Classen so eingetheilt werden, dass in die erste diejenigen kommen, die zu a addirt eine Summe $< b$ ergeben, und in die zweite Classe diejenigen, die eine Summe $\geqq b$ ergeben. Es zeigt sich, dass in Folge der jetzt angenommenen Forderungen jede Grösse der ersten Classe kleiner sein muss als jede der zweiten; es lässt sich aber noch nicht erkennen, dass wirklich Grössen der ersten Classe vorhanden sein müssen, weshalb wir noch folgendes Postulat aufstellen:

[6] Wenn $a < b$ ist, so giebt es c so, dass auch $a + c$ noch kleiner als b ist.

Nun folgt aus Axiom VII, dass eine Grösse ξ so existirt, dass für $\xi' < \xi$ die Summe $a + \xi' < b$, und für $\xi'' > \xi$ die Summe $a + \xi''$ $\geqq b$ ist. Wir können sogar gleich sagen, dass in dem letzten Fall $a + \xi'' > b$ sein muss; denn wenn $a + \xi'' = b$ wäre, so könnten wir (nach Nr. 3 in § 2) ein ξ''' zwischen ξ und ξ'' finden, und es würde dann aus der letzten Gleichung folgen $a + \xi''' < b$, was, da $\xi''' > \xi$ wäre, den Eigenschaften der Grösse ξ entgegen ist.

Wir dürfen aber nun doch nicht versäumen, zu beweisen, dass wirklich $a + \xi = b$ ist (bei Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., 1. Bd. 1898, S. 8 und 9, ist dies vergessen worden). Wäre $a + \xi < b$, so würde nach [6] ein η so existiren, dass $(a + \xi) + \eta < b$, d. h. also $a + (\xi + \eta) < b$, und das widerspricht den Eigenschaften der Grösse ξ. Nun kann man aber zunächst noch nicht erkennen, dass nicht $a + \xi$ $> b$ sein kann. Ich führe deshalb noch das Axiom ein:

[7] Wenn a und b irgend zwei Grössen sind, so giebt es ein $a' < a$ und zugleich so, dass $a' + b > a$ ist.

Wäre nun $a + \xi > b$, so würde es nach [6] ein η so geben, dass $a + \xi > b + \eta$. Da es ferner nach [7] ein $\xi' < \xi$ geben müsste, so dass $\xi' + \eta > \xi$ wäre, so hätte man dann $a + (\xi' + \eta) > a + \xi$ $> b + \eta$, d. h. also $(a + \xi') + \eta > b + \eta$, woraus (eigentlich auf indirektem Weg) folgt, dass $a + \xi' > b$. Dies ist, da $\xi' < \xi$ angenommen war, wiederum mit den Eigenschaften der Grösse ξ nicht vereinbar.

Damit ist der erste Theil von V bewiesen; um den zweiten Theil zu beweisen, müssten wir noch mehr Axiome einführen.

Hilbert hat neuerdings die Frage nach der Widerspruchslosigkeit der Grössenaxiome aufgeworfen (Mathematische Probleme, Gött. Nachr. 1900). Die gewöhnliche Ansicht ist bisher die gewesen,

II. Zu jeder Grösse giebt es eine kleinere.

III. Zwei Grössen a und b, die auch identisch sein können, ergeben in einer bestimmten Reihenfolge eine eindeutig bestimmte Summe $a + b$.

IV. $a + b$ ist grösser als a und grösser als b.

V. Ist $a < b$, so giebt es ein x so, dass $a + x = b$, und ein y so, dass $y + a = b$.

VI. Es ist stets $(a + b) + c = a + (b + c)$.

VII. Wenn alle Grössen in zwei Classen so eingetheilt sind, dass jede Grösse einer und nur einer Classe zugewiesen ist, dass jede Classe Grössen enthält, und jede Grösse der ersten Classe kleiner ist als jede Grösse der zweiten, so existirt eine Grösse ξ derart, dass jedes $\xi' < \xi$ zur ersten, und jedes $\xi'' > \xi$ zur zweiten Classe gehört. ξ selbst kann, je nach dem gegebenen Fall, zur einen oder zur andern Classe gehören.[1])

§ 2. Einfachste Folgerungen aus den Axiomen I bis VI.

1. Ist $a < a'$, und $a' < a''$, so giebt es nach V zwei Grössen x und x' so, dass $a + x = a'$, und $a' + x' = a''$. Es ist also auch $(a + x) + x' = a''$, somit nach VI $a + (x + x') = a''$, und

---

dass die Widerspruchslosigkeit der Axiome I bis VII durch die moderne arithmetische Begründung der Lehre von den (rationalen und irrationalen) Zahlen dargethan sei. Man vergl. übrigens S. 21 u. 22 Anm. Aus der Widerspruchslosigkeit der Grössenaxiome I bis VII liesse sich die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome (α) bis ($\varkappa$) des zweiten Theils dieser Arbeit folgern und umgekehrt (vergl. S. 40 Anm.).

1) Es wird in § 4 gezeigt werden, dass das sogenannte archimedische Axiom eine Folge des Dedekind'schen Stetigkeitsaxioms (VII) und der übrigen eingeführten Axiome ist, während man andererseits dadurch, dass man nur die rationalen, positiven Zahlen als vorhanden betrachtet, erkennt, dass die Axiome I bis VI mit dem archimedischen Axiom zusammen erfüllt sein können, ohne dass deshalb das Stetigkeitsaxiom VII zu gelten braucht. Ein grosser Theil der im Folgenden entwickelten Resultate bleibt bestehen, wenn man die Axiome I bis VI und dazu das archimedische Axiom annimmt, ohne das Axiom VII zu postuliren.

Hilbert hat (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8. Bd. 1900, S. 180) das Dedekind'sche Stetigkeitsaxiom im Zusammenhang mit den andern Grössenaxiomen durch zwei Thatsachen ersetzt, durch das archimedische Axiom und durch das „Axiom der Vollständigkeit."

daher nach IV $a < a''$. Aus $a < a'$ und $a' < a''$ folgt also $a < a''$.

2. Wenn wieder $a < a'$ ist, und x so gewählt wird, dass $a + x = a'$, so ist $b + (a + x) = b + a'$, und somit $(b + a) + x = b + a'$, also $b + a < b + a'$. Ist dabei y so angenommen, dass $y + a = a'$ ist, so ergiebt sich $(y + a) + b = a' + b$, somit $y + (a + b) = a' + b$, wesshalb nach IV $a + b < a' + b$ ist. Aus $a < a'$ folgt also $b + a < b + a'$ und $a + b < a' + b$, wenn b irgend eine Grösse bedeutet.

Wenn ferner $a < a'$, und $b < b'$ angenommen wird, so ergiebt sich $a + b < a' + b < a' + b'$; wir erhalten also den Satz, dass Kleineres zu Kleinerem addirt Kleineres giebt.

3. Es sei $a < b$. Wir bestimmen wieder x so, dass $a + x = b$ ist, und nehmen, was nach II möglich ist, $x' < x$ an; es ist dann (nach § 2, No. 2) $a + x' < a + x$, d. h. $< b$. Andererseits ist nach IV $a + x' > a$. Wenn daher $a < b$ ist, so giebt es mindestens eine Grösse, die $> a$ und $< b$ ist, d. h. es giebt mindestens eine Grösse zwischen a und b.

4. Zu jeder Grösse a giebt es eine grössere, da ja z. B. $a + a > a$ ist.

5. Die in Axiom V postulirte Grösse x ist eindeutig bestimmt (Eindeutigkeit der einen Art der Subtraction).[1] Wäre nämlich $a + x = b$, und zugleich $a + x' = b$, so wäre $a + x = a + x'$. Wenn aber $x > x'$ oder $x < x'$ wäre, so stünde die letzte Gleichung im Widerspruch mit No. 2 dieses Paragraphen. Nach Axiom I bleibt also nur übrig, dass $x = x'$.

Ebenso beweist man, dass die in V postulirte Grösse y eindeutig bestimmt ist (Eindeutigkeit der andern Art der Subtraction).

§ 3. Vervielfachung.[2]

1. Um die Vervielfachung einer Grösse unzweifelhaft festzulegen, setze man

$$2a = a + a, \quad 3a = (a + a) + a, \quad 4a = ((a + a) + a) + a$$

u. s. f., so dass man allgemein hat

$$na = (n - 1)a + a.$$

---

1) Vgl. Veronese, Atti d. R. Acc. d. Lincei, ser. 4., memoire d. cl. d. sc. f. a. a. O. p. 606 oben.

2) Die Entwicklungen dieses Paragraphen setzen, gerade so wie die des vorigen, nur die Axiome I bis VI voraus.

Da nun in dem Axiom VI das Associativgesetz für die Addition von drei Grössen gefordert worden ist, so gilt dieses Gesetz bekanntlich für beliebig viele Grössen. Nimmt man $m+n$ Grössen, die alle gleich a sein sollen, so erkennt man, dass die Gleichung

(1) $$ma + na = (m+n)a$$

für jede Grösse a und für zwei beliebige (ganze, positive) Zahlen m und n gilt.

Es ergiebt sich noch durch mehrmalige Anwendung der Gleichung (1), dass

$$ma + ma + ma + \ldots = (m + m + m + \ldots)a,$$

wobei die Summe rechts und links m' Summanden besitzen soll. Somit ist

(2) $$m'(ma) = (m'm)a$$

für zwei beliebige ganze Zahlen m und m'.

2. Aus (1) folgt mit Hilfe von Axiom IV, dass $(m+n)a > ma$ ist, und man erkennt jetzt, dass $m'a \gtreqless ma$ ist, je nachdem für die ganzen Zahlen m' und m gilt $m' \gtreqless m$. Aus $m'a = ma$ folgt also insbesondere, dass die ganzen Zahlen m und m' einander gleich sind.

Durch mehrmalige Anwendung von § 2, No. 2 findet man noch, dass $ma \lesseqgtr mb$, je nachdem $a \lesseqgtr b$ ist; man kann also insbesondere aus $ma = mb$ stets schliessen, dass die Grössen a und b einander gleich sind, was auch m für eine ganze Zahl sein mag.

3. Ist eine Grösse a gegeben und eine ganze Zahl n, so kann man stets eine Grösse b so finden, dass $nb < a$. Man kann nämlich zunächst nach II ein $a' < a$ und dazu dann a'' so finden, dass $a' + a'' = a$ ist. Wählt man nun a_1 kleiner als a' und zugleich kleiner als a'', d. h. kleiner als die kleinere der beiden Zahlen a' und a'', so ist nach § 2, No. 2 die Summe $a_1 + a_1 < a' + a''$, d. h. $2a_1 < a$. Nun kann man ebenso a_2 so bestimmen, dass $2a_2 < a_1$, dann a_3 so, dass $2a_3 < a_2$ ist, u. s. f. Wählt man nun die ganze Zahl ν so, dass $2^\nu > n$, und setzt $a_\nu = b$, so ist $nb < a$, w. z. b. w.

§ 4. Das archimedische Axiom.[1])

Es seien a und b zwei Grössen, und $a < b$. Wir wollen beweisen, dass es eine ganze Zahl n so giebt, dass $na > b$ ist.

---

1) Dieses Axiom (Archimedis Opera, rec. Heiberg, vol. I, 1880, p. 11) erscheint hier als beweisbarer Satz. Ueber sein Verhältniss zum Axiom VII herrscht nicht die wünschenswerthe Klarheit. Stolz hat (Math. Ann. Bd. 22, S. 510) bemerkt, dass das archimedische Axiom eine Folge der Stetigkeit ist, wenn diese im Dedekind'schen Sinne, d. h. also durch das Axiom VII, definirt wird. Diese Bemerkung ist richtig, wenn ausserdem noch die Axiome I bis VI gefordert werden. Der von Stolz a. a. O. S. 511 und in seinen Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 1. Theil 1885, S. 82 f. gegebene Beweis ist aber nicht ausreichend, was ich nicht glaube besonders nachweisen zu müssen, da Stolz auf Grund von Einwendungen von Veronese seine Bemerkung wieder zurückgenommen hat (Math. Ann. Bd. 39, S. 107 bis 112).

Veronese (a. a. O. p. 612) hat sich dahin ausgesprochen, dass der Begriff des Kontinuums anders formulirt werden müsse, als er von Dedekind gefasst worden ist, dass das Dedekind'sche Axiom (unser Axiom VII) das archimedische Axiom enthalte, dass ferner (vgl. Veronese p. 603) die Stolz'sche Definition der Stetigkeit (in den Vorlesungen über Arithmetik, S. 82) das archimedische Axiom voraussetze, und dass somit der Stolz'sche Beweis für dieses Axiom überflüssig sei.

Die Aeusserung, dass das archimedische Axiom in dem Dedekind'schen Stetigkeitsaxiom „enthalten“ sei, könnte zu Missverständnissen führen. Ich betone, dass das archimedische Axiom aus dem Axiom VII mit Hilfe der Axiome I bis VI wohl gefolgert werden kann, aber doch nur durch die im Texte gegebene oder eine ähnliche Beweisführung, wesshalb eine solche keineswegs überflüssig ist.

Was ferner die Wahl der Axiome betrifft, so ist sie selbstverständlich bis auf einen gewissen Grad willkürlich, und es können höchstens Zweckmässigkeitsgründe darüber entscheiden, ob das Dedekind'sche Stetigkeitsaxiom zusammen mit den Axiomen I bis VI oder ob andere Axiome den Vorzug verdienen.

Veronese führt (a. a. O. S. 612 Princ. IV) als Stetigkeitsaxiom das folgende Postulat ein:

Wenn zwei Grössen x und x' sich so verändern, dass x stets wächst, x' stets abnimmt, dass immer $x < x'$ bleibt, und $x' - x$ unendlich klein wird, so giebt es auch eine Grösse im System, die grösser ist als alle die von x und kleiner als alle die von x' angenommenen Werthe.

Sieht man von der Abhängigkeit ab, welche durch die Vorstellung der zeitlichen Veränderung beider Variabeln x und x' zwischen diesen gesetzt ist, so wird hier Folgendes vorausgesetzt:

Es sollen zwei Classen von Grössen gegeben sein, die Grössen x und die Grössen x'; keine Grösse soll beiden Classen zugleich angehören, ohne dass nothwendig beide Classen zusammen die Gesammtheit aller Grössen oder alle Grössen eines Intervalls umfassen. Jede Grösse

Man nehme zunächst umgekehrt an, es sei für jede ganze Zahl n die Grösse $na \leqq b$, so kann man jede Grösse, die kleiner ist als

---

x soll kleiner sein als jede Grösse x', es soll unter den x keine grösste, und unter den x' keine kleinste Grösse vorhanden sein, und es soll zu jeder aus der Gesammtheit aller Grössen irgendwie ausgesuchten Grösse δ ein x und ein x' so gefunden werden können, dass $x' - x < \delta$ ist. Das Veronese'sche Postulat besagt nun, dass unter diesen Voraussetzungen eine zwischen den beiden Classen gelegene, von den x und von den x' verschiedene Grösse existirt. Es ist übrigens zu bemerken, dass dieses Postulat durch das Weglassen jener in Veronese's Formulirung gesetzten Beziehung der x auf die x' zum Mindesten in der Form modificirt worden ist.

Aus diesem Postulat lässt sich, wenn nur noch die Axiome I bis VI hinzugenommen werden, das archimedische Axiom nicht folgern (s. u.) und ebenso wenig das Dedekind'sche Stetigkeitsaxiom. Dagegen kann letzteres aus dem (modificirten) Veronese'schen Postulat dann gefolgert werden, wenn man noch das archimedische Axiom sammt den Axiomen I bis VI fordert. Denkt man sich nämlich eine Eintheilung aller Grössen, so wie sie im Dedekind'schen Axiom (VII) gedacht wird, bedeutet ferner X eine Grösse der ersten, Y eine Grösse der zweiten Classe, und δ irgend eine Grösse, so müssen in der Reihe X, $X+\delta$, $X+2\delta$. $X+3\delta$, ... wegen des archimedischen Axioms Grössen auftreten, die $> Y$ sind. Man kann somit auch zwei Grössen $X + (\nu - 1)\delta$ und $X + \nu\delta$ finden, die sich um δ unterscheiden, und von denen $X+(\nu-1)\delta$ der ersten, und $X+\nu\delta$ der zweiten Classe angehört. Es war hier δ ganz beliebig. Gäbe es nun weder in der ersten Classe eine grösste, noch in der zweiten Classe eine kleinste Grösse, so wären die Voraussetzungen des modificirten Veronese'schen Postulats erfüllt, und dieses würde auf eine Grösse führen, die keiner der beiden Classen angehört, entgegen der ursprünglichen Annahme, dass alle Grössen in den beiden Classen vertheilt sein sollten. Enthielte aber die erste Classe eine grösste Grösse x_1, und gleichzeitig die zweite Classe eine kleinste x_1', so müssten diese beiden Grössen verschieden sein, da oben, so wie in VII, jede Grösse nur einer Classe zugetheilt war, und es müsste nach § 2, No. 3 zwischen x_1 und x_1' eine Grösse existiren, die nun wieder keiner Classe angehören könnte, was doch den ursprünglich vorausgesetzen Eigenschaften der Eintheilung widerspricht. Es bleibt also nur noch übrig, dass entweder die erste Classe eine grösste Grösse x_1 enthält, und die zweite keine kleinste, oder umgekehrt die zweite Classe eine kleinste Grösse x'_1, und die erste keine grösste. Im ersten Fall wäre x_1, im zweiten x'_1 die Grösse, deren Existenz das Dedekind'sche Axiom (VII) fordert. Dieses Axiom ist also erfüllt (vgl. auch Veronese a. a. O. p. 613. No. 5a).

Durch die Veronese'sche Wahl des Stetigkeitsaxioms wird man, wenn man das gewöhnliche Continuum beschreiben will, genöthigt, auch das archimedische Axiom als ein besonderes einzuführen (bei Ascoli, R. Istituto Lombardo di Sc. e. Lett. Rend., ser. II, vol. 28, 1895,

ein Vielfaches von a, einer ersten Classe, alle anderen Grössen einer zweiten Classe zuweisen. Da z. B. a der ersten, und b der zweiten Classe angehört, kommen in jeder Classe wirklich Grössen vor. Ist c eine Grösse der zweiten Classe, so ist $na \leqq c$ für

---

p. 1060 ff. ist im wesentlichen dieselbe Formulirung der Stetigkeit gegeben wie bei Veronese, ohne dass auf die andern Axiome näher eingegangen wäre).

Ein System von Dingen, welches dem Veronese'schen Stetigkeitsaxiom, aber nicht dem archimedischen Axiom und nicht dem Axiom VII genügt, erhält man folgendermassen: Man betrachte alle die Functionen von y von der Form $ay + by^2$, wo a eine positive ganze Zahl oder Null, und b irgend eine reelle (endliche) Zahlgrösse bedeutet, wobei aber dann, wenn $a = 0$ ist, b positiv und von Null verschieden sein soll. Setzt man fest, dass von zwei Functionen $a_1 y + b_1 y^2$ und $a_2 y + b_2 y^2$ die erste die grössere heissen soll, wenn $(a_1 y + b_1 y^2) - (a_2 y + b_2 y^2)$ für kleine positive y positiv ist, und denkt man sich die Addition der Functionen in der gewöhnlichen Weise definirt, so erkennt man, dass die Axiome I bis VI erfüllt sind.

Hat man nun zwei den modificirten Veronese'schen Bedingungen genügende Classen der Functionen, die Functionen $\alpha y + \beta y^2$ der ersten und die Functionen $\alpha' y + \beta' y^2$ der zweiten Classe, so muss man auch zwei Functionen $\alpha_0 y + \beta_0 y^2$ und $\alpha'_0 y + \beta'_0 y^2$ aus der einen und der anderen Classe so finden können, dass $(\alpha'_0 y + \beta'_0 y^2) - (\alpha_0 y + \beta_0 y^2) < y^2$ ist. Aus dieser Ungleichung folgt aber, dass $\alpha'_0 = \alpha_0$ ist. Betrachtet man jetzt alle Functionen der ersten Classe, die $> \alpha_0 y + \beta_0 y^2$ sind, und alle Functionen der zweiten Classe, die $< \alpha'_0 y + \beta'_0 y^2$ sind, so sind alle diese Functionen von der Form $\alpha_0 y + by^2$ und unterscheiden sich also nur in den Werthen von b. Man erhält dabei jetzt zwei Classen von Werthen b, welche wieder den in Rede stehenden Bedingungen genügen, und man kann, da es sich nunmehr um gewöhnliche reelle Zahlgrössen handelt, auf die Existenz eines zwischen diesen beiden Classen gelegenen Werthes b_0 schliessen. Die Function $\alpha_0 y + b_0 y^2$ ist nun diejenige, deren Existenz das Veronese'sche Postulat aussagt. Es ist also dieses Postulat in der modificirten, d. h. allgemeineren, Form erfüllt.

Da kein Vielfaches von y^2 grösser ist als y, so gilt das archimedische Axiom hier nicht. Schon daraus folgt, dass das Dedekind'sche Stetigkeitsaxiom hier nicht besteht; dies ersieht man auch unmittelbar, wenn man die Functionen, für die $a = 0$ ist, einer ersten und die Functionen, für die $a > o$ ist, einer zweiten Classe zuweist.

Das Veronese'sche Postulat ist also, trotzdem dass die Axiome I bis VI von vornherein vorausgesetzt sind, nicht gleichbedeutend mit dem Dedekind'schen Axiom (VII). Dagegen ist dieses letztere Axiom, wie leicht zu sehen ist, unter den gemachten Voraussetzungen gleichbedeutend mit der Thatsache, dass unendlich viele Grössen, die alle kleiner sind als eine bestimmte, nicht zu ihnen gehörende Grösse, stets eine sogenannte „obere Grenze“ besitzen.

jede ganze Zahl n. Gehört c_1 zur ersten Classe, so giebt es eine ganze Zahl n_1, für die $c_1 < n_1 a$ ist, und da zugleich auch für dieses n_1 die Ungleichung $n_1 a \leqq c$ bestehen muss, so ist $c_1 < c$. Es ist also jede Grösse der ersten Classe kleiner als jede der zweiten. Nun kann nach VII auf die Existenz einer Grösse ξ geschlossen werden, derart, dass jedes ξ', das kleiner als ξ ist, zur ersten, und jedes ξ'', das grösser als ξ ist, zur zweiten Classe gehört.

Ein Vielfaches von a kann nicht grösser und nicht gleich ξ sein. Wäre nämlich $n_1 a > \xi$, so gäbe es (§ 2, No. 3) zwischen $n_1 a$ und ξ eine Grösse, die, da sie $< n_1 a$ wäre, zur ersten, und da sie $> \xi$ wäre, zur zweiten Classe gehören müsste, was doch widersprechend ist. Wäre aber $n_1 a = \xi$, so wäre (Gleichung (1)) das nächste Vielfache $(n_1 + 1)\,a = n_1 a + a$ nach IV grösser als $n_1 a$, d. h. grösser als ξ, entgegen dem soeben Gefundenen. Es ist also $na < \xi$ für jede ganze Zahl n.

Nun werde $a' < a$ gewählt (Axiom II); nach dem zuletzt Bewiesenen ist $1 \cdot a$ oder a kleiner als ξ, und somit auch $a' < \xi$, (§ 2, No. 1). Man kann nun ξ' so bestimmen (Axiom V), dass $\xi' + a' = \xi$ ist, und es ist dabei (Axiom IV) $\xi' < \xi$. Da also ξ' der ersten Classe angehört, kann man eine ganze Zahl n' so finden, dass $n' a > \xi'$ ist. Aus dieser Ungleichung und aus $a > a'$ folgt nun $n'a + a > \xi' + a'$ (vgl. § 2, No. 2), d. h. es ist $(n' + 1)\,a > \xi$. Dies steht im Widerspruch mit dem bereits Bewiesenen.

Die anfangs gemachte Annahme ist also unmöglich, d. h. es giebt eine ganze Zahl n so, dass $na > b$ ist. Diese Thatsache wird vielfach als besonderes Axiom aufgestellt und als archimedisches Axiom bezeichnet.

§ 5. Das commutative Gesetz der Addition.

In § 1 wurde es dahingestellt gelassen, ob das commutative Gesetz der Addition besteht oder nicht. Es soll jetzt bewiesen werden, dass die Gleichung $a + b = b + a$ eine nothwendige Folge der Axiome I bis VII ist.

Man wähle c so, dass es $< a$ und $< b$ ist, sonst beliebig. Die Grössen $c, 2c, 3c, 4c, \cdots$ sind nach dem archimedischen Axiom nicht alle $\leqq a$. Die erste Grösse der genannten Reihe, die $> a$ ist, sei μc. Es ist also

$$(3) \qquad (\mu - 1)\,c \leqq a,$$

$$(4) \qquad \mu c > a.$$

Ebenso muss eine ganze Zahl ν existiren derart, dass

(5) $$(\nu - 1)c \leqq b,$$

(6) $$\nu c > b.$$

Aus (3) und (5) ergiebt sich nach § 2, No. 2, dass

$$(\mu - 1)c + (\nu - 1)c \leqq a + b.$$

Es ist also wegen (1)

(7) $$(\mu + \nu - 2)c \leqq a + b.$$

Wie nun diese Relation aus (3) und (5) gefolgert worden ist, so kann man aus (6) und (4) schliessen (man achte auf die Reihenfolge bei der Addition), dass

$$(\nu + \mu)c > b + a.$$

Da aber für Zahlen das commutative Gesetz der Addition besteht, so hat man auch

(8) $$(\mu + \nu)c > b + a.$$

Aus (7) ergiebt sich noch $((\mu + \nu - 2)c + 2c) \leqq (a + b) + 2c$, was mit Rücksicht auf (1) die Relation

(9) $$(\mu + \nu)c \leqq (a + b) + 2c$$

ergiebt. Nach § 2, No 1 folgt aus (8) und (9)

(10) $$b + a < (a + b) + 2c$$

Hieraus erkennt man, dass nicht $b + a > a + b$ sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man x so bestimmen, dass

(11) $$(a + b) + x = b + a.$$

Nun war die Grösse c, abgesehen davon, dass sie $< a$ und $< b$ sein sollte, beliebig; es könnte also auch (§ 3, No. 3) c so gewählt werden, dass $2c < x$. In diesem Fall ergäbe sich $(a + b) + 2c < (a + b) + x$, d. h. nach (11) kleiner als $b + a$, was mit (10) im Widerspruch steht.

Da in der ganzen Betrachtung die Rollen der Grössen a und b vertauscht werden können, so ergiebt sich, dass auch nicht $a + b > b + a$ sein kann. Somit muss (nach Axiom I) $a + b = b + a$ sein.[1])

---

1) Der hier gegebene Beweis unterscheidet sich von dem Beweis von Veronese (a. a. O. p. 620 f.) einmal dadurch, dass Veronese mit „Segmenten“ operirt, also gewisse Thatsachen benutzt, die sich auf

§ 6. Folgerungen aus dem Commutativgesetz der Addition.

1. Aus dem commutativen Gesetz der Addition lässt sich, im Zusammenhang mit dem associativen Gesetz, folgern, dass

$$(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots=(a+a+a+\cdots)+(b+b+b+\cdots),$$

d. h. es gilt die Gleichung

$$m\,(a+b)=ma+mb. \tag{12}$$

für zwei beliebige Grössen a und b und für jede ganze Zahl m.

2. Nun seien μ und ν zwei (positive) ganze Zahlen, a und b zwei Grössen, und es sei $\nu a<\mu b$. Wir wollen beweisen, dass es eine Grösse $a'>a$ so giebt, dass $\nu a'<\mu b$, eine Grösse $b'<b$ so, dass $\nu a<\mu b'$, und zwei ganze Zahlen μ' und ν' so, dass neben der Relation $\nu\mu'<\nu'\mu$ die Ungleichung $\nu' a<\mu' b$ besteht.

Um den ersten Theil der Behauptung zu beweisen, setze man

$$\nu a+x=\mu b \tag{13}$$

und wähle x' so (§ 3, No. 3), dass $\nu x'<x$. Dann ist nach (12) $\nu(a+x')=\nu a+\nu x'$, und dies ist $<\nu a+x$, d. h. $<\mu b$; es ist also für ein $a'=a+x'$ dieser Theil der Behauptung richtig.

Um den zweiten Theil zu beweisen, bestimme man x wie vorhin, x'' so, dass $\mu x''<x$ und zugleich $<b$ ist, und definire dann b' durch die Gleichung

$$b'+x''=b, \tag{14}$$

Strecken und auf die Anordnung von Punkten beziehen (vergl. die Axiome (α) bis ($\varkappa$) in § 18), während ich hier zeige, dass jedwelche Grössen, die den Axiomen I bis VII genügen, das commutative Gesetz der Addition erfüllen müssen. Ausserdem setzt Veronese, wenigstens bei der gegebenen Form seines Beweises, die Existenz der aliquoten Theile voraus. Der Beweis muss aber, wenn man die Existenz der aliquoten Theile nicht zu den Axiomen rechnen will, so gehalten werden, dass diese Voraussetzung vermieden wird, weil, so weit mir bekannt ist, kein einwandfreier Beweis für die Existenz der aliquoten Theile gegeben worden ist, der nicht das commutative Gesetz der Addition verwendete (vgl. die Anm. auf S. 17).

Ich bemerke noch ausdrücklich, dass die Entwickelungen dieses Paragraphen und des nächsten (§ 6) bestehen bleiben, wenn man nur die Axiome I bis VI und das archimedische Axiom verlangt.

wobei $b' < b$ wird. Aus (13) und (14) erhält man mit Rücksicht auf (12)

$$\nu a + x = \mu b' + \mu x''.$$

Nun hatten wir $\mu x'' < x$, und es ist daher

$$\mu b' + \mu x'' < \mu b' + x;$$

somit ist auch $\nu a + x < \mu b' + x$. Dies ist mit $\nu a \geqq \mu b'$ nicht verträglich, wesshalb $\nu a < \mu b'$ ist.

Es ist noch der dritte Theil der Behauptung zu beweisen.[1]) Man wähle x wieder der Gleichung (13) gemäss. Nach dem archimedischen Axiom giebt es eine ganze Zahl ϱ so, dass

$$(15) \qquad \varrho x > a.$$

Aus (13) ergiebt sich mit Hilfe von (2) und (12), dass

$$(\varrho\nu) a + \varrho x = \varrho(\nu a) + \varrho x = \varrho(\nu a + x) = \varrho(\mu b) = (\varrho\mu) b$$

ist, und aus (15) (Vergl. auch (1)), dass

$$(\varrho\nu + 1) a = (\varrho\nu) a + a < (\varrho\nu) a + \varrho x.$$

Es muss also auch

$$(\varrho\nu + 1) a < (\varrho\mu) b$$

sein. Wenn man jetzt $\mu' = \varrho\mu$, $\nu' = \varrho\nu + 1$ setzt, so ist $\nu\mu' < \nu'\mu$, und man erkennt die Richtigkeit der Behauptung.

§ 7. Aliquote Theile.

Es sei a eine Grösse, und n eine ganze Zahl; wir wollen beweisen, dass eine Grösse existirt, deren n-faches gleich a ist.

Wir theilen die Gesammtheit aller Grössen in zwei Classen; in die erste Classe kommen diejenigen, deren n-faches kleiner ist als a, in die zweite Classe kommen alle anderen Grössen. Nach § 3, No. 3 giebt es Grössen der ersten Classe; andererseits gehört a selbst der zweiten Classe an. Gehört ferner c der ersten Classe an, und c' der zweiten, so folgt aus der Definition der beiden Classen, dass $nc < nc'$, woraus (vergl. § 3, No. 2) sich ergiebt, dass $c < c'$. Man erkennt jetzt, dass die Bedingungen erfüllt sind, unter denen das Axiom VII postulirt worden ist. Es existirt also eine Grösse ξ so, dass $n\xi' < a$ ist für $\xi' < \xi$, und $n\xi'' \geqq a$ für jedes ξ'', das $> \xi$ ist.

---

1) Der Beweis dieses dritten Theils ist aus Weber, Algebra, 1. Bd. S. 13 entlehnt.

Wäre[1]) nun $n\xi < a$, so liesse sich x so finden, dass $n\xi + x = a$, und x' so (§ 3, No. 3), dass $nx' < x$ ist. Es wäre dann $n\xi + nx' < n\xi + x$, d. h. $< a$. Mit Rücksicht auf (12) hätte man also $n(\xi + x') < a$. Nun ist nach IV $\xi + x'$ eine Grösse, die $> \xi$ ist, und es ist somit das eben gefundene Resultat im Widerspruch mit den Eigenschaften der Grösse ξ.

Wäre andererseits $n\xi > a$, so liesse sich x so finden, dass $a + x = n\xi$, und x' so, dass $nx' < x$, und zugleich $x' < \xi$. Ferner könnte man nun ξ' finden, so dass $\xi' + x' = \xi$, wobei $\xi' < \xi$ sein würde. Man hat jetzt $a + nx' < a + x$, d. h. $< n\xi$, und $n(\xi' + x') = n\xi$, wesshalb auch $a + nx' < n(\xi' + x')$ sein muss. Wegen der Relation (12) ist also

$$(16) \qquad a + nx' < n\xi' + nx'.$$

Da aber $\xi' < \xi$ ist, so folgt aus den Eigenschaften der Grösse ξ, dass $n\xi' < a$. Es ergiebt sich hieraus $n\xi' + nx' < a + nx'$ im Widerspruch mit (16).

Die einzig übrigbleibende Möglichkeit (Axiom I) ist die, dass $n\xi = a$ ist. Es ist also die Grösse ξ genau ein $n$tel der gegebenen Grösse a.[2]) Die Grösse ξ ist durch a und n eindeutig bestimmt, denn aus $n\xi = a$ und $n\eta = a$ ergäbe sich $\eta = \xi$ (Vergl. § 3, No. 2).

§ 8. Antike und moderne Auffassung der Proportionenlehre.

Die Lehre von den Proportionen der Grössen kann im Wesentlichen auf zwei Arten behandelt werden, die eine Art ist die euklidische, die andere die moderne. Euklid giebt eine Er-

---

1) Der Nachweis dafür, dass nun ξ wirklich das $n$tel von a vorstellt, ist sehr wesentlich. Veronese (a. a. O. S. 617 unten) hat diesen Theil des Beweises weggelassen, während ich ihn mit Hilfe der Gleichung (12) erledigt habe. Der Beweis von (12) beruhte aber auf dem commutativen Gesetz der Addition. Es ist also durch die Betrachtungen von Veronese nicht erwiesen (vergl. Anm. S. 15), dass sich die Existenz der aliquoten Theile ohne das Commutativgesetz beweisen lässt. Ich habe deshalb das Commutativgesetz vorangestellt und es bewiesen, ohne die aliquoten Theile dabei zu benutzen.

2) Man beachte, dass die auf S. 12 Anm. aufgestellten Grössen (Functionen der Variabeln y), welche dem Axiom VII nicht genügen, die Theilung in n gleiche Theile nicht immer erlauben, da z. B. $\frac{1}{n} y$ keine Grösse des Systems ist.

klärung davon, wann von vier Grössen a, b, c, d gesagt werden soll, dass sich a zu b gerade so verhalte wie c zu d.[1]) Diese Erklärung setzt nur voraus, dass man Grössen addiren, also auch eine Grösse vervielfachen kann, dass man ferner bei zwei gegebenen Grössen erkennen kann, ob sie gleich sind oder nicht, und im zweiten Fall, welches die grössere ist. Auf Grund der gegebenen Erklärung wird nun z. B. bewiesen, dass, wenn sich a zu b wie c zu d verhält, sich dann auch $a + b$ zu b verhält wie $c + d$ zu c. Abgesehen davon, dass Euklid nicht alle die Voraussetzungen, die er in seinen Beweisen thatsächlich benutzt, ausdrücklich angiebt[2]), ist seine Darstellung eine völlig strenge.

Die moderne Auffassung der Proportionenlehre beruht auf einem Gedanken, den in präciser Form zuerst Newton ausgesprochen hat[3]), dass nämlich das Verhältniss einer Grösse zu einer anderen von derselben Art, welche letztere als Einheit aufgefasst werden soll, durch eine abstracte (d. h. reelle, positive) Zahl ausgedrückt wird. Bei dieser Auffassung verhält sich die Grösse a zu b dann wie c zu d, wenn a durch b gemessen dieselbe Zahl ergiebt wie c, falls dieses durch d gemessen wird. Hier beruht also der Begriff der Proportion auf dem des Masses. Die moderne Auffassung der Proportionenlehre, d. h. die Lehre vom Mass der Grössen, scheint mir niemals ganz befriedigend begründet worden zu sein[4]) und einer Ergänzung zu be-

---

1) Euclidis Elementa (ed. Heiberg 1883—88), 5. Buch, 5. Definition. Vergl. auch hier die Anm. am Schluss von § 14.

2) Dass Euklid das associative Gesetz der Addition stillschweigend benutzt, könnte man sich dadurch erklären, dass er hauptsächlich an Strecken denkt, in welchem Fall dieses Gesetz im Grund selbstverständlich ist (vgl. hier § 19, No. 3). Er setzt aber auch das commutative Gesetz der Addition voraus, wie Veronese (a. a. O. p. 621 Anm.) richtig bemerkt hat; m. vergl. dazu nur No. I im 5. Buch der Elemente.

3) In der „Arithmetica universalis", 1707, p. 2: „Per numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus." Vergl. Des-Cartes, La Géométrie, 1638, t. 1, p. 1.

4) Die euklidische Theorie der Proportionen geht auch in den mir bekannten neueren Bearbeitungen (vgl. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 1. Bd. 1885, S. 85 ff, S. 97 ff; Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, 1898, Einleitung; Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., 1. Bd., 1898, S. 5 bis 16) unvermittelt neben der modernen, arithmetischen Theorie der Irrationalzahlen einher, und

dürfen.[1]) Es muss meines Erachtens aus den Axiomen des § 1 heraus bewiesen werden, dass nicht bloss jede Grösse a gemessen durch irgend eine andere b eine bestimmte Zahlgrösse oder Zahl (im Sinn des modernen arithmetischen Begriffes der Zahlen) ergiebt, sondern auch, dass z. B. der Summe[2]) $a + c$ zweier Grössen a und c die arithmetische Summe der Masszahlen von a und c als Masszahl zugehört, falls die drei Grössen a, c und $a + c$ durch dieselbe Einheit gemessen werden. Zu solchen Beweisen sind dann ähnliche Betrachtungen erforderlich wie diejenigen, die Euklid im 5. Buch der Elemente auf die Proportionen angewendet hat.

Durch die erwähnten Beweisführungen, die im Folgenden ausgeführt werden, wird dann erst die Anwendbarkeit der Zahlen auf die Grössen wirklich bewiesen, unter der Voraussetzung, dass die Grössen, um die es sich handelt, den Axiomen I bis VII genügen; zugleich wird so die euklidische Proportionenlehre mit der Idee des Masses und mit der modernen, arithmetischen Theorie der Irrationalzahlen in die engste Verbindung gebracht.

§ 9. Rationale und irrationale Zahlen.

Im Folgenden wird, wie schon erwähnt, der rein arithmetische Begriff der rationalen und irrationalen Zahlen angewendet werden. Hinsichtlich der rationalen Zahlen ist zu bemerken, dass hier ein Bruch $\frac{m}{n}$ lediglich als eine Form angesehen werden soll, welche durch die positive ganze Zahl m im Zähler und die positive ganze Zahl n im Nenner gegeben ist. Es wird festgesetzt, dass

---

zwar ist dies auch bei denjenigen Darstellungen der Fall, die (wie bei Stolz und bei Weber) auf beide Theorien eingehen. Die Abhandlung von Bettazi, La definitione di proporzione ed il V libro di Euclide (Periodico di Math. VII, p. 16 ff, p. 54) war mir leider nicht zugänglich, doch scheint dieselbe (vergl. Fortschritte der Mathematik 1892, S. 501) nicht das Ziel zu verfolgen, das ich mir in der vorliegenden Arbeit gesteckt habe.

1) Einer ähnlichen Ergänzung bedürfen auch die bis jetzt gegebenen Begründungen des „projectiven Masses" in der neueren Geometrie.

2) Die Summe zweier Grössen ist zunächst als etwas von der arithmetischen Summe ganz Verschiedenes aufzufassen. Sind die Grössen z. B. Strecken, so hat man sich ihre Addition rein geometrisch durch Aneinanderfügen der Strecken zu denken.

$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ angesehen werden soll, wenn $mn' = nm'$ ist, und dass $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$, wenn $mn' > nm'$. Zwei Brüche, welche nach der gegebenen Definition einem dritten gleich sind, sind, wie sich zeigen lässt, nach derselben Definition einander gleich, und die sämmtlichen Brüche, welche einem bestimmten Bruch gleich sind, repräsentiren nach unserer (willkürlichen) Auffassung ein Object, das wir als Rationalzahl bezeichnen. Bei entsprechender Definition der Summe und des Products lassen sich für diese Rationalzahlen die bekannten arithmetischen Gesetze beweisen.

Durch die Untersuchungen von Weierstrass, Dedekind und G. Cantor sind auch die irrationalen Zahlgrössen, die wir der Einfachheit wegen ebenfalls als „Zahlen" bezeichnen, auf eine rein arithmetische Grundlage gestellt worden.[1]) Im Folgenden ist die Theorie von Dedekind, als die für den Zweck bequemste, angenommen worden. Nach dieser Theorie wird eine Irrationalzahl durch einen „Schnitt" definirt, d. h. sie wird dadurch definirt, dass man alle rationalen Zahlen angiebt, die grösser sind als die Irrationalzahl, und alle rationalen Zahlen, die kleiner sind als dieselbe. Da diese Theorie hinreichend begründet und bekannt genug ist, führe ich nur einige ihrer Definitionen und Lehrsätze in freier Darstellung an, ohne die Beweise, welche sich rein arithmetisch führen lassen, hinzuzufügen.

1. Eine Eintheilung aller (positiven, von Null verschiedenen) Rationalzahlen in zwei Classen heisst ein Schnitt, wenn jede Rationalzahl einer und nur einer Classe zugewiesen ist, wenn Rationalzahlen beider Classen existiren, wenn ferner jede Rationalzahl der ersten Classe kleiner ist als jede der zweiten, und wenn in der ersten Classe eine grösste Rationalzahl nicht vorhanden ist.

2. Die Rationalzahlen der ersten Classe sollen die unteren, die der zweiten Classe die oberen Zahlen des Schnitts heissen.[2]) Giebt es unter den oberen Zahlen eine kleinste, so soll diese als uneigentlich obere Zahl bezeichnet werden. Eine obere Zahl

1) Die drei rein arithmetischen Definitionsformen der Zahlen, deren sich die genannten Autoren bedient haben, sind zusammengestellt bei G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, 1883, S. 21 ff.

2) Die Gesammtheit der unteren Zahlen eines Schnitts ist dasselbe was Pasch (Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, 1882, S. 3) eine „Zahlenstrecke" nennt.

heisst eine eigentlich obere, wenn es eine im Vergleich zu ihr kleinere gleichfalls obere Zahl des betrachteten Schnitts giebt.

3. Sind zwei Schnitte gegeben, und werden mit a, beziehungsweise b die unteren Zahlen des ersten, beziehungsweise zweiten Schnitts bezeichnet, so sind die sämmtlichen Zahlen $a + b$ mit den sämmtlichen Zahlen eines dritten Schnitts identisch, der die Summe des ersten und zweiten Schnitts genannt wird.

4. Werden die eigentlich oberen Zahlen des ersten und zweiten der in Nr. 3 genannten Schnitte mit a', beziehungsweise b' bezeichnet, so sind die sämmtlichen Zahlen von der Form $a' + b'$ mit den sämmtlichen eigentlich oberen Zahlen jenes dritten Schnitts identisch.

5. Hält man an den in Nr. 3 und Nr. 4 eingeführten Bezeichnungen fest, so sind die Zahlen ab identisch mit den unteren Zahlen eines vierten Schnitts, der als Product des ersten und zweiten Schnitts bezeichnet wird. Die eigentlich oberen Zahlen des vierten Schnitts sind die Zahlen $a'b'$.

6. Wenn zwei nicht identische Schnitte gegeben sind, so giebt es in einem und nur in einem von ihnen eine untere Zahl, welche zu den oberen Zahlen des andern Schnitts gehört; es wird dann gesagt, dass jener erste Schnitt grösser sei als der zweite.

Es gelten für die Schnitte alle die bekannten Gesetze der Arithmetik: das associative und das commutative Gesetz der Addition und der Multiplication, das in der Formel $a(b + c) = ab + ac$ ausgesprochene distributive Gesetz, der Satz, dass Grösseres zu Grösserem addirt Grösseres giebt, u. s. w. Ebenso gelten auch die Gesetze der umgekehrten Operationen, z. B. der Division, die sich leicht definiren lässt, und alle diese Gesetze lassen sich rein arithmetisch beweisen.[1])

1) Man kann insbesondere auf rein arithmetischem Wege, also ohne Voraussetzung von Axiomen, beweisen, dass für die Schnitte die Axiome I bis VI sammt dem archimedischen Axiom erfüllt sind (vergl. Dedekind, Pasch a. a. O.; Tannery, introduction à la théorie des fonctions d'une variable, 1886, p. 1 ff.; Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., 1. Bd. 1898, S. 5 ff.). Betrachtet man die Gesammtheit aller Schnitte als fertig und denkt man sich eine Eintheilung aller Schnitte in zwei Classen gegeben, so dass die Classen von der in Axiom VII angenommenen Art sind, so kann man daraus leicht einen Schnitt construiren, welcher die Eigenschaften der im Axiom VII geforderten Grösse ξ hat; es erscheint also das Axiom VII für die Schnitte erfüllt. Immerhin könnte man noch ein Bedenken tragen, zu sagen, dass in

Sind zwei Schnitte gegeben, von denen der erste eine kleinste obere Zahl r, und der zweite eine kleinste obere Zahl r' besitzt, so besitzt die Summe der Schnitte auch eine kleinste obere Zahl und zwar die Rationalzahl $r + r'$, und das Product der beiden ersten Schnitte besitzt die kleinste obere Zahl rr'. Die Rechnung mit solchen besonderen Schnitten geht also der Rechnung mit den rationalen Zahlen parallel, und es können diese Schnitte als die rationalen Zahlen repräsentirend angesehen und geradezu mit den Rationalzahlen identificirt werden.

Ein Schnitt, der keine kleinste obere Zahl besitzt, wird als eine irrationale Zahl repräsentirend angesehen und auch geradezu eine irrationale Zahl genannt.

§ 10. Die einem Grössenverhältniss zugeordnete Zahl (Masszahl).

Es seien a und b zwei Grössen einer bestimmten Art, für welche die Axiome I bis VII gelten.[1] Die Vielfachen der Grössen haben nach § 3 eine völlig bestimmte Bedeutung. Ist nun für die positiven, ganzen Zahlen μ und ν die Ungleichung $\nu a > \mu b$ erfüllt, so soll $\frac{\mu}{\nu}$ ein unterer Bruch in Beziehung auf das Verhältniss $a : b$ heissen; im andern Fall, wenn $\nu a \leqq \mu b$ ist, soll

---

der Gesammtheit aller Schnitte eine fertige den Axiomen I bis VII genügende Gesammtheit vorliege, denn man darf nicht vergessen, dass ein Schnitt nichts anderes ist als ein besonderes Eintheilungsgesetz aller rationalen Zahlen; man kann sich aber wohl kaum von der Gesammtheit aller möglichen solchen Gesetze einen Begriff bilden. Man könnte also der Ansicht sein, dass man, indem man das Zahlencontinuum aufstellt, noch eine Annahme macht, eine Annahme, die vielleicht nicht einmal aus der reinen Arithmetik heraus, sondern aus der äusseren Erfahrung, beziehungsweise der Anschauung, zu motiviren wäre. Von dem Continuum der Zahlen ist im Text dieser Arbeit nur im Schlussparagraphen — und auch da eigentlich nur um der Einfachheit der Darstellung willen — Gebrauch gemacht worden. In den Anmerkungen ist das Zahlencontinuum mehrmals benutzt worden, wo es sich darum handelte, zu zeigen, dass ein Axiom aus anderen Axiomen nicht abgeleitet werden kann.

1) Uebrigens bleiben die Betrachtungen dieses Paragraphen, sowie der Paragraphen 11, 12, 13, 14 auch dann bestehen, wenn nur die Axiome I bis VI sammt dem archimedischen Axiom angenommen werden (vergl. die Anm. am Anfang von § 3 und am Schluss von § 5).

gesagt werden, dass $\frac{\mu}{\nu}$ ein **oberer Bruch** sei in Beziehung auf das Verhältniss $a:b$.

Ist $\frac{\mu}{\nu}$ ein unterer, $\frac{\mu'}{\nu'}$ ein oberer Bruch in Beziehung auf das genannte Verhältniss, so hat man $\nu a > \mu b$ und $\mu' b \geqq \nu' a$, woraus sich mit Rücksicht auf § 3 Nr. 2 und Gleichung (2) die Relationen $(\mu'\nu)a > (\mu'\mu)b$ und $(\mu\mu')b \geqq (\mu\nu')a$ ergeben. Aus diesen Relationen folgt $(\mu'\nu)a > (\mu\nu')a$ und somit nach § 3, Nr. 2 auch $\mu'\nu > \mu\nu'$, d. h. es ist der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ kleiner als $\frac{\mu'}{\nu'}$.

Es ist also jeder untere Bruch kleiner als jeder in Beziehung auf dasselbe Verhältniss obere Bruch. Insbesondere müssen zwei gleiche Brüche entweder beide untere oder beide obere sein, wesshalb eine Rationalzahl, unabhängig davon, wie sie durch einen einzelnen Bruch dargestellt wird, sich entweder als obere oder als untere in Beziehung auf das Verhältniss $a:b$ ergiebt. Man erkennt zugleich, dass jede untere Rationalzahl kleiner ist als jede obere. Da es ferner nach dem archimedischen Princip sowohl eine ganze Zahl ν giebt, für die $\nu a > 1 \cdot b$, als eine Zahl μ, wofür $1 \cdot a < \mu b$, so existiren in Beziehung auf jedes Verhältniss wirklich sowohl untere als obere Zahlen.

Zu jedem Bruch $\frac{\mu}{\nu}$, für den $\nu a > \mu b$ ist, lässt sich nach § 6, Nr. 2 ein grösserer $\frac{\mu'}{\nu'}$ finden, für den auch noch $\nu' a > \mu' b$ ist, d. h. es giebt zu jeder Rationalzahl $\frac{\mu}{\nu}$, die eine untere ist, eine grössere gleichfalls untere; es giebt also unter den unteren Zahlen keine grösste. Es ist nun ersichtlich, dass sich zu dem Verhältniss $a:b$ eine solche Eintheilung aller Rationalzahlen ergeben hat, die wir als Schnitt (§ 9, Nr. 1) bezeichnen. Man erhält also den Satz:

Zu jedem Grössenverhältniss $a:b$, d. h. zu je zwei Grössen, die in einer bestimmten Ordnung gegeben sind, gehört ein ganz bestimmter Schnitt, d. h. eine bestimmte Zahl[1]) im allgemeinen Sinne des Worts. Diese Zahl soll mit $[a:b]$ bezeichnet werden.

Man kann die Zahl $[a:b]$ auch die **Masszahl** nennen, die man erhält, wenn man die Grösse a durch die Grösse b misst. b heisst dann die **Einheit**. Aus § 3, Nr. 2 ergiebt sich noch:

---

1) d. h. eine bestimmte, positive, von Null verschiedene (endliche) Zahlgrösse.

Zum Verhältniss $a:a$ gehört der die Zahl 1 repräsentirende Schnitt (vergl. den Schluss von § 9), d. h. es ist $[a:a] = 1$.

§ 11. Commensurable Grössen.

1. Zwei Grössen a und b werden commensurabel genannt[1]), wenn zwei ganze Zahlen μ und ν so existiren, dass $\nu a = \mu b$. Es ist in diesem Fall $\frac{\mu}{\nu}$ ein oberer Bruch in Beziehung auf das Verhältniss $a:b$ (vergl. § 10). Ist nun $\frac{\mu'}{\nu'}$ gleichfalls ein oberer Bruch, so ist $\nu' a \leqq \mu' b$, und es ergiebt sich (§ 3, Nr. 2 und Gleichung (2)), dass $(\nu'\mu)b = (\nu'\nu)a = (\nu\nu')a \leqq (\nu\mu')b$. Somit ist $\nu'\mu \leqq \nu\mu'$, d. h. es ist der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ kleiner als der Bruch $\frac{\mu'}{\nu'}$ oder gleich diesem. Hieraus folgt, dass $\frac{\mu}{\nu}$ die kleinste obere Rationalzahl in Beziehung auf das Verhältniss $a:b$ vorstellt. Es ergiebt sich also der Lehrsatz:

Wenn a und b commensurabel sind, und $\nu a = \mu b$ ist, so besitzt der dem Verhältniss $a:b$ zugeordnete Schnitt eine kleinste obere Zahl, die Rationalzahl $\frac{\mu}{\nu}$.[2]) Man kann also (§ 10, § 9 Schluss) auch $[a:b] = \frac{\mu}{\nu}$ setzen.

---

1) Die ursprüngliche Definition ist die, dass die Grössen a und b dann commensurabel genannt werden, wenn eine Grösse c existirt, von der sowohl a als b ein Vielfaches ist. Ist nun $a = \mu c$, $b = \nu c$, so ergiebt sich $\nu a = (\nu\mu)c = (\mu\nu)c = \mu b$ (vergl. Gleichung (2)). Weiss man andererseits von den Grössen a und b nur, dass sie mit zwei passend gewählten ganzen Zahlen μ und ν die Gleichung $\nu a = \mu b$ erfüllen, so kann man die Existenz einer Grösse c von der genannten Beschaffenheit nachweisen. Dies ist sehr leicht, wenn man von der Existenz der aliquoten Theile (§ 7) Gebrauch macht. Man hat aber nicht unbedingt nöthig, die aliquoten Theile zu benutzen, deren Existenz bei unserer Darstellung auf dem Stetigkeitsaxiom beruht, sondern kann auch die Grösse c aus den Grössen a und b durch ein Verfahren ableiten, das dem Verfahren des grössten gemeinsamen Theilers bei Zahlen analog ist (Euklid's Elemente, 7. Buch, Nr. II u. 10. Buch, Nr. III); man braucht dann nur die Axiome I bis VI zu postuliren.

Ist eine Grösse c so gegeben, dass $a = \mu c$, $b = \nu c$, und zugleich eine Grösse c' so, dass $a = \mu' c'$, $b = \nu' c'$, so geht aus den Entwicklungen des Textes hervor, dass $\mu\nu' = \mu'\nu$ (m. vergl. auch meine Schrift: Anschauung und Denken in der Geometrie, S. 47 ff.).

2) Vergl. Euklid's Elemente, 10. Buch, Nr. V.

2. Es muss noch das Umgekehrte bewiesen werden. Zu dem Schnitt, der dem Verhältniss $a : b$ zugeordnet ist, soll eine kleinste obere Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ gehören. Nach der Definition der oberen Zahlen ist $\nu a \leqq \mu b$. Wir müssen zeigen, dass hier $\nu a = \mu b$. Wäre $\nu a < \mu b$, so könnte man nach § 6, Nr. 2 einen Bruch $\frac{\mu'}{\nu'} < \frac{\mu}{\nu}$ und zugleich so finden, dass noch $\nu' a < \mu' b$. Nun wäre $\frac{\mu'}{\nu'}$ ein oberer Bruch und zugleich kleiner als der kleinste obere Bruch. Wir haben somit den Satz:

Wenn der dem Verhältniss $a : b$ zugeordnete Schnitt eine kleinste obere Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ besitzt, so ist $\nu a = \mu b$.[1])

3. Aus Nr. 1 dieses Paragraphen folgt noch, dass, falls für irgend ein commensurables oder incommensurables Verhältniss $a : b$ der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ eine obere, aber nicht die kleinste obere Zahl darstellt, jedenfalls nicht $\nu a = \mu b$ sein kann. Es ist also für jeden eigentlich oberen (vergl. § 10 und § 9, Nr. 2) Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ eines beliebigen Verhältnisses $a : b$ die Ungleichung $\nu a < \mu b$ erfüllt.

§ 12. Masszahl einer Summe von Grössen.

1. Es seien drei Grössen a, a' und b gegeben. Durch das Verhältniss $a : b$ ist ein erster, durch das Verhältniss $a' : b$ ein zweiter Schnitt definirt, und es ist durch diese beiden Schnitte ein dritter Schnitt mitbestimmt, der ihre Summe ist.

Jede untere Zahl des dritten Schnitts kann (§ 9, No. 3) durch

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} = \frac{\nu'\mu + \nu\mu'}{\nu\nu'} \tag{17}$$

dargestellt werden, wobei $\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu'}{\nu'}$ untere Brüche des ersten beziehungsweise zweiten Schnittes bedeuten. Nach der Definition der unteren Brüche (§ 10) ist $\nu a > \mu b$, und $\nu' a' > \mu' b$, woraus sich (§ 3, No. 2 und No. 1) ergiebt, dass $(\nu'\nu)\, a > (\nu'\mu) b$, und $(\nu\nu')a' > (\nu\mu')b$. Nach § 2, No. 2 und nach Gleichung (12) und (1) ist also auch

$$(\nu\nu')(a + a') > (\nu'\mu + \nu\mu')\, b.$$

1) Euklid's Elemente, 10. Buch, Nr. VI.

Diese Ungleichung besagt nichts Anderes, als dass der Bruch (17) ein unterer Bruch ist für das Verhältniss $(a + a') : b$.

Jede eigentlich obere Zahl des dritten Schnitts kann (§ 9, No. 4) in die Form

$$(18) \qquad \frac{\varrho}{\sigma} + \frac{\varrho'}{\sigma'} = \frac{\sigma'\varrho + \sigma\varrho'}{\sigma\sigma'}$$

gesetzt werden, wobei $\frac{\varrho}{\sigma}$ und $\frac{\varrho'}{\sigma'}$ eigentlich obere Brüche des ersten und zweiten Schnittes bedeuten. Man hat nun (§ 11, No. 3) $\sigma a < \varrho b$ und $\sigma' a' < \varrho' b$ und kann daraus folgern, dass $(\sigma'\sigma)a < (\sigma'\varrho)b$, und $(\sigma\sigma')a' < (\sigma\varrho')b$, woraus sich dann wieder

$$\sigma\sigma'(a + a') < (\sigma'\varrho + \sigma\varrho')b$$

ergiebt. Diese Ungleichung besagt mit Rücksicht auf § 10, § 11 No. 2 und § 9 No. 2, dass der Bruch (18) ein eigentlich oberer ist in Beziehung auf das Verhältniss $(a + a') : b$.

Bezeichnet man jetzt den Schnitt, welcher dem Verhältniss $(a + a') : b$ zugeordnet ist, als vierten Schnitt, so ist bis jetzt gezeigt worden, dass jede untere Zahl α des dritten Schnitts auch eine untere Zahl des vierten, und jede eigentlich obere Zahl β des dritten Schnitts auch eine eigentlich obere Zahl des vierten Schnittes ist. Falls der dritte Schnitt eine uneigentlich obere Zahl ξ besitzt, ist von ξ zunächst noch nicht nachgewiesen, welcher der durch den vierten Schnitt gebildeten Classen es angehört. Nun ist ξ eine zwischen den α und den β gelegene Rationalzahl, und es macht ξ mit den α und den β zusammen die Gesammtheit aller Rationalzahlen aus. Wenn also ξ eine untere Zahl des vierten Schnittes wäre, so würde die Classe dieser unteren Zahlen offenbar nur aus den Zahlen α und aus ξ bestehen; es würde daher diese Classe in ξ eine grösste Zahl besitzen, was (§ 9, No. 1) widersprechend ist. Man erkennt jetzt, dass in jedem Fall der dritte Schnitt mit dem vierten identisch ist. Es gilt somit der Satz:

Der dem Verhältniss $(a + a') : b$ zugeordnete Schnitt ist die Summe der beiden Schnitte, welche den Verhältnissen $a : b$ und $a' : b$ zugehören.

Das heisst mit anderen Worten:

Die Masszahl der Grössensumme $a + a'$ ist die arithmetische Summe der Masszahlen von a und von a', wenn sowohl a als a' als $a + a'$ durch dieselbe Einheit gemessen werden.

Mit Rücksicht auf die in § 10 eingeführte Bezeichnung kann das gewonnene Resultat auch in der Formel

$$(19) \qquad [(a + a') : b] = [a : b] + [a' : b]$$

ausgedrückt werden.

2. Ist $a_1 > a$, so kann a_1 auf die Form $a + a'$ gebracht werden, und die Formel (19) zeigt dann, dass $[a_1 : b] = [(a + a') : b] > [a : b]$ ist. Schliesslich ergiebt sich der Satz:

Es ist $[a_1 : b] \gtreqless [a_2 : b]$ je nachdem $a_1 \gtreqless a_2$ ist. Insbesondere kann man also aus der Gleichung $[a_1 : b] = [a_2 : b]$ stets schliessen, dass $a_1 = a_2$ ist.[1]) Da ferner $[b : b] = 1$ ist (vgl. § 10, Schluss), so ist $[a : b] \gtreqless 1$, je nachdem $a \gtreqless b$ ist.

§ 13. Aenderung der Einheit.

Man bilde aus drei beliebigen Grössen a, b und c die beiden Schnitte, welche (§ 10) mit $[a : b]$ und $[b : c]$ bezeichnet werden; es soll $[a : b]$ der erste, und $[b : c]$ der zweite Schnitt heissen. Das Product dieser beiden Schnitte sei der dritte Schnitt. Nun ist jede untere Zahl (§ 9, No. 5) des dritten Schnittes von der Form

$$(20) \qquad \frac{\mu\varkappa}{\nu\lambda},$$

wo $\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\varkappa}{\lambda}$ untere Brüche sind für die Verhältnisse $a : b$ und $b : c$. Es gelten also nach der Definition der unteren Brüche (§ 10) die Ungleichungen $\nu a > \mu b$ und $\lambda b > \varkappa c$. Hieraus ergiebt sich (§ 3, No. 2 und Gleichung (2)) $(\lambda\nu)a > (\lambda\mu)b$ und $(\mu\lambda)b > (\mu\varkappa)c$; es ist also auch $(\lambda\nu)a > (\mu\varkappa)c$, d. h. es ist der Bruch (20) ein unterer für das Verhältniss $a : c$.

---

1) Man könnte auch dann, wenn nur die Axiome I bis VI, ohne das Stetigkeitsaxiom und ohne das archimedische Axiom, gefordert werden, stets einen dem Verhältniss $a : b$ zugeordneten Schnitt definiren, wenn man nur zulässt, was hier nicht geschehen ist, dass auch einmal alle Rationalzahlen in die erste Classe oder alle Rationalzahlen in die zweite Classe des Schnittes fallen, wobei eine Classe völlig leer bliebe. Bei dieser Auffassung käme ein der Zahl 0, und ein der Zahl ∞ entsprechender Schnitt vor. In einem gewissen Sinn würden dann die Relationen (19) und (21) bestehen bleiben; es würde aber aus $[a_1 : b] = [a_2 : b]$ nicht mehr geschlossen werden können, dass $a_1 = a_2$, wie man sofort erkennt, wenn etwa $[a_1 : b] = 0$, und $a_2 = 2a_1$ wäre (vgl. die auf S. 12 Anm. aufgeführten Grössen).

Ganz ebenso beweist man, dass jede eigentlich obere Zahl (§ 9, No. 2; § 10; § 11, No. 3) des dritten Schnitts zugleich eine eigentlich obere Zahl ist für das Verhältniss $a : c$, und es lässt sich dann, ganz ebenso, wie das analoge Resultat im vorigen Paragraphen begründet wurde, zeigen, dass der dritte Schnitt identisch ist mit demjenigen, der dem Verhältniss $a : c$ zugeordnet ist. Dieses Ergebniss wird durch die Formel

$$[a : b] \cdot [b : c] = [a : c] \tag{21}$$

ausgedrückt; es besagt, dass man die Masszahl von a in Beziehung auf c als Einheit erhält, wenn man die auf die Einheit b bezogene Masszahl von a mit der auf die Einheit c bezogenen Masszahl von b multiplicirt.

Die Formel (21) erlaubt in der Form

$$[a : b] = \frac{[a : c]}{[b : c]}, \tag{22}$$

die Masszahl irgend einer Grösse a in Beziehung auf irgend eine als Einheit gewählte Grösse b zu berechnen, vorausgesetzt, dass man die Masszahlen beider Grössen für irgend eine andere Einheit c kennt.

Setzt man noch $c = a$, so ergiebt sich (vgl. den Schluss von § 10), dass $[a : b]$ und $[b : a]$ reciproke Zahlwerthe sind.

§ 14. Moderne Begründung der Lehre von den Grössenproportionen.

Durch die Ergebnisse der letzten Paragraphen, insbesondere die Gleichungen (19) und (22), wird die euklidische Proportionenlehre auf die Gesetze der Arithmetik zurückgeführt, wodurch eben die grössere Übersichtlichkeit der modernen Auffassung erreicht wird.

Als Beispiel mag der Lehrsatz in No. XII des 5. Buchs der Elemente gewählt werden. Dieser Satz besagt, dass, wenn die Grösse a sich zu b wie c zu d verhält, und dieses wie e zu f, dann auch $a + c + e$ sich zu $b + d + f$ verhält wie a zu b. Man hat hier als Voraussetzung die Gleichheit der Zahlen

$$[a : b], \quad [c : d], \quad [e : f]. \tag{23}$$

Nach (22) ist jede dieser Zahlen beziehungsweise gleich

$$\frac{[a : g]}{[b : g]}, \quad \frac{[c : g]}{[d : g]}, \quad \frac{[e : g]}{[f : g]}, \tag{24}$$

wobei g eine beliebige Grösse bedeutet. Wir können aber auf rein arithmetischem Weg beweisen, dass die drei einander gleichen Quotienten (24) von Zahlen gleich sind

$$(25) \qquad \frac{[a:g]+[c:g]+[e:g]}{[b:g]+[d:g]+[f:g]}.$$

Nach (19) ist dies gleich

$$\frac{[(a+c+e):g]}{[(b+d+f):g]},$$

d. h. (vgl. (22)) gleich

$$(26) \qquad [(a+c+e):(b+d+f)],$$

und es sind somit auch die mit (25) übereinstimmenden Zahlen (24) und (23) gleich (26), d. h. es ist

$$[(a+c+e):(b+d+f)] = [a:b],$$

w. z. b. w.

Der gegebene Beweis beruht darauf, dass mit Hilfe von (22) alle Masszahlen durch solche ausgedrückt werden, welche sich auf eine und dieselbe Einheit beziehen, und dass dann die Gleichungen (19) und (22) weiter benutzt werden. Vergleicht man damit den von EUKLID gegebenen Beweis, so beruht der Unterschied darin, dass EUKLID bei diesem, wie bei jedem anderen Beweis in der Proportionenlehre, auf seine Definition der Proportion zurückgreifen muss[1]; dies kommt auf dasselbe heraus, wie wenn wir in jedem Einzelfalle auf die Definition des Schnitts zurückgreifen würden.

---

1) EUKLID's Definition der Proportion (5. Buch der Elemente, 5. Definition) kann folgendermassen wiedergegeben werden: Man sagt, dass sich a gerade so zu b verhalte wie c zu d, wenn für jede ganze Zahl μ und für jede ganze Zahl ν das Vielfache μa von a im Vergleich zum Vielfachen νb von b kleiner, gleich oder grösser ist, je nachdem das entsprechende Vielfache $\mu a'$ von a' kleiner, gleich oder grösser ist als das entsprechende Vielfache $\nu b'$ von b'. Im Besitz des DEDEKIND'schen Schnittbegriffs kommt man leicht darauf, das Verhältniss $a:b$ zweier Grössen a und b dadurch als etwas Selbständiges aufzufassen, dass man diesem Verhältniss einen Schnitt zuordnet, und man erkennt dann sofort, dass die euklidische Definition der Proportion völlig gleichbedeutend ist mit der Erklärung: man sagt dann, dass sich a zu b so verhalte wie c zu d, wenn der dem Verhältniss $a:b$ zugeordnete Schnitt derselbe ist wie der dem Verhältniss $c:d$ zugeordnete. Diesen nahen Zusammenhang zwischen seinem Schnittbegriff und dem euklidischen Begriff der Proportion hat auch DEDEKIND selbst erkannt (vgl. „Was sind und was sollen die Zahlen?" 1888, Vorwort S. XIV).

§ 15. Existenz einer Grösse von vorgeschriebener Masszahl.

In Beziehung auf eine gegebene Grösse b und einen gegebenen Schnitt $\varkappa$ kann man die sämmtlichen Grössen folgendermassen in zwei Classen eintheilen. In die erste Classe soll jede Grösse x kommen, die zusammen mit einem passend gewählten unteren Bruch (§ 9, No. 2) $\frac{\mu}{\nu}$ des Schnittes $\varkappa$ der Ungleichung

$$\nu x < \mu b \tag{27}$$

genügt. In die zweite Classe komme jede andere Grösse, so dass also jede Grösse x' dieser Classe zusammen mit jedem unteren Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ des Schnittes $\varkappa$ die Relation

$$\nu x' \geqq \mu b \tag{28}$$

erfüllt.

Bedeuten x und x' jetzt zwei bestimmte Grössen der ersten, beziehungsweise zweiten Classe, so gilt die Ungleichung (27) für die bestimmte Grösse x und für zwei ganze Zahlen μ und ν, und es gilt die Relation (28) unter Anderem auch für eben diese Zahlen μ und ν und für die bestimmte Grösse x'. Man kann deshalb aus (27) und (28) folgern, dass $\nu x < \nu x'$, und somit nach § 3, No. 2 auch $x < x'$ ist. Es ist also jede Grösse der ersten Classe kleiner als jede der zweiten.

Um einzusehen, dass Grössen beider Classen existiren, wählen wir zuerst einen unteren Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ des Schnittes $\varkappa$ aus. Nach § 3, No. 3 kann man eine Grösse x so finden, dass $\nu x < \mu b$, und es gehört dann x in die erste Classe. Wählen wir nun einen oberen Bruch $\frac{\mu'}{\nu'}$ des Schnittes und dann eine Grösse x' so, dass $x' > \mu' b$ (vgl. § 2, N. 4), so ist auch

$$\nu' x' > \mu' b. \tag{29}$$

Wenn jetzt $\frac{\mu}{\nu}$ irgend einen unteren Bruch des Schnittes $\varkappa$ bedeutet, so ist (§ 9, No. 1 und No. 2) $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\mu'}{\nu'}$, d. h. $\mu\nu' < \nu\mu'$. Es ergiebt sich also aus (29), dass $(\mu\nu')x' > (\mu\mu')b$, und somit a fortiori (vgl. § 3, No. 2) $(\nu\mu')x' > (\mu\mu')b$, d. h. (wegen Gleichung (2)) $\mu'(\nu x') > \mu'(\mu b)$. Deshalb muss (§ 3, No. 2) $\nu x' > \mu b$ sein für jeden beliebigen unteren Bruch $\frac{\mu}{\nu}$, und es gehört also x' in die zweite Classe.

Vermöge des Axioms VII kann nunmehr auf die Existenz einer Grösse ξ geschlossen werden, welche so beschaffen ist, dass jedes ξ', das $< \xi$ ist, zur ersten, und jedes $\xi'' > \xi$ zur zweiten Classe gehört. Es muss noch gezeigt werden, dass dem Verhältniss $\xi : b$ der von Anfang an gegebene Schnitt $\varkappa$ zugeordnet ist.

Nun sei zuerst $\frac{\mu}{\nu}$ ein unterer Bruch des Schnittes $\varkappa$; es muss bewiesen werden, dass $\frac{\mu}{\nu}$ auch ein unterer Bruch ist in Beziehung auf das Verhältniss $\xi : b$, d. h. (§ 10), dass $\nu\xi > \mu b$ ist. Wir nehmen zu diesem Zweck an, es sei im Gegentheil

$$(30) \qquad \nu\xi \leq \mu b.$$

Nach der Eigenschaft der unteren Brüche (§ 9, No. 1 und 2) muss sich in dem Schnitte $\varkappa$ ein gleichfalls unterer Bruch $\frac{\mu'}{\nu'}$ so finden lassen, dass $\frac{\mu'}{\nu'} > \frac{\mu}{\nu}$, d. h. $\nu\mu' > \nu'\mu$ ist. Nun folgt aus (30), dass $(\nu'\nu)\xi \leqq (\nu'\mu)b$, und da (§ 3, No. 2) $(\nu'\mu)b < (\nu\mu')b$ ist, so muss auch $(\nu'\nu)\xi < (\nu\mu')b$, d. h. (Gleichung (2)) $\nu(\nu'\xi) < \nu(\mu'b)$ sein. Es ergiebt sich daher nach § 3, No. 2, dass $\nu'\xi < \mu'b$. Nach § 6, No. 2 kann man jetzt eine Grösse $\xi' > \xi$ so finden, dass die letzte Ungleichung noch bestehen bleibt, wenn in ihr ξ' für ξ gesetzt wird. Man hätte demnach $\nu'\xi' < \mu'b$. Da nun $\frac{\mu'}{\nu'}$ ein unterer Bruch des Schnittes $\varkappa$ war, so müsste nach der im Anfang dieses Paragraphen gegebenen Definition ξ' der ersten Classe angehören; dies widerspricht aber, da $\xi' > \xi$ angenommen war, den Eigenschaften der Grösse ξ.

Jetzt bedeute $\frac{\varrho}{\sigma}$ irgend einen, eigentlichen oder uneigentlichen, oberen Bruch des Schnittes $\varkappa$. Es ist zu beweisen, das $\frac{\varrho}{\sigma}$ auch für das Verhältniss $\xi : b$ ein oberer Bruch ist, d. h. dass $\sigma\xi \leqq \varrho b$. Angenommen, es wäre $\sigma\xi > \varrho b$, so könnte man $\xi'' < \xi$ und zugleich so wählen (§ 6, Nr. 2), dass $\sigma\xi'' > \varrho b$. Ist nun $\frac{\mu}{\nu}$ irgend ein unterer Bruch des Schnittes $\varkappa$, so ist $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\varrho}{\sigma}$, d. h. $\sigma\mu < \nu\varrho$, und es ergiebt sich $(\nu\sigma)\xi'' > (\nu\varrho)b > (\sigma\mu)b$, und hieraus $\nu\xi'' > \mu b$. Aus dieser Ungleichung, die, bei demselben ξ'', für alle unteren Brüche $\frac{\mu}{\nu}$ des gegebenen Schnittes $\varkappa$ gelten müsste, er-

giebt sich, dass (vergl. (28)) die Grösse ξ'' der zweiten von den oben definirten Classen angehören müsste. Da aber $\xi'' < \xi$ gewählt war, so widerspricht dieses Resultat den Eigenschaften der Grösse ξ.

Damit ist also der Satz bewiesen:

Es giebt eine Grösse ξ, deren Verhältniss zu einer irgendwie gegebenen Grösse b durch einen irgendwie gegebenen Schnitt $\varkappa$ dargestellt wird.

Dies kann auch so ausgedrückt werden:

Es giebt eine Grösse ξ, welche in Beziehung auf eine beliebig gegebene Einheit b eine beliebig gegebene Zahl $\varkappa$ zur Masszahl hat.

Die Grösse ξ wird durch die Einheit b und die Masszahl $\varkappa$ eindeutig bestimmt; wenn nämlich zwei Grössen ξ und η der Bedingung genügten, so hätte man mit Rücksicht auf die Bezeichnung von § 10 die Relation $[\xi : b] = \varkappa = [\eta : b]$, woraus sich nach § 12, Nr. 2 ergiebt, dass $\xi = \eta$ ist.

Wenn die Einheit festgehalten wird, so findet sich also zu jeder gegebenen Grösse eine Masszahl und zu jeder gegebenen Masszahl eine Grösse.[1]

§ 16. Multiplication der Grössen.

Ueber die betrachteten Grössen ist nichts vorausgesetzt worden, als dass die Axiome I bis VII bestehen, insbesondere, dass die Grössen verglichen und addirt werden können. Von einer Multiplication[2] der Grössen war nicht die Rede. Es kann aber

---

1) Hat man zwei Systeme von Grössen, deren jedes die Axiome I bis VII erfüllt, so kann man die Systeme eindeutig aufeinander beziehen, so dass dabei auch die Summen entsprechender Grössen einander entsprechen (solche Beziehungen sind von Bettazzi untersucht worden, m. vergl. d. Anm. auf S. 19).

Man hat zu diesem Zweck nur in jedem System eine Einheit zu wählen und solche Grössen einander zuzuordnen, denen dieselbe Masszahl zukommt.

2) Geometrische und physische Grössen, wie Strecken, Inhalte, Zeiten, Massen, Kräfte u. s. w. können zunächst auch nur addirt werden, und zwar ist die Addition nur für gleichartige Grössen möglich. Wenn man von einer Multiplication geometrischer oder physischer Grössen spricht, so beruht dies auf einem künstlichen Uebereinkommen.

In der vorliegenden Arbeit sind nur solche Axiome angenommen worden, die sich auf die Vergleichung und die Addition der Grössen

jetzt eine Operation definirt werden, die als Multiplication bezeichnet werden mag.

Man wähle eine Grösse b aus, welche im Folgenden festgehalten werden soll und als Einheit bezeichnet wird. Sind nun a und a' irgend zwei Grössen, so definire ich $a \cdot a'$ als diejenige Grösse x, für welche die Zahlengleichung

$$(31) \qquad [x : b] = [a : b][a' : b]$$

gilt. Nach § 15 (Schluss) wird vermöge dieser Festsetzung das Product $a \cdot a'$ der Grössen a und a' durch diese eindeutig bestimmt; die Bestimmung würde sich aber ändern, wenn wir b änderten.

Da für die Zahlen $[a : b]$, $[a' : b]$ das commutative Gesetz der Multiplication gilt, so folgt aus der Definitionsgleichung (31) unmittelbar, dass für die Grössen $aa' = a'a$ ist. Wollen wir ferner $(aa')a'' = x'$ bilden, so haben wir zuerst x gemäss der Gleichung (31) und dann x' mit Hilfe der Gleichung $[x' : b] = [x : b][a'' : b]$ zu bestimmen. Es kann also x' unmittelbar durch die Gleichung

$$[x' : b] = [a : b][a' : b][a'' : b]$$

gefunden werden. Man erkennt jetzt, dass auch

$$(aa')a'' = a(a'a''),$$

d. h. dass für die definirte Multiplication der Grössen das associative Gesetz besteht.

Die Grösse $a(a' + a'') = y$ bestimmt sich aus der Gleichung

$$[y : b] = [a : b][(a' + a'') : b].$$

Die rechte Seite ist nach Gleichung (19) gleich $[a : b]([a' : b] + [a'' : b])$, d. h., da für Zahlen die gewöhnlichen Rechnungsgesetze gelten, gleich $[a : b][a' : b] + [a : b][a'' : b]$. Die beiden Glieder der letzten Summe sind nach der Definitionsgleichung (31) des Products $[(aa') : b]$ und $[(aa'') : b]$ und geben nach Gleichung (19) zusammen $[(aa' + aa'') : b]$. Somit ist

$$[y : b] = [(aa' + aa'') : b],$$

---

beziehen. Diese Axiome reichen hin, um die euklidische Proportionentheorie und die moderne Theorie des Masses abzuleiten. Die Sätze, welche die Multiplication der Grössen betreffen, erscheinen hier eigentlich nur als Corollare zu einer dieser Theorien.

und daher nach § 12, Nr. 2 auch $y = aa' + aa''$, d. h. es ist für die drei beliebig gegebenen Grössen

$$(32) \qquad a(a' + a'') = aa' + aa''.$$

Wegen des commutativen Gesetzes der Multiplication ergiebt sich noch

$$(33) \qquad (a' + a'')a = a'a + a''a;$$

es bestehen also auch die beiden distributiven Gesetze.

Da die Einheit b willkürlich war, kann die hier angeführte Multiplication noch auf unendlich viele Arten näher bestimmt werden. Gründet man die Definition der Multiplication auf die Einheit b, führt aber daneben noch eine zweite Einheit c ein, so kann die Definitionsgleichung (31) in die Form (vergl. Gleichung (21))

$$[x : c][c : b] = [a : c][c : b] \cdot [a' : c][c : b],$$

also auch in die Form

$$[x : c] = [c : b] \cdot [a : c][a' : c]$$

gesetzt werden. Hier ist c willkürlich, und da auch b willkürlich war, ist $[c : b] = \varkappa$ eine willkürliche Zahl. Man kann also mit Hilfe einer beliebig gewählten Grösse c und einer beliebig gewählten Zahl $\varkappa$ durch die Gleichung

$$(34) \qquad [(aa') : c] = \varkappa \cdot [a : c][a' : c]$$

eine der in Rede stehenden Multiplicationen für alle Grössenpaare a, a' definiren.

§ 17. Die definirte Multiplication ist die einzige.

Ich nehme jetzt an, es sei irgendwoher eine Operation gegeben, die es ermöglicht, aus zwei Grössen a und a', wenn diese in einer bestimmten Ordnung gegeben sind, eine eindeutig bestimmte dritte Grösse $a \circ a'$ abzuleiten. Diese Operation soll auch als Multiplication bezeichnet werden, und es sollen für diese Multiplication zusammen mit der früheren Addition die beiden Distributivgesetze (32) und (33) bestehen, so dass also

$$(35) \qquad a \circ (a' + a'') = (a \circ a') + (a \circ a''),$$

$$(36) \qquad (a' + a'') \circ a = (a' \circ a) + (a'' \circ a).$$

Es lässt sich zeigen, dass diese neue Multiplication auch dem commutativen und associativen Gesetz genügen muss und nichts anderes ist als die auf eine passende Einheit gegründete Multiplication des vorigen Paragraphen.

1. Zunächst sollen aus dem ersten distributiven Gesetz (35) die Folgerungen entwickelt werden. Von zwei verschiedenen Grössen sei die kleinere a; es kann dann die grössere a' in der Form $a + a''$ dargestellt werden (Axiom V). Nun ergiebt sich aus (35) und IV, dass

$$b \circ a' = (b \circ a) + (b \circ a'') > b \circ a,$$

wobei b eine beliebige weitere Grösse bedeutet. Das neue Product wird somit durch Vergrösserung des zweiten Factors vergrössert.

Bildet man jetzt die aus ν Gliedern bestehenden Summe

$$(b \circ a) + (b \circ a) + (b \circ a) + \cdots\cdots,$$

indem man zum ersten Glied das zweite, zu der so erhaltenen Summe das dritte Glied u. s. f. addirt, so erhält man, indem man beständig die Formel (35) anwendet, $b \circ \nu a$; es ist also

$$\nu(b \circ a) = b \circ \nu a. \tag{37}$$

Es bedeute c eine beliebige Grösse, und $\frac{\mu}{\nu}$ einen unteren Bruch für $a : c$ (vergl. § 10), so dass also $\nu a > \mu c$. Nach dem vorhin Gefundenen ist nun auch $b \circ \nu a > b \circ \mu c$, und somit nach (37) $\nu(b \circ a) > \mu(b \circ c)$. Diese Relation besagt aber, dass $\frac{\mu}{\nu}$ ein unterer Bruch ist für $(b \circ a) : (b \circ c)$.

Man beweist ebenso, dass ein Bruch, der für $a : c$ ein oberer ist, es auch ist für $(b \circ a) : (b \circ c)$. Also ist der durch $a : c$ definirte Schnitt derselbe wie der durch $(b \circ a) : (b \circ c)$ definirte, was durch die Gleichung

$$[(b \circ a) : (b \circ c)] = [a : c] \tag{38}$$

ausgedrückt werden kann.

2. In ganz analoger Weise werden nun aus dem zweiten Distributivgesetz (36) die Folgerungen gezogen. Dabei ergiebt sich zuerst, dass das vorliegende Product durch Vergrösserung des ersten Factors vergrössert wird, und dann, dass die Gleichung

$$[(b \circ c) : (d \circ c)] = [b : d] \tag{39}$$

für drei beliebige Grössen b, c, d giltig ist.

3. Wir haben früher für die neue Multiplication die Geltung beider Distributivgesetze gefordert und erhalten daher aus den Gleichungen (38) und (39) zusammen

$$[(b \circ a) : (b \circ c)]\,[(b \circ c) : (d \circ c)] = [a : c]\,[b : d]$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (21) von § 13

$$[(b \circ a) : (d \circ c)] = [a : c]\,[b : d].$$

Setzt man noch $d = c$, so ergiebt sich

$$[(b \circ a) : (c \circ c)] = [a : c]\,[b : c].$$

Multiplicirt man hier beiderseits mit der Zahl $[(c \circ c) : c]$ und wendet zugleich wieder die Gleichung (21) an, so findet man

(40) $$[(b \circ a) : c] = \varkappa [b : c]\,[a : c],$$

wobei

$$\varkappa = [(c \circ c) : c]$$

eine nur von der Grösse c abhängige Zahl, also in Beziehung auf die Grössen a und b eine Constante ist. Es ist also die Masszahl von $b \circ a$ gleich dem Product der veränderlichen Masszahlen von b und von a in eine durch die Einheit gegebene Constante.

Die Gleichung (40) ergiebt noch, wenn sie zweimal angewendet wird

(41) $$[((a_1 \circ a_2) \circ a_3) : c] = \varkappa [(a_1 \circ a_2) : c]\,[a_3 : c] = \varkappa^2 [a_1 : c]\,[a_2 : c]\,[a_3 : c].$$

Nun lässt (40) erkennen, dass

(42) $$[(b \circ a) : c] = [(a \circ b) : c],$$

und (41), dass

(43) $$[((a_1 \circ a_2) \circ a_3) : c] = [(a_1 \circ (a_2 \circ a_3)) : c]$$

ist. Mit Rücksicht auf § 12, Nr. 2 hat (42) zur Folge, dass

$$(b \circ a) = (a \circ b)$$

ist, und (43), dass

$$(a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_2 \circ a_3),$$

d. h. es genügt die vorausgesetzte neue Multiplication dem commutativen und dem associativen Gesetz.[1])

---

1) Bis hierher sind in dem vorliegenden Paragraphen (vergl. die Anmerkungen am Anfang von § 10 und von § 3 und am Schluss von

Aus der Formel (40) und der Schlussformel von § 16 (Gleichung (34)) ergiebt sich, dass die neue Multiplication mit einer der in § 16 definirten Multiplicationen identisch sein muss.

Zweiter Theil.

Anwendung auf die Strecken in einer Geraden.

§ 18. Die für Punkte und Strecken einer Geraden zunächst zu fordernden Axiome.

Für die geometrischen Anwendungen sind wieder besondere Axiome zu formuliren. Wir betrachten die Punkte einer Geraden. Wenn zwei verschiedene Punkte in einer bestimmten Folge gegeben sind, so wollen wir sagen, dass eine „Strecke" vorliege. Wir fordern jetzt für die Punkte und Strecken einer Geraden die folgenden Axiome.[1])

---

§ 5) nur solche frühere Resultate benutzt worden, die sich aus den Axiomen I bis VI und dem archimedischen Axiom folgern lassen. Man kann also, wenn man die Axiome I bis VI, das archimedische Axiom und die beiden distributiven Gesetze (35) und (36) fordert, bereits auf die Giltigkeit des commutativen und associativen Gesetzes der Multiplication schliessen. In diesem Resultat ist ein specielleres Ergebniss von Hilbert enthalten (Grundlagen der Geometrie 1899, S. 72f.).

1) Hinsichtlich der Axiome, die sich auf die Anordnung der Punkte einer Geraden und auf die Gleichheit von Strecken einer Geraden beziehen, vergl. man Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882, S. 5 ff., Burkhardt, Göttinger Nachrichten, 1895, S. 2 und Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1899, S. 6, 7, 10, 11, 19. Von dem Hilbert'schen Axiomsystem, dem ich mich in einer anderen Veröffentlichung angeschlossen habe (Anschauung und Denken in der Geometrie 1900, S. 47 bis 53), unterscheidet sich das im Text in diesem Paragraphen aufgestellte hauptsächlich dadurch, dass nur Strecken der ersten Richtung hinsichtlich ihrer Gleichheit und Ungleichheit verglichen gedacht werden. Es fällt damit von selbst das Axiom weg, dass $AB = BA$ ist, welches Axiom auch später in § 21, wo Strecken der ersten und der zweiten Richtung mit einander verglichen werden, zunächst nicht angenommen wird. Damit steht im Zusammenhang, dass die Thatsache (ι) als besonderes Axiom aufgeführt werden musste. Der letzte Umstand wird in der Anm. am Anfang von § 20 genauer erörtert.

Es scheint mir durchaus nothwendig zu sein, dass für Punkte und Strecken einer Geraden besondere Axiome aufgestellt werden, auf Grund deren dann gezeigt werden kann, dass die Strecken einer Ge-

(α) Es giebt auf einer Geraden mindestens zwei verschiedene Punkte.

---

raden den Thatsachen entsprechen, die in § 1 bei der allgemeinen Betrachtung der Grössen gefordert worden sind. Veronese (a. a. O.) benutzt Streckenaxiome und Grössenaxiome neben einander; dadurch wird aber nicht die volle Klarheit über die gemachten Voraussetzungen erreicht. Als Beispiel mag ein einzelner Schluss hervorgehoben werden. Veronese (a. a. O. p. 620 unten) schliesst daraus, dass $A \subset X$ (vergl. die in (β) von mir eingeführte Bezeichnung), $A \subset Y$, $X' \subset A$, $Y' \subset A$, $AX = X'A$, $AY = Y'A$ ist, und daraus, dass X zwischen A und Y liegt, dass auch X' zwischen Y' und A gelegen sein muss. Der Gedanke ist dabei der, dass aus $A \subset X \subset Y$ folgt $AX < AY$, dass dann wegen der Gleichheit von AX und $X'A$ und von AY und $Y'A$ sich $X'A < Y'A$ ergiebt, und hieraus schliesslich gefolgert werden kann, dass X' zwischen Y' und A liegt. Diese Gedankenreihe hat man aber folgendermassen noch weiter zu zerlegen. Da $A \subset X \subset Y$ ist, so ist infolge einer geometrischen Definition (Veronese a. a. O. p. 620 oben Def. III) $AX + XY = AY$. Dieses Ergebniss wird nun unmittelbar mit dem Grössenaxiom in Verbindung gebracht, das besagt, dass $a + b > a$ ist, woraus sich $AX < AY$ ergiebt. Hieraus und aus weiteren Grössensätzen, sowie aus den ursprünglichen Annahmen schliesst man nun, dass $X'A < Y'A$. Aus diesem Resultat erkennt man zunächst, dass die Punkte X' und Y' nicht identisch sein können, und dann wiederum mit Hilfe der geometrischen Summendefinition und der Grössensätze, dass auch $X' \subset Y'$ unmöglich ist. Somit ist $X' \supset Y'$.

Benutzt man dagegen, wie es im Text geschehen ist, zunächst nur geometrische Grundbegriffe und zugleich nur solche Axiome, welche sich auf die Anordnung von Punkten und die Gleichheit von Strecken der ersten Richtung beziehen, so hat man die Begriffe „grösser" und „kleiner" für diese Strecken erst noch zu definiren. Zu diesem Zweck stehen zwei Wege offen. Der Ursprung des einen ist der, dass von zwei Strecken mit demselben Anfangspunkt diejenige für die kleinere erklärt wird, deren Endpunkt zwischen dem gemeinsamen Anfangspunkt und dem Endpunkt der anderen liegt; der Ursprung des zweiten der, dass von zwei Strecken mit demselben Endpunkt diejenige für die kleinere erklärt wird, deren Anfangspunkt zwischen dem Anfangspunkt der andern und dem gemeinsamen Endpunkt liegt. Im Text ist die erste Art der Definition von „kleiner" und „grösser" zu Grund gelegt. Auf diese Weise folgt aus $A \subset X \subset Y$ unmittelbar nach der Definition, dass $AX < AY$, aber es folgt nicht unmittelbar aus $X'A < Y'A$, dass $Y' \subset X' \subset A$ ist. Um dies wirklich zu beweisen, denke man sich einen Punkt $X'' \supset Y'$ und so, dass $Y'X'' = X'A$ ist; es muss dann, da $Y'X''$ kleiner als $Y'A$ ist (hier ist noch die nähere Ausführung des Textes in § 19 No. 1 und 2 zu vergleichen), $Y' \subset X'' \subset A$ sein. Wäre nun $X' \subset Y'$, so hätte man $X' \subset Y' \subset X'' \subset A$ und dabei $X'A = Y'X''$, was dem Axiom (ι)

(β) Die Strecken einer Geraden zerfallen in zwei Arten, derart, dass jede Strecke einer und nur einer Art angehört. Strecken von derselben Art heissen „von gleicher Richtung“, Strecken von verschiedener Art heissen „von entgegengesetzter Richtung“. Die Strecken AB und BA sind stets von entgegengesetzter Richtung. Die Strecken der einen Art seien als „Strecken erster Richtung“ ausgezeichnet, und es soll der Umstand, dass AB eine Strecke von der ersten Richtung ist, durch $A \subset B$ oder durch $B \supset A$ ausgedrückt werden.

(γ) Aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt stets, dass $A \subset C$ ist.

(δ) Wenn $A \subset C$ ist, so giebt es mindestens einen solchen Punkt B, dass $A \subset B$, und $B \subset C$. Wir sagen dann, dass der Punkt B „zwischen“ A und C, oder, dass er zwischen C und A gelegen sei.

(ε) Wenn $A \subset B$, und $A' \subset B'$, so kann man die Strecken AB und $A'B'$ vergleichen, so dass sie entweder gleich oder ungleich gefunden werden. Sind die Strecken gleich, so wird dies durch $AB = A'B'$ (oder durch $A'B' = AB$) ausgedrückt.

(ζ) Ist $A \subset B$, $A' \subset B'$, $A'' \subset B''$, so folgt aus $AB = A'B'$ und $A'B' = A''B''$ zusammen stets $AB = A''B''$.

(η) Wenn $A \subset B$, $B \subset C$, $A' \subset B'$, $B' \subset C'$ ist, so folgt aus $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$ zusammen stets $AC = A'C'$.

(ϑ) Ist $M \subset N$, und ist A ein beliebiger Punkt, so giebt es einen und nur einen Punkt B so, dass $A \subset B$, und $AB = MN$, und einen und nur einen Punkt C so, dass $C \subset A$, und $CA = MN$ ist.

(ι) Wenn $A \subset B \subset C \subset D$ ist, so ist niemals $AD = BC$.

($\varkappa$) Wenn alle Punkte der Geraden so in zwei Classen eingetheilt sind, dass Punkte beider Classen existiren, dass jeder Punkt einer und nur einer Classe angehört, und dass für jeden Punkt X der ersten und jeden Punkt Y der zweiten Classe $X \subset Y$ ist, so giebt es einen Punkt Z von der Art, dass jeder

---

widerspricht. Da auch X' mit Y' (nach (ϑ)) nicht zusammenfallen kann, so muss $Y' \subset X'$ sein, was zu beweisen war. Bei jener Darstellung wird also das Axiom (ι) in gewissem Sinn implicite benutzt. Dies hat Veronese übrigens selbst in einer späteren Veröffentlichung zugegeben (Atti d. R. Accad. d. Lincei, ser. 5., rendiconti, cl. d. sc. f., vol. 6, 1897, p. 163 unten). Das Axiom (ι) erinnert an Euklid's Axiom (Euclidis Elementa ed. Heiberg, 1. Bd., 1883, p. 11, VIII), welches besagt, dass das Ganze grösser ist als sein Theil.

Punkt $A \subset Z$ zur ersten, und jeder Punkt $B \supset Z$ zur zweiten Classe gehört.[1])

§ 19. Die Strecken erster Richtung als Grössen.

1. Die Strecken erster Richtung führen nun zu dem Begriff des Abstandes erster Richtung. Es ist eine Folge des Axioms (ζ), dass man sich die Strecken erster Richtung in der Weise in Kategorien eingetheilt denken kann, dass zwei gleiche Strecken stets in dieselbe Kategorie, zwei ungleiche Strecken niemals in dieselbe Kategorie kommen. Wir gebrauchen nun den Ausdruck, dass durch die sämmtlichen Strecken erster Richtung, die einer Kategorie angehören, ein „Abstand erster Richtung" und durch verschiedene Kategorien verschiedene Abstände dargestellt werden. Es muss jetzt mit Hilfe der aufgestellten Axiome (α) bis ($\varkappa$) gezeigt werden, dass diese Abstände erster Richtung Grössen im Sinne von § 1 sind, d. h. dass sie den Thatsachen I bis VII entsprechen. Zunächst kann man zwei Abstände erster Richtung vergleichen. Es seien MN und $M'N'$ zwei die gegebenen Abstände a und a' repräsentirende Strecken, und, da diese von der ersten Richtung sind, $M \subset N$, und $M' \subset N'$. Man wähle einen beliebigen Punkt A der betrachteten Geraden und bestimme (vergl. (ϑ)) den Punkt B so, dass $A \subset B$, und $AB = MN$, und B' so, dass $A \subset B'$, und $AB' = M'N'$ ist. Es wird nun einer und nur einer von drei

1) Dieses letzte Axiom ist das Stetigkeitsaxiom in geometrischer Form. Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872, § 3) hat zuerst bemerkt, dass das Wesen der Stetigkeit der geraden Linie in diesem Princip ausgedrückt werden kann. Dabei hat Dedekind freilich weniger Werth darauf gelegt, das genannte Axiom für die Geometrie zu postuliren, er hat vielmehr aus demselben nur den Anlass zu seiner Definition der irrationalen Zahlen genommen.

Zur Annahme der Axiome (α) bis ($\varkappa$) werden wir durch Erfahrungsthatsachen (oder durch die Anschauung) bestimmt. Wenn wir glauben, dass die Folgerungen aus diesen Axiomen nicht auf Widersprüche führen werden, so beruht dies zunächst jedenfalls darauf, dass wir diese Axiome, die allerdings durch die Erfahrung nicht exact bewiesen werden können, doch für den wahren und exacten Ausdruck gewisser thatsächlicher Verhältnisse halten. Die Frage nach der Widerspruchslosigkeit der hier aufgestellten geometrischen Axiome ist, wie man leicht sehen kann, gleichbedeutend mit der Frage nach der Widerspruchslosigkeit der Axiome I bis VII der allgemeinen Grössenlehre (m. vergl. S. 6 u. 7, Anm. und S. 21, 22, Anm.).

Fällen eintreten: entweder es fällt B' mit B zusammen, oder es ist BB' eine Strecke erster Richtung, oder es ist BB' eine Strecke zweiter, also nach (β) $B'B$ eine Strecke erster Richtung. Der erste Fall soll durch die Formel $B' \equiv B$ (oder $B \equiv B'$) ausgedrückt werden, im zweiten Fall ist $B' \supset B$, im dritten $B' \subset B$. Wenn der erste Fall eintritt, so ist AB mit AB' identisch, und es sind somit MN und $M'N'$ derselben Strecke gleich, also nach (ζ) einander gleich, wesshalb der gegebenen Erklärung zufolge auch die Abstände a und a' identisch sind. Tritt aber der zweite oder dritte Fall ein, so können wegen (ϑ) AB und AB' nicht derselben Strecke gleich sein, und es müssen deshalb auch MN und $M'N'$ ungleich sein, weil sonst ein Widerspruch mit (ζ) eintreten würde. Es sind also dann a und a' zwei verschiedene Abstände. Nun setzen wir noch fest, dass wir $a \lessgtr a'$ ($a' \gtrless a$) nennen wollen, je nachdem der zweite oder der dritte Fall eintritt, d. h. je nachdem $B \subsetsupset B'$ ausfällt.[1])

2. Es ist leicht, mit Hilfe der Axiome (ζ) und (ϑ) einzusehen, dass die Entscheidung darüber, welcher der genannten drei Fälle eintritt, nicht dadurch beeinflusst wird, welche Strecke MN man unter denjenigen aussucht, die den Abstand a repräsentiren und welche Strecke $M'N'$ unter denjenigen, die den Abstand a' repräsentiren. Wir müssen aber noch beweisen, dass die Entscheidung nicht beeinflusst wird von dem zu Hilfe genommenen Punkt A. Zu diesem Zweck denke man sich A_1 an Stelle von A gewählt, und es sollen dadurch B_1 und B_1' an Stelle von B und B' treten, so dass also $A_1 \subset B_1$, $A_1 \subset B_1'$, $A_1B_1 = MN$, und $A_1B_1' = M'N'$ ist. Nimmt man zunächst an, es sei $B \subset B'$, so wäre zu zeigen, dass auch $B_1 \subset B_1'$ ist. Nun werde (Axiom (ϑ)) ein Punkt B_1'' so angenommen, dass $B_1 \subset B_1''$, und $B_1B_1'' = BB'$. Es ist jetzt $A_1 \subset B_1 \subset B_1''$, und $A \subset B \subset B'$, und da A_1B_1 und AB beide gleich MN gemacht worden und somit auch einander gleich sind, und ausserdem $B_1B_1'' = BB'$ gemacht worden ist, so muss nach Axiom (η) auch $A_1B_1'' = AB'$ sein. AB' war gleich $M'N'$ gemacht worden; es ist also auch $A_1B_1'' = M'N'$,

---

1) Es werden also in der vorliegenden Darstellung bei den Abständen erster Richtung die Begriffe „grösser" und „kleiner" construirt (abgeleitet), während die Gleichheit bei den Strecken erster Richtung die Rolle eines ursprünglichen (axiomatischen) Begriffs spielte. Im Gegensatz dazu sind in der allgemeinen Lehre von den Grössen die Begriffe „grösser" und „kleiner" als ursprüngliche behandelt worden.

und da auch $A_1 B_1' = M'N'$ festgesetzt worden ist, so muss nach (ϑ) der Punkt B_1'' mit B_1' zusammenfallen. Nun war B_1'' so bestimmt, dass $B_1 \subset B_1''$; somit ist auch $B_1 \subset B_1'$, w. z. b. w. Nimmt man nunmehr an, es sei $B' \subset B$, so kann ganz auf dieselbe Weise bewiesen werden, dass auch $B_1' \subset B_1$ ist. Die Entscheidung, um die es sich handelt, ist also von der Wahl des Punktes A unabhängig, und es tritt, wenn zwei Abstände erster Richtung a und a' gegeben sind, von den drei Fällen $a \lesseqgtr a'$ immer einer und nur einer ein.

3. Um die beiden Abstände erster Richtung a und b in einer bestimmten Ordnung zu addiren, geht man von einem beliebigen Punkt A aus, wählt den Punkt B so, dass $A \subset B$ ist, und die Strecke AB den Abstand a darstellt, ferner C so, dass $B \subset C$ ist, und BC den Abstand b darstellt. Der durch AC repräsentirte Abstand ist als Summe $a + b$ aufzufassen. Aus Axiom (η) ergiebt sich unmittelbar, dass diese Summe von dem zu Hilfe genommenen Punkt A unabhängig ist. Es ist also der Abstand $a + b$ lediglich durch die Abstände a und b und durch die Folge, in der diese beiden Abstände gegeben sind, bestimmt. Mit Hilfe des in No. 2 Entwickelten erkennt man auch sofort, dass $a + b > a$ ist, d. h. dass der erste Theil des in § 1 aufgestellten Axioms IV erfüllt ist. Will man zu dem Abstand $a + b$ einen weiteren Abstand c addiren, so hat man nur noch einen Punkt D so zu bestimmen, dass $C \subset D$ ist, und CD den Abstand c darstellt. Es ist dann AD eine Strecke, welche den Abstand $(a + b) + c$ repräsentirt. Dieselbe Strecke AD repräsentirt aber, nach der eben gegebenen Erklärung der Summe, auch die Summe der durch AB und BD repräsentirten Abstände, d. h. der Abstände a und $b + c$. Somit ist allgemein $(a + b) + c = a + (b + c)$, d. h. es ist das Associativgesetz der Addition oder das Axiom VI von § 1 erfüllt. Sind a und a' zwei Abstände erster Richtung, und ist $a < a'$, so stelle man a und a' durch die Strecken AB und AB' dar, wobei, da die Strecken von der ersten Richtung sind, $A \subset B$, und $A \subset B'$ ist. Nach No. 1 und 2 muss $B \subset B'$ werden, und es ist, wenn BB' den Abstand x repräsentirt, $a + x = a'$; damit ist der erste Theil des Axioms V von § 1 bewiesen. Aus den Axiomen (δ) und ($\varkappa$) dieses Paragraphen ergiebt sich noch, dass die in § 1 aufgestellten Axiome II und VII im vorliegenden Fall erfüllt sind.

4. Wir haben jetzt für Abstände erster Richtung die in § 1 für Grössen geforderten Thatsachen bewiesen, mit der einzigen Ausnahme des zweiten Theils von IV und des zweiten Theils von V.[1] Hier haben wir nun das Axiom (ι) nöthig. Um den zweiten Theil von IV zu beweisen, denken wir uns die Abstände a, b und $a + b$ durch die Strecken AB, BC und AC dargestellt, wobei $A \subset B \subset C$. Es ist zu beweisen, dass der durch BC dargestellte Abstand kleiner ist als der durch AC dargestellte. Es werde D so angenommen, dass $A \subset D$, und $AD = BC$, was nach (ϑ) möglich ist; was wir zu beweisen haben, ist, dass $D \subset C$ wird. Nun ist $D \equiv C$ unmöglich, weil in diesem Falle $A \subset C$, $B \subset C$, und $AC = BC$ wäre, was dem zweiten Theil von (ϑ) widerspräche. Wäre aber $C \subset D$, so hätte man $A \subset B \subset C \subset D$ und zugleich die Relation $AD = BC$, was dem Axiom (ι) widerspricht. Somit muss $D \subset C$ sein. Um den zweiten Theil von V zu beweisen, repräsentiren wir die beiden Abstände b und c, von denen b der kleinere sein soll, durch AB und AC, wobei $A \subset B \subset C$ ist. Man nehme nun $D \subset C$ und zugleich so an, dass $DC = AB$. Wäre dabei $D \equiv A$, so hätte man einen Widerspruch mit dem ersten Theil von (ϑ). Wäre $D \subset A$, so hätte man $D \subset A \subset B \subset C$ und zugleich $DC = AB$, also einen Widerspruch mit (ι). Es muss also D so ausfallen, dass $A \subset D$. Man hat nun $A \subset D \subset C$ und somit auch $AD + DC = AC$, d. h., wenn man den durch AD repräsentirten Abstand mit y bezeichnet, $y + b = c$.

Damit sind nun die Thatsachen I bis VII vollständig erwiesen. Es können also alle die früher über Grössen angestellten Betrachtungen auf die Abstände erster Richtung über-

---

1) Es ist aber der zweite Theil von IV gleichwerthig mit dem ersten Theil von IV, und der zweite Theil von V gleichwerthig mit dem ersten Theil von V, wenn wir hier bei den Abständen erster Richtung von dem Commutativgesetz der Addition Gebrauch machen dürfen. Dieses Gesetz lässt sich, ohne dass man (ι) benutzt, beweisen, wenn man gleich auch die Strecken der zweiten Richtung herbeizieht, die Axiome (μ), (ν) und (o) von § 21, No. 1 hinzunimmt und ausserdem noch fordert, dass $AB = BA$ sein soll (vrgl. den Anfang und den Schluss der Anm. 2) von S. 44), wobei auch (ι) bewiesen werden kann. Die Axiome (ε) und (ζ) können nun, als in (μ) und (ν) enthalten, weggelassen werden. Es genügt also, die Axiome (α) bis (δ), (μ), (ν), (η), (o), (ϑ), ($\varkappa$) und das Axiom, dass $AB = BA$ ist, zu fordern, um die übliche Theorie der in einer Geraden enthaltenen Strecken herzuleiten.

tragen werden; insbesondere stehen zwei solche Abstände, und somit auch zwei Strecken erster Richtung, stets in einem gewissen Zahlverhältniss.[1])

§ 20. Die Strecken zweiter Richtung.

1. Damit die für Strecken erster Richtung bewiesenen Ergebnisse auf die Strecken zweiter Richtung (vrgl. (β)) übertragen werden können[2]), müssen noch einige Axiome hinzugefügt werden,

---

1) Es kann nun auch von den Strecken erster Richtung gesagt werden, dass von zwei gegebenen, die nicht einander gleich sind, eine bestimmte die kleinere ist. Man kann in einer Ungleichung zwischen zwei Strecken eine der Strecken durch eine ihr gleiche ersetzen, ohne dass die Ungleichung aufhört, zu bestehen (so folgt z. B. aus $AB < CD$ und $AB = A'B'$, dass $A'B' < CD$ ist); ebenso kann man in einem Streckenverhältniss eine der Strecken durch eine ihr gleiche ersetzen, ohne dass die Verhältnisszahl ihren Werth ändert. Alles das ist in den im Text gegebenen Entwicklungen mitenthalten, da wir die Begriffe „grösser“, „kleiner“, „Verhältnisszahl“ für Abstände definirt und im Begriff des Abstandes alle die Strecken, die einer besimmten gleich sind, zusammengefasst haben. Aus demselben Grund kann man auch z. B. in einer Gleichung $EF = AB + CD$, die eigentlich eine Gleichung zwischen Abständen bedeutet, eine der Strecken, AB, CD, EF durch eine ihr gleiche ersetzen.

2) Die Strecken der zweiten Richtung sind bis jetzt weder unter einander noch mit denen der ersten Richtung verglichen worden. Man könnte deshalb die Bedeutung dieser Strecken jetzt auch in der Weise festlegen, dass man einfach erklärte, es solle AB, wenn $A \supset B$ ist, nichts Anderes als die Strecke erster Richtung BA bedeuten; es wäre dann die Einführung der Strecken zweiter Richtung zunächst gar nichts als die Einführung einer Ausdrucksweise. Indem wir im Uebrigen nur die Axiome (α) bis (ϑ) fordern, ergeben sich mit Rücksicht auf die eingeführte Ausdrucksweise von selbst die Thatsachen (ε'), (ζ'), (η'), (ϑ'); ebenso erhält man die Thatsache (λ) und die im nächsten Paragraphen aufgestellten Axiome (μ), (ν), (ξ) und (π) als unmittelbare Folgerungen aus den gemachten Annahmen. Wir stellen dagegen eine besondere Forderung, wenn wir, was jetzt geschehen soll, verlangen, dass auch das Axiom (o) in § 21 mit Rücksicht auf die eingeführte Ausdrucksweise gelten soll. Es sei nun $A \subset B \subset C$, und man bestimme B' so, dass $A \subset B'$, und $AB' = BC$, und C' so, dass $B' \subset C'$, und $B'C' = AB$. Es ist dann $A \subset B \subset C$, $C' \supset B' \supset A$, und mit Rücksicht auf die eingeführte Ausdrucksweise $AB = C'B'$, und $BC = B'A$; also ist nach Axiom (o) auch $AC = C'A$, d. h. $AC = AC'$. Somit muss nach (ϑ) die Identität $C \equiv C'$ bestehen. Die Beziehung $C' \supset B' \supset A$ verwandelt sich jetzt in $C \supset B' \supset A$ oder $A \subset B' \subset C$, und da auch $A \subset B \subset C$ ist, so hat man mit Rücksicht auf

welche sich auf die Gleichheit von Strecken der zweiten Richtung beziehen und welche den Axiomen (ε), (ζ), (η), (ϑ) und (ι) völlig analog sind. Es sind die folgenden:

---

die Definition der Addition der Abstände erster Richtung sowohl $AC = AB' + B'C$, als auch $AC = AB + BC$. Es ergiebt sich also die Relation $AB' + B'C = AB + BC$. Nun war $AB' = BC$, und $B'C' = AB$, d. h. jetzt $B'C = AB$, wesshalb die gefundene Relation (vrgl. die Anm. am Schluss von § 19) in der Form $BC + AB = AB + BC$ geschrieben werden kann. Wir haben also hier das commutative Gesetz der Addition erhalten, ohne die Axiome (ι) und ($\varkappa$) zu benutzen.

Nun kann man auch die Thatsache (ι) beweisen. Es seien vier Punkte $A \subset B \subset C \subset D$ gegeben. Nach den für Abstände erster Richtung in § 19, No. 3 gegebenen Definitionen ist $AD = AB + BD = AB + (BC + CD)$. Mit Hilfe des im vorigen Paragraphen in No. 3 bereits bewiesenen associativen Gesetzes und des hier soeben bewiesenen commutativen Gesetzes ist also $AD = BC + (AB + CD)$, was, wiederum nach No. 3 des vorigen Paragraphen, grösser ist als BC, also nicht gleich BC sein kann. Damit ist (ι) bewiesen, und es ergiebt sich jetzt sofort auch (ι').

Nimmt man neben den festgestellten Axiomen noch das Axiom ($\varkappa$) ausdrücklich an, so sind nunmehr alle die im Text bis jetzt und im Folgenden aufgeführten geometrischen Axiome giltig.

Fordert man andererseits zunächst nur die sämmtlichen Axiome (α) bis ($\varkappa$), so kann man so wie im vorigen Paragraphen die Abstände erster Richtung definiren und zeigen, dass diesen Abständen die Grösseneigenschaften zukommen, wesshalb für ihre Addition nach § 5 auch das commutative Gesetz gilt. Führt man nun wieder die Auffassung ein, dass, falls $A \supset B$ ist, die Strecke AB nichts Anderes als die Strecke BA, die von erster Richtung ist, bedeuten soll, so ergeben sich mit Rücksicht auf diese Auffassungsweise nicht bloss von selbst die Thatsachen (ε') bis (ι'), (λ), (μ) bis (ξ) und (π), sondern es kann auch (o) bewiesen werden. Sind nämlich $A \subset B \subset C$ und $A' \supset B' \supset C'$ und zugleich so gegeben, dass $AB = A'B'$, und $BC = B'C'$, so ist auch $AB = B'A'$, und $BC = C'B'$. Mit Rücksicht auf die Definition der Summe zweier Abstände erster Richtung ist nun $AC = AB + BC = B'A' + C'B'$ (vrgl. d. Anm. 1) auf S. 44). Wegen des jetzt zur Verfügung stehenden Commutativgesetzes ist dies gleich $C'B' + B'A'$, und dies ist nach der erwähnten Summendefinition gleich $C'A'$. Es ergiebt sich also $AC = C'A'$, d. h., wegen der angenommenen Auffassung, $AC = A'C'$, womit (o) bewiesen ist. Nun sind die sämmtlichen im Text aufgeführten geometrischen Axiome erfüllt. Es sind aber jetzt nur die Axiome (α) bis ($\varkappa$) gefordert worden, woraus hervorgeht, dass die sämmtlichen im Text aufgeführten geometrischen Axiome nicht mit einander in Widerspruch gerathen können, wenn die Axiome (α) bis ($\varkappa$) widerspruchslos sind (vrgl. d. Anmerkungen auf S. 6 u. 7, S. 40 und S. 21 u. 22).

(ε') Wenn $A \supset B$, und $A' \supset B'$, so kann man die Strecken AB und $A'B'$ vergleichen, so dass sie entweder gleich oder ungleich gefunden werden.

(ζ') Ist $A \supset B$, $A' \supset B'$, $A'' \supset B''$, so folgt aus $AB = A'B'$ und $A'B' = A''B''$ zusammen stets $AB = A''B''$.

(η') Wenn $A \supset B$, $B \supset C$, $A' \supset B'$, $B' \supset C'$ ist, so folgt aus $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$ zusammen stets $AC = A'C'$.

(ϑ') Ist $M \supset N$, und ist A ein beliebiger Punkt, so giebt es einen und nur einen Punkt B so, dass $A \supset B$, und $AB = MN$, und einen und nur einen Punkt C so, dass $C \supset A$, und $CA = MN$ ist.

(ι') Wenn $A \supset B \supset C \supset D$ ist, so ist niemals $AD = BC$.

2. Man definirt nun die Abstände zweiter Richtung. Ein solcher Abstand wird durch die Gesammtheit der Strecken zweiter Richtung, die einer bestimmten solchen Strecke gleich sind, vorgestellt. Zwei Abstände zweiter Richtung a und a' können verglichen werden. Sind zwei verschiedene Abstände a und a'

Fasst man jetzt die Resultate der beiden in dieser Anm. durchgeführten Entwicklungen zusammen, so ergiebt sich, dass die gewöhnliche Theorie der in einer Geraden enthaltenen Strecken abgeleitet werden kann, wenn man die Auffassung einführt, dass, falls $A \supset B$ ist, die Strecke AB nichts Anderes als die Strecke BA, die von der ersten Richtung ist, bedeuten soll, und man zugleich entweder die Axiome (α) bis (ϑ), ($\varkappa$) und (o) oder die sämmtlichen Axiome (α) bis ($\varkappa$) fordert.

Statt die mehrfach erwähnte Auffassung anzunehmen, kann man aber auch, wie es im Text durchweg geschehen ist, die Strecken zweiter Richtung als besondere, von den Strecken erster Richtung zu unterscheidende Objecte ansehen, die aber mit jenen sollen verglichen werden können, so dass also das Axiom (μ) besteht. Zugleich möge wieder angenommen werden, dass immer AB gleich BA (wenn auch damit nicht identisch) ist. Um nun die im Vorhergehenden entwickelten Schlüsse zu wiederholen, muss man z. B. aus $AB = B'C'$ schliessen können, dass $AB = C'B'$ ist. Dieser Schluss beruht jetzt auf drei Umständen: einmal auf der vorausgesetzen Relation $AB = B'C'$, dann darauf, dass $B'C' = C'B'$ ist, und endlich auf dem Axiom (ν). Man wird also in diesem Fall von vornherein die Axiome (μ) und (ν) annehmen, zugleich mit dem Axiom, dass $AB = BA$ ist. Fordert man dazu noch entweder die Axiome (α) bis (δ) ((ε) und (ζ) können jetzt als in (μ) und (ν) enthalten weggelassen werden), (η), (ϑ), ($\varkappa$) und (o) oder die Axiome (α) bis (δ) und (η) bis ($\varkappa$), so kann man die gewöhnliche Theorie der in einer Geraden enthaltenen Strecken ableiten.

durch die Strecken MN und $M'N'$ repräsentirt, wobei $M \supset N$, und $M' \supset N'$, so wähle man einen beliebigen Punkt A der Geraden und bestimme B so, dass $A \supset B$, und $AB = MN$, und B' so, dass $A \supset B'$, und $AB' = M'N'$; es muss dann entweder $B \supset B'$, oder $B \subset B'$ ausfallen, und zwar hängt es nicht von der Wahl des Punktes A ab, ob das eine oder das andere geschieht. Je nachdem $B \lessgtr B'$ ausfällt, soll $a \lessgtr a'$ genannt werden. Die Addition der Abstände zweiter Richtung wird so definirt, dass für drei Punkte A, B, C, für die $A \supset B \supset C$, der Abstand AC gleich der Summe der durch AB und durch BC repräsentirten, in der genannten Ordnung genommenen Abstände ist. Es lassen sich nun alle die früher für Abstände erster Richtung gewonnenen Ergebnisse auf die Abstände zweiter Richtung übertragen; insbesondere stehen zwei Abstände zweiter Richtung, und somit auch zwei Strecken zweiter Richtung, stets in einem gewissen Zahlverhältniss.

3. Nun soll für die Strecken erster und zweiter Richtung zusammen noch folgendes Axiom gefordert werden:

(λ) Wenn $A \supset B$, und $A' \supset B'$, so sind die Strecken AB und $A'B'$ (zweiter Richtung) gleich oder ungleich, je nachdem die Strecken BA und $B'A'$ (erster Richtung) gleich oder ungleich sind.[1])

1) Es muss hervorgehoben werden, dass das Axiom (λ) keine Folge der vorangehenden Axiome (α) bis ($\varkappa$) und (ε') bis (ι') ist, und dies auch dann nicht ist, wenn die im nächsten Paragraphen aufgestellten Axiome (μ), (ν), (ξ), (o) gleich hinzugenommen werden. Um dies zu veranschaulichen, stelle man sich die Gerade, um die es sich handelt, von links nach rechts gezogen vor und jedem Punkt zwei Zahlen zugewiesen, die als „obere" und „untere" Zahl unterschieden werden sollen. Die sämmtlichen oberen Zahlen sollen die sämmtlichen positiven und negativen (endlichen) Zahlen mit Einschluss der Null vorstellen, und zwar sollen diese so auf die Punkte der Geraden vertheilt sein, dass beim Durchlaufen der Geraden von links nach rechts sich die Zahlen stets und immer in demselben Sinne ändern. Die sämmtlichen unteren Zahlen sollen gleichfalls die sämmtlichen reellen Zahlen in irgend einer anderen, übrigens derselben Bedingung genügenden Vertheilung vorstellen. Es soll nun $A \subset B$ bedeuten, dass A links von B liegt, und es sind mit der benutzten Anschauung die für Punkte geltenden Gesetze der Anordnung bereits postulirt. Wenn nun $A \subset B$ ist, so setzen wir fest, dass als Masszahl von AB der absolute Werth der algebraischen Differenz der zu A und B gehörenden oberen Zahlen angesehen werden soll, und als Masszahl von BA der absolute Werth der algebraischen Differenz der zu A und B gehörenden unteren Zahlen;

4. Zunächst beachte man, dass, wenn das Axiom (λ) zu den Axiomen (α) bis ($\varkappa$) hinzutritt, die Thatsachen (ε') bis (ι') bewiesen werden können, so dass diese nun aus der Reihe der Axiome weggelassen werden dürfen.[1]) Um dies für (ϑ') zu zeigen, denke man sich A und $M \supset N$ gegeben. Es ist nun $N \subset M$, und es folgt aus dem zweiten Theil von (ϑ), dass ein Punkt B so bestimmt werden kann, dass $B \subset A$, und $BA = NM$ ist. Nun ist $A \supset B$, und wegen (λ) auch $AB = MN$, wie es in (ϑ') gefordert wird. Existirte nun ein zweiter Punkt B' von denselben Eigenschaften wie B, so dass also $A \supset B'$, und $AB' = MN$ wäre, so würde sich $B' \subset A$, und aus (λ) $B'A = NM$ ergeben; es würde also B' denselben Bedingungen genügen, nach denen B zuerst bestimmt worden ist, und dies stünde mit (ϑ) in Widerspruch, wonach der betreffende Punkt nur auf eine Art bestimmt werden kann. Nun ist der erste Theil von (ϑ') bewiesen; der zweite wird gerade so gezeigt. Es mag noch ein Beispiel, der Beiweis von (η'), ausgeführt werden. Es ist vorausgesetzt, dass $A \supset B, B \supset C$, $A' \supset B'$, $B' \supset C'$, $AB = A'B'$, und $BC = B'C'$ ist. Nach (λ) muss auch $BA = B'A'$, und $CB = C'B'$ sein. Da nun die vier zuletzt genannten Strecken von der ersten Richtung sind, also $C \subset B \subset A$, und $C' \subset B' \subset A'$ ist, so ergiebt sich aus (η), dass $CA = C'A'$, und somit nach (λ) auch $AC = A'C'$ ist, w. z. b. w.

---

zwei Strecken von derselben oder von entgegengesetzter Richtung sollen als gleich, beziehungsweise ungleich angesehen werden, je nachdem ihre Masszahlen gleich, beziehungsweise ungleich sind. Eine einfache Ueberlegung lässt sofort erkennen, dass nun die Thatsachen (α) bis ($\varkappa$), (ε') bis (ι'), (μ) bis (o) in der soeben erklärten Bedeutung giltig sind. Dagegen braucht (λ) im vorliegenden Fall nicht zu bestehen; z. B. könnten die den Punkten $A \subset B \subset C$ zugeordneten oberen Zahlen sein 1, 2, 3, und die ihnen zugeordneten unteren Zahlen sein 2, 3, 5, in welchem Fall zwar $AB = BC$, aber nicht BA gleich CB sein würde. Es können also die Axiome (α) bis ($\varkappa$), (ε') bis (ι'), (μ) bis (o) bestehen, ohne dass (λ) erfüllt ist.

1) Man kann die Sache auch so auffassen, dass nur die Axiome (α) bis ($\varkappa$) gefordert werden, und dass (λ) lediglich die Erklärung dafür vorstellt, wann zwei Strecken zweiter Richtung als gleich angesehen werden sollen oder nicht. Bei dieser Auffassung wird die Gleichheit nur bei den Strecken erster Richtung als ein ursprünglich gegebener, nicht abgeleiteter (axiomatischer) Begriff angesehen, während bei den Strecken zweiter Richtung die Gleichheit durch Definition bestimmt, d. h. abgeleitet (construirt) wird.

5. Es wurde schon bemerkt, dass die Strecken der ersten Richtung unter einander, und die Strecken der zweiten Richtung unter einander in Zahlverhältnissen stehen. Mit Hilfe des Axioms (λ) kann nun noch folgender Satz gezeigt werden.

(44) Wenn $A \subset A_1$, und $A' \subset A'_1$, so sind die Verhältnisse $[AA_1 : A'A'_1]$ und $[A_1A : A'_1A']$ einander gleich.

Um dies zu beweisen, will ich zunächst den Hilfssatz nachweisen, dass, wenn $A \subset B$, und $A' \subset B'$ ist, aus $A'B' < AB$ folgt, dass $B'A' < BA$. Ist nämlich $A'B' < AB$, so giebt es nach der in § 19, No. 1 für Abstände erster Richtung gegebenen Definition von „grösser“ und „kleiner“ einen Punkt C so, dass $A \subset C \subset B$, und $AC = A'B'$ ist. Nimmt man nun $D \subset B$ und so an, dass $DB = AC$, was nach (ϑ) möglich ist, so zeigen die Betrachtungen von § 19, No. 4, dass $A \subset D \subset B$ wird. Da $DB = AC = A'B'$ ist, so ist nach (λ) auch $B'A' = BD$. Hieraus und aus $B \supset D \supset A$ folgt mit Rücksicht auf die für Abstände zweiter Richtung in No. 2 dieses Paragraphen gegebene Definition von „grösser“ und „kleiner“, dass die der Strecke BD gleiche Strecke $B'A'$ kleiner als BA sein muss, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Ist nun $A \subset A_1$, $A' \subset A'_1$, so bestimme man $A_2, A_3, \ldots A_n$ so, dass $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots . \subset A_n$, und $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots . = A_{n-1}A_n$ ist. Es ist dann nach (λ) auch $A_nA_{n-1} = \ldots = A_3A_2 = A_2A_1 = A_1A$. Wendet man jetzt die Definition, welche für die Addition von zwei Abständen erster Richtung (§ 19, No. 3) gegeben worden ist, $(n-1)$-mal nach einander an, so ergiebt sich, dass der Abstand erster Richtung AA_n gleich dem n-fachen des Abstands erster Richtung AA_1 ist. Ebenso ergiebt sich mit Hilfe der in diesem Paragraphen (No. 2) für die Abstände zweiter Richtung gegebenen Summendefinition, dass der Abstand zweiter Richtung A_nA gleich dem n-fachen des Abstandes zweiter Richtung A_1A ist. Bildet man in derselben Weise die Reihe $A' \subset A'_1 \subset A'_2 \subset A'_3 \subset \ldots .$ so, dass $A'A'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 \ldots$, so ist $A'A'_m$ gleich dem m-fachen von $A'A'_1$, und A'_mA' gleich dem m-fachen von A'_1A'. Nun ist nach (λ) und nach dem eben bewiesenen Hilfssatz $AA_n \lesseqgtr A'A'_m$, je nachdem $A_nA \lesseqgtr A'_mA'$ ist. Es ist also das n-fache von AA_1 kleiner, gleich oder grösser als das m-fache von $A'A'_1$, je nachdem das

n-fache von A_1A kleiner, gleich oder grösser ist als das m-fache von $A_1'A'$. Da dies für zwei beliebige ganze Zahlen m und n gilt, so folgt daraus (vrgl. § 10), dass der durch $[AA_1 : A'A_1']$ ausgedrückte Schnitt identisch ist mit dem durch $[A_1A : A_1'A']$ ausgedrückten Schnitt, w. z. b. w.

§ 21. Vergleichung von Strecken entgegengesetzter Richtung.

1. Wir haben bis jetzt Strecken der ersten Richtung unter einander und Strecken der zweiten Richtung unter einander verglichen. Wir konnten auch vermöge des Satzes (44) unter Umständen aus dem Verhältniss zweier Strecken der einen Richtung auf das Verhältniss zweier Strecken der andern Richtung schliessen; wir haben aber niemals von zwei Strecken von entgegengesetzter Richtung gesagt, dass sie einander gleich oder ungleich seien, oder von einem Verhältniss von zwei solchen Strecken gesprochen. Es soll jetzt angenommen werden, dass auch zwei Strecken von entgegengesetzter Richtung verglichen werden können, und dass die Axiome gelten:

(μ) Irgend zwei Strecken, mögen sie nun von derselben oder von entgegengesetzter Richtung sein, können verglichen werden, so dass sie in bestimmter Weise entweder gleich oder ungleich gefunden werden.

(ν) Zwei Strecken, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.

(ξ) Jede Strecke ist einer solchen von entgegengesetzter Richtung gleich.

(o) Wenn $A \subset B \subset C$, und $A' \supset B' \supset C'$, so folgt aus $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$ zusammen stets $AC = A'C'$.[1])

---

1) Dieses Axiom ist keine Folge der übrigen. Wir können die Sache folgendermassen auffassen. Es seien zunächst nur die Axiome (α) bis ($\varkappa$) angenommen. Nun kann man für die Strecken der zweiten Richtung, über deren Gleichheit und Ungleichheit noch gar nichts gesagt worden ist, die Gleichheit beziehungsweise Ungleichheit vermöge (λ) definiren, so dass also dieses Axiom, und mit ihm (vrgl. § 20, No. 4) auch (ε') bis (ι') giltig sind. Man kann dann die Strecken der ersten Richtung unter sich in Kategorien von gleichen Strecken und die Strecken der zweiten Richtung unter sich in ebensolche Kategorien eintheilen. Ordnet man jetzt die Kategorien der ersten Richtung denen der zweiten ein-eindeutig, aber sonst irgendwie zu und erklärt man Strecken von entgegengesetzter Richtung dann und nur dann für gleich, wenn sie zugeordneten Kategorien angehören, so bestehen auch die

2. Zunächst ist zu diesen Axiomen zu bemerken, dass nach ihrer Einführung die Axiome (ε), (ζ) und (η) weggelassen werden können, so dass jetzt nur die Axiome (α) bis (δ), (ϑ) bis ($\varkappa$) zusammen mit (λ) und mit (μ) bis (o) gefordert werden. Dass (ε) und (ζ) weggelassen werden können, ist unmittelbar ersichtlich, da diese Axiome in (μ) und (ν) mitenthalten sind. Für (η) kann man es folgendermassen beweisen. Man bedenke zuerst, dass (ϑ') unter den jetzt gemachten Voraussetzungen bewiesen werden kann (§ 20, Nr. 4). Nun sei $A \subset B \subset C$, $A' \subset B' \subset C'$, $AB = A'B'$, und $BC = B'C'$. Nach (ξ) kann man zwei Strecken zweiter Richtung MN und UV finden, die beziehungsweise AB und BC gleich sind. Nun wähle man A'' beliebig und bestimme B'' und C'' so, dass $A'' \supset B'' \supset C''$, $A''B'' = MN$, $B''C'' = UV$, was nach (ϑ') möglich ist. Wegen (ν) ist nun auch $A''B'' = AB$, und $B''C'' = BC$, wesshalb auf die Punkte $A'' \supset B'' \supset C''$ und $A \subset B \subset C$ das Axiom (o) angewendet werden darf. Es ergiebt sich $A''C'' = AC$. Nun findet sich vermöge

---

Axiome (μ), (ν) und (ξ). Dagegen besteht bei diesen Festsetzungen nicht immer das Axiom (o); es ist dies vielmehr nur dann der Fall, wenn die erwähnte Zuordnung auf eine besondere Art und Weise vorgenommen wird. Um das einzusehen, denke man sich z. B. $A \subset B \subset C$, $A' \supset B' \supset C'$, $AB = BC$ und $A'B' = B'C'$; es gehören dann AB und BC in dieselbe Kategorie der Strecken erster Richtung, und $A'B'$ und $B'C'$ in eine und dieselbe Kategorie der Strecken zweiter Richtung. Es hindert uns nun nichts, diese beiden Kategorien einander zuzuordnen, ohne zugleich diejenigen Kategorien einander zuzuordnen, denen einerseits die Strecke AC erster Richtung, andererseits die Strecke $A'C'$ zweiter Richtung angehört. Nun wird offenbar das Axiom (o) verletzt. Es können also — wofern überhaupt die ursprünglichen Axiome (α) bis ($\varkappa$) widerspruchslos sind — die sämmtlichen Axiome (α) bis ($\varkappa$), (ε') bis (ι'), (λ), (μ), (ν), (ξ) zusammen bestehen, ohne dass (o) erfüllt wäre.

Andererseits kann man, falls die Axiome (α) bis ($\varkappa$) bestehen, und falls die Gleichheit bei Strecken zweiter Richtung durch (λ) festgesetzt ist, die erwähnte Zuordnung der Kategorien erster und zweiter Richtung stets so herstellen, dass auch die Thatsache (o) besteht. Die Kategorien erster und zweiter Richtung stellen die Abstände erster und zweiter Richtung vor. Ordnen wir allgemein für $A \subset B$ dem durch AB dargestellten Abstand das α-fache des durch BA dargestellten Abstands zu, wo α eine von den Punkten A und B unabhängige positive Constante ist, die wir nach Belieben festsetzen können, so lässt sich leicht zeigen, dass auch die Bedingung (o) erfüllt ist. Dass dies die allgemeinste Zuordnung von der verlangten besonderen Eigenschaft ist, wird sich später (§ 21, No. 4) ergeben.

(ν) auch $A''B'' = A'B'$, und $B''C'' = B'C'$, und es ist also wiederum nach (o) $A''C'' = A'C'$, und somit $AC = A'C'$, w. z. b. w.

3. Es ist eine Folge des Axioms (ν), dass wir uns jetzt alle Strecken so in Abtheilungen gebracht denken können, dass zwei Strecken derselben Abtheilung stets gleich, und zwei Strecken verschiedener Abtheilungen niemals gleich sind. Wir wollen dabei den Ausdruck gebrauchen, dass durch die Gesammtheit der Strecken einer solchen Abtheilung eine „Länge" dargestellt werde. Nimmt man noch (ξ) hinzu, so ergiebt sich, dass die Gesammtheit der eine Länge darstellenden Strecken zerfällt in die Gesammtheit der Strecken, die einen Abstand erster Richtung, und in die Gesammtheit der Strecken, die einen Abstand zweiter Richtung darstellen (§ 19, Nr. 1; § 20, Nr. 2); die Abstände erster und zweiter Richtung erscheinen so gepaart, dass zu jedem Abstand der einen Richtung ein und nur ein Abstand der andern gehört, und dass zwei solche zugeordnete Abstände dieselbe Länge repräsentiren.

Sind jetzt k und l zwei Längen, a und b die sie repräsentirenden Abstände erster, a' und b' die sie repräsentirenden Abstände zweiter Richtung, so sind k und l identisch oder verschieden, je nachdem a und b identisch sind oder nicht, und je nachdem a' und b' identisch sind oder nicht. Sind aber k und l verschieden, so wollen wir $k \gtrless l$ nennen, je nachdem $a \gtrless b$ ist. Ebenso wollen wir unter der Summe $k + l$ die Länge verstehen, welche durch den Abstand erster Richtung $a + b$ dargestellt wird. Da wir aber die Begriffe „grösser" und „kleiner" und den Summenbegriff für Abstände erster und zweiter Richtung gesondert definirt haben, so ist es nun nicht selbstverständlich, dass die Länge $k + l$ auch durch den Abstand zweiter Richtung $a' + b'$ dargestellt wird, und dass, falls k von l verschieden ist, stets $k \gtrless l$ ist, je nachdem $a' \gtrless b'$. Es muss nun das Axiom (o) herbeigezogen werden. Um zunächst die erste Thatsache zu zeigen, nehme man, was nach (ϑ') möglich ist, $A' \supset B' \supset C'$ und so an, dass $A'B'$ den Abstand a', und $B'C'$ den Abstand b' darstellt, ferner (nach (ϑ)) $A \subset B \subset C$ und zugleich so, dass AB den Abstand a, und BC den Abstand b darstellt; es ist dann $a' + b'$ nach Definition (§ 20, Nr. 2) durch $A'C'$, und $a + b$ (§ 19, Nr. 3) durch AC dargestellt. Nun ist aber auch $AB = A'B'$, weil diese beiden Strecken von der

ersten und zweiten Richtung dieselbe Länge k repräsentiren, und ebenso ist $BC = B'C'$, und es ist somit nach (o) auch $AC = A'C'$. Es ist also die durch den Abstand $a + b$ repräsentirte Länge $k + l$ auch durch den Abstand $a' + b'$, der von der zweiten Richtung ist, dargestellt. Um die zweite Thatsache zu zeigen, bedenke man zuerst, dass sich Alles, was von den Abständen erster Richtung gesagt worden ist, auf die Längen überträgt. Ist nun $k > l$, so giebt es eine Länge p, so dass $k = l + p$, und es ist, falls der Abstand zweiter Richtung c' die Länge p darstellt, k auch durch $b' + c'$ vorgestellt; also ist $a' = b' + c'$, und somit $a' > b'$. Ebenso folgt aus $k < l$, dass $a' < b'$.

Aus dem für die Addition der Längen Bewiesenen ergiebt sich Analoges für die Vervielfachung. Sind μ und ν ganze Zahlen, so sind die Längen μk und νl durch die Abstände μa und νb von der ersten und durch die Abstände $\mu a'$ und $\nu b'$ von der zweiten Richtung repräsentirt. Es ergiebt sich aus dem Vorigen, dass $\mu k \gtreqless \nu l$ ist, je nachdem $\mu a \gtreqless \nu b$, und je nachdem $\mu a' \gtreqless \nu b'$. Somit ist das Verhältniss der Längen k und l dieselbe Zahl wie das Verhältniss der Abstände a und b von der ersten Richtung und das Verhältniss der Abstände a' und b' von der zweiten Richtung (§ 10), welches Resultat auch durch die Gleichung

$$(45) \qquad [k : l] \doteq [a : b] = [a' : b']$$

ausgedrückt werden kann.

4. Wir wollen nun allgemein die durch die Strecke AB dargestellte Länge durch $\operatorname{lng}(AB)$ ausdrücken, während wir, wie schon früher, als Ausdruck eines Abstands erster oder zweiter Richtung auch kurz eine den Abstand repräsentirende Strecke gebrauchen. Es sei jetzt $A \subset B$, und $C \subset D$. Nach (45) ist

$$[\operatorname{lng}(AB) : \operatorname{lng}(CD)] = [AB : CD],$$

und

$$[\operatorname{lng}(BA) : \operatorname{lng}(DC)] = [BA : DC],$$

in welchen Gleichungen die rechte und die linke Seite eine Zahl (§ 10) vorstellt. Nun ist aber vermöge der Relation (44) von § 20

$$[AB : CD] = [BA : DC],$$

wesshalb auch

(46) $$[\text{lng}(AB):\text{lng}(CD)] = [\text{lng}(BA):\text{lng}(DC)]$$

sein muss. Diese Gleichung gilt für vier Punkte A, B, C, D stets dann, wenn $A \subset B$, und $C \subset D$ ist. Da ferner für die Längen alle Grössengesetze gelten, so ergiebt sich durch zweimalige Anwendung der Formel (21) von § 13

(47) $$[\text{lng}(AB):\text{lng}(BA)]$$
$$= [\text{lng}(AB):\text{lng}(CD)][\text{lng}(CD):\text{lng}(DC)][\text{lng}(DC):\text{lng}(BA)].$$

Nach (46) ist das aber gleich

$$[\text{lng}(BA):\text{lng}(DC)][\text{lng}(CD):\text{lng}(DC)][\text{lng}(DC):\text{lng}(BA)],$$

und da hier das Product der ersten Klammer in die letzte nach § 13 (Schluss) gleich 1 ist, so verwandelt sich die Gleichung (47) in

$$[\text{lng}(AB):\text{lng}(BA)] = [\text{lng}(CD):\text{lng}(DC)].$$

Dieses Resultat kann folgendermassen ausgedrückt werden. Die Verhältnisszahl

$$[\text{lng}(AB):\text{lng}(BA)]$$

ist constant, wenn $A \subset B$, und im Uebrigen die Punkte A und B beliebig veränderlich gedacht werden. Wir setzen diese Constante gleich α. Es erscheint vielleicht noch natürlicher, sich dieses Ergebniss in der Formel

(48) $$\text{lng}(AB) = \alpha\, \text{lng}(BA)$$

dargestellt zu denken, welche Formel, die für $A \subset B$ gilt, aber gar nichts Anderes als den eben ausgedrückten Sachverhalt bedeuten soll.

5. Die Constante α kann irgend eine positive von Null verschiedene Zahl sein.[1]) Der Fall $\alpha = 1$ ist ein specieller.

---

1) Vergl. die Anm. auf S. 51. Die Relation (48) besteht auch für die Minkowski'schen „Strahldistanzen" (Geometrie der Zahlen, 1896, S. 1 ff.), ohne dass dabei $\alpha = 1$ zu sein braucht. Man kann von der Relation (48) auch eine ganz populäre Erläuterung geben. Man denke sich eine geradlinige, aber ansteigende Bahn. Durch $A \subset B$ soll ausgedrückt werden, dass von den Punkten A und B der Punkt A der tiefer liegende ist. Zwei auf der Bahn in derselben oder in entgegengesetzter Richtung zurückgelegte Wege sollen dann für gleich gelten, wenn sie von einem Fussgänger in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, wobei angenommen wird, dass der Fussgänger zwar gleichmässig geht, aber langsamer hinauf- als hinabsteigt. Es ist dann für $A \subset B$ stets $lng(AB) = \alpha\, lng(BA)$, wobei α constant und grösser als 1 ist.

Dieser specielle Fall ergiebt sich aber mit Nothwendigkeit, wenn noch das Axiom eingeführt wird:

(π) Falls $A \subset B$, und $C \supset D$, so folgt aus $AB = CD$ stets $BA = DC$.[1])

Dies kann folgendermassen bewiesen werden. Die Constante α ist durch die Gleichung

$$(49) \qquad [\operatorname{lng}(AB) : \operatorname{lng}(BA)] = \alpha$$

definirt, wo $A \subset B$. Nun seien zwei Punkte A' und B' so gewählt, dass $A' \subset B'$, und $A'B' = BA$, was nach Axiom (ξ) möglich ist. Es ist dann die Länge $\operatorname{lng}(A'B')$ mit $\operatorname{lng}(BA)$ identisch und kann in (49) für die letzte Grösse gesetzt werden. Auf diese Weise ergiebt sich

$$(50) \qquad [\operatorname{lng}(AB) : \operatorname{lng}(A'B')] = \alpha.$$

Hier ist $A \subset B$, und $A' \subset B'$, wesshalb die linke Seite von (50) gemäss der Formel (46) umgewandelt werden darf. Man erhält

$$(51) \qquad [\operatorname{lng}(BA) : \operatorname{lng}(B'A')] = \alpha.$$

Nun war $A'B' = BA$ gemacht, und es folgt daraus wegen des Axioms (π), dass auch $B'A' = AB$ ist. Wir dürfen also in (51) für $\operatorname{lng}(B'A')$ die identische Länge $\operatorname{lng}(AB)$ einsetzen, wodurch wir

$$(52) \qquad [\operatorname{lng}(BA) : \operatorname{lng}(AB)] = \alpha$$

---

1) Aus dem Axiom (π), welches schon in seiner Formulirung (β) und (μ) voraussetzt, kann man (λ) ableiten, wenn man noch (ν) und (ξ) hinzunimmt. Ist nämlich $A \subset B$, $A' \subset B'$, und $AB = A'B'$, so kann man nach (ξ) die Strecke CD so wählen, dass $CD = AB$, und CD und AB entgegengesetzt gerichtet sind. Es ist dann (vergl. (β)) $C \supset D$, und nach (ν) auch $CD = A'B'$. Nun kann man das Axiom (π) sowohl auf die Strecken AB und CD als auf die Strecken $A'B'$ und CD anwenden, woraus sich ergiebt, dass sowohl $BA = DC$, als $B'A' = DC$ sein muss. Es ist also nach (ν) auch $BA = B'A'$, womit (λ) bewiesen ist.

Es wurde auf S. 47 Anm. gezeigt, dass die Axiome (α) bis ($\varkappa$), (ε') bis (ι'), (μ) bis (o) bestehen können, ohne dass (λ) erfüllt ist; es können also jene Axiome auch bestehen, ohne dass (π) erfüllt ist. Veronese setzt von Anfang an die Thatsachen (λ) und (π) voraus, die nach seiner Ansicht ein „Axiom der Logik“ darstellen sollen (a. a. O. p. 623 Anm. (1), p. 622 a) u. Anm. (2)), und kommt dadurch zum Beweis der Relation $AB = BA$.

erhalten. Wenn wir jetzt (49) und (52) multipliciren und dabei die Gleichung (21) von § 13 bedenken, so ergiebt sich

$$1 = \alpha^2.$$

α ist eine positive Zahl, somit ist $\alpha = 1$. Die Gleichung (48) geht also, wenn das Axiom (π) hinzugenommen wird, in

$$AB = BA$$

über. Nun liegt die gewöhnliche Theorie der in einer Geraden enthaltenen Strecken vor.

§ 22. Ergebnisse für absolute Strecken beider Richtungen.

1. Die sämmtlichen hier aufgestellten geometrischen Axiome sind die Axiome (α) bis ($\varkappa$), (ε') bis (ι'), (λ), (μ) bis (o) und (π). Die Axiome (ε') bis (ι') lassen sich aus (α) bis ($\varkappa$) und (λ) herleiten (Vergl. § 20, Nr. 4) und können deshalb weggelassen werden. Von den nun noch übrigen Axiomen sind (ε) und (ζ) in (μ) und (ν) enthalten, und es ist (η) aus den andern ableitbar, bei welcher Ableitung, wie gleich hier hervorgehoben werden möge, (π) nicht benutzt wird (§ 21, Nr. 2). Es können also auch (ε), (ζ) und (η) weggelassen werden. Von den Axiomen, die jetzt noch übrig sind, lässt sich (λ) aus (β), (μ) bis (ξ) und (π) beweisen (vergl. S. 55 Anm.). Es kann also die gewöhnliche Theorie der in einer Geraden enthaltenen (absoluten) Strecken auf die Axiome (α) bis (δ), (μ) bis (o), (ϑ) bis ($\varkappa$) und (π) gegründet werden. Man kann jedoch die Theorie, wenn man als Axiom annehmen will, dass $AB = BA$ ist, einfacher aus den Axiomen (α) bis (δ), (μ), (ν), (o), (η), (ϑ), ($\varkappa$) und aus $AB = BA$ oder aus den Axiomen (α) bis (δ), (μ), (ν), (η) bis ($\varkappa$) und $AB = BA$ entwickeln (m. vergl. die Anmerkungen auf S. 43, 44, 2 u. 46).

2. Aus den Axiomen (α) bis ($\varkappa$) allein lässt sich die Theorie der Strecken erster Richtung ableiten (§ 19). Nimmt man dazu noch das Axiom (λ), so erhält man auch die Theorie der Strecken zweiter Richtung und ausserdem eine Beziehung zwischen den Strecken beider Richtungen, die darin besteht, dass das Verhältniss zweier Strecken erster Richtung dasselbe ist wie das Verhältniss der beiden Strecken zweiter Richtung, die aus jenen entstehen, indem man den Anfangspunkt mit dem Endpunkt vertauscht (§ 20).

3. Aus den Axiomen (α) bis (δ), (μ) bis (o), (ϑ) bis ($\varkappa$) und (λ) ergiebt sich, ohne das Axiom (π), eine Theorie, in der auch Strecken von entgegengesetzter Richtung ein (absolutes) Verhältniss haben, ohne dass dabei $AB = BA$ zu sein brauchte. Es ist vielmehr nur das Längenverhältniss

$$[\mathrm{lng}(AB) : \mathrm{lng}(BA)] = \alpha$$

constant, wenn $A \subset B$ bleibt, und in Folge dessen natürlich

$$[\mathrm{lng}(AB) : \mathrm{lng}(BA)] = \frac{1}{\alpha},$$

wenn $A \supset B$. Hier kann α irgend eine positive, constante Zahl sein (vergl. § 21, insbesondere die Anm. auf S. 51 und S. 54).

§ 23. Abscissen.

1. Die Zahlen, welche bis jetzt zur Anwendung gekommen sind, waren sämmtlich positiv und von Null verschieden. Führt man jetzt noch die Null und die negativen Zahlen ein, so kann man die Gesammtheit aller Zahlen auf die Gesammtheit der Punkte der Geraden in der bekannten Weise beziehen. Es ergiebt sich:

Man kann jedem Punkt A der Geraden eine Zahl (Abscisse) x_A zuordnen, in der Weise, dass[1]) auch jede Zahl einem und nur einem Punkt zugeordnet ist, dass ferner für zwei gleichgerichtete Strecken AB und CD die Differenzen $x_A - x_B$ und $x_C - x_D$ dasselbe Vorzeichen haben, und, falls die beiden Strecken überdies gleich sind, die Relation

$$x_A - x_B = x_C - x_D \tag{53}$$

besteht. Wählt man die beiden Punkte N und E, denen die Zahlen 0 und 1 beziehungsweise zugeordnet werden sollen, nach Belieben aus, so kann die Zuordnung immer den Bedingungen gemäss und zwar nur auf eine Weise hergestellt werden. Aendert man die beiden Grundpunkte N und E in N' und E' und bezeichnet man mit x die Zahl, die bei der ersten Annahme der Grundpunkte dem Punkt A zugeordnet ist, und mit x' die Zahl, die bei der andern Annahme der Grundpunkte demselben Punkt A zugeordnet ist, so besteht zwischen x und x' die Relation $x = \alpha x' + \beta$, wo die Zahlen α und β von der Lage des Punktes A unabhängig sind.

1) Diese Thatsache ist auch schon als Axiom aufgefasst worden; vrgl. G. Cantor, Mathematische Annalen, Bd. 5, S. 128 und F. Klein, Zur ersten Vertheilung des Lobatschewsky-Preises, 1897, S. 18.

2. Um die genannten Thatsachen zu beweisen, hat man das in der analytischen Geometrie übliche Verfahren anzuwenden, das mit Hilfe der früheren Entwickelungen einen wirklichen Beweis ergiebt. Dabei hat man nur solche Strecken mit einander zu vergleichen nöthig, welche dieselbe Richtung haben, wesshalb nur die Axiome (α) bis ($\varkappa$) und (λ) gefordert zu werden brauchen, aus denen dann (vergl. § 20, No. 4) noch die Thatsachen (ε') bis (ι') folgen. Es seien N und E zwei beliebige Punkte, denen wir beziehungsweise die Zahlen 0 und 1 zuordnen wollen. Die einem anderen Punkt A zuzuordnende Zahl x_A möge nun so definirt werden: es sei

$$x_A = + [NA : NE], \tag{54}$$

wenn NA mit NE gleichgerichtet ist, dagegen

$$x_A = - [AN : NE], \tag{55}$$

wenn NA und NE entgegengesetzte Richtung haben. In den Formeln (54) und (55) sind nur Strecken von der Richtung von NE benutzt worden. Da die Abstände von dieser Richtung Grösseneigenschaften haben (§ 19 und § 20, No. 2), und insbesondere für sie das Resultat von § 15 gilt, da ferner A so bestimmt werden kann, dass die Strecke NA von der Richtung von NE ist und einen gegebenen Abstand dieser Richtung vorstellt (vergl. (ϑ) und (ϑ')) und auch so, dass AN von der genannten Richtung ist und einen gegebenen Abstand derselben Richtung vorstellt, so entsprechen die Lagen von A auf der Seite von N, auf der E liegt, und die positiven Werthe der Zahl x_A sich ein-eindeutig, und ebenso die Lagen von A auf der andern Seite von N und die negativen Werthe von x_A.

Nunmehr sollen noch „Streckenzahlen" definirt werden. Die zur Strecke AB gehörende Streckenzahl sei $+ [AB : NE]$, wenn AB mit NE gleichgerichtet ist, und $- [BA : NE]$, wenn AB und NE von entgegengesetzter Richtung sind. Es sind also die Streckenzahlen für Strecken derselben Richtung von gleichem und für zwei Strecken entgegengesetzter Richtung von entgegengesetztem Vorzeichen. Für zwei gleiche und mit NE gleichgerichtete Strecken AB und $A'B'$ sind die Streckenzahlen $[AB : NE]$ und $[A'B' : NE]$ und somit einander gleich (vergl. die Anm. 1) auf S. 44); für zwei gleiche Strecken AB und $A'B'$ von der andern Richtung sind die Streckenzahlen

$-[BA:NE]$ und $-[B'A':NE]$ und somit wegen (λ) auch einander gleich. Gleichgerichtete und gleiche Strecken haben also stets gleiche Streckenzahlen. Die Strecken AB und BA haben, wenn AB der Strecke NE gleichgerichtet ist, die Streckenzahlen $+[AB:NE]$ und $-[AB:NE]$, im andern Fall die Streckenzahlen $-[BA:NE]$ und $+[BA:NE]$; es sind also die Streckenzahlen von AB und BA stets numerisch gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen. Sind ferner AB und CD irgend zwei gleichgerichtete Strecken, so ist das Verhältniss ihrer Streckenzahlen entweder $[AB:NE]:[CD:NE]$ oder $-[BA:NE]:(-[DC:NE])$. Dieses Verhältniss ist im ersten Fall nach § 13 gleich $[AB:CD]$, im zweiten Fall, auch nach § 13, gleich $[BA:DC]$, also nach (44) auch in diesem Fall gleich $[AB:CD]$. Somit ist das Verhältniss der Streckenzahlen zweier gleichgerichteten Strecken stets gleich dem Verhältniss der Strecken selbst und daher von der Wahl der Grundpunkte unabhängig. Die zur Strecke AB gehörende Streckenzahl möge mit sz (AB) bezeichnet werden. Es ist dann allgemein (s. o.)

$$\text{(56)} \qquad \mathrm{sz}\,(AB) = -\,\mathrm{sz}\,(BA).$$

Ferner ist nach den obigen Definitionen

$$x_A = [NA:NE] = \mathrm{sz}\,(NA),$$

falls NA mit NE gleichgerichtet ist, und

$$x_A = -[AN:NE] = \mathrm{sz}\,(NA),$$

falls NA die zu NE entgegengesetzte Richtung hat. Jedenfalls ist also, wenn A von N verschieden ist,

$$\text{(57)} \qquad x_A = \mathrm{sz}\,(NA).$$

Sind nun A, B, C drei verschiedene Punkte und so gelegen, dass AB, und BC, und somit (vergl. das Axiom (γ)) auch AC mit NE gleichgerichtet ist, so ist nach der Definition der Summen gleichgerichteter Abstände (§ 19, No. 3 und § 20, No. 2)

$$AC = AB + BC.$$

Da ferner für diese Abstände, die mit NE gleichgerichtet sind, die Grössenaxiome gelten, und somit auch die Formel (19) von § 12 gelten muss, so ist auch

$$[AC:NE] - [AB:NE] - [BC:NE] = 0.$$

Es ist also vermöge der Definition der Streckenzahlen

(58) $$\mathrm{sz}(AC) - \mathrm{sz}(AB) - \mathrm{sz}(BC) = 0.$$

Vertauscht man nun in dieser Formel zwei der Buchstaben A, B, C, so geht die linke Seite, unter der Annahme, dass sowohl A, als B, als C nach der Vertauschung denselben Punkt wie vorher vorzustellen fortfährt, in ihr Entgegengesetztes über (vergl. (56)). Die durch eine solche Vertauschung entstandene neue Formel muss also richtig sein. Da nun aus einer Folge von drei Buchstaben durch eine oder durch zwei Vertauschungen von je zweien der Buchstaben jede andere Anordnung (Permutation) der Buchstaben erhalten werden kann, so muss auch die Gleichung

$$\mathrm{sz}(A'C') - \mathrm{sz}(A'B') - \mathrm{sz}(B'C') = 0$$

gelten, wenn die Buchstaben A', B', C' die vorhin mit A, B, C bezeichneten Punkte in irgend einer neuen Ordnung vorstellen. Nun kann man es aber so einrichten, dass A', B' und C' irgend drei verschiedene Punkte sind; denn man kann auf irgend drei verschiedene Punkte A', B', C' die Bezeichnungen A, B, C so vertheilen, dass nachher AB und BC mit NE gleichgerichtet sind (vergl. (β)).[1] Es gilt also die Gleichung (58) ganz allgemein für irgend drei verschiedene Punkte, die in irgend einer Ordnung mit A, B, C bezeichnet werden. Bedeutet jetzt C den Punkt N, so geht die Gleichung (58) in

$$\begin{aligned} \mathrm{sz}(AB) &= \mathrm{sz}(AN) - \mathrm{sz}(BN) \\ &= \mathrm{sz}(NB) - \mathrm{sz}(NA) \end{aligned}$$

über, d. h. es gilt (nach (57)) stets die Formel

(59) $$\mathrm{sz}(AB) = x_B - x_A.$$

---

1) Streng genommen, muss auch dieses unmittelbar aus den Axiomen heraus, ohne sonstige Benutzung der Anschauung, bewiesen werden. Denkt man sich die drei Strecken (Elementencombinationen) $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, so müssen unter diesen, da es nur zwei Richtungen (Arten) von Strecken giebt, jedenfalls zwei gleichgerichtete sein. Sind nun z. B. $C'A'$ und $A'B'$ gleichgerichtet, so hat man entweder C', A', B' beziehungsweise mit A, B, C oder mit C, B, A zu identificiren, je nachdem $C'A'$ mit NE gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet ist; tritt einer der beiden anderen möglichen Fälle ein, so kann man entsprechend verfahren.

Hier waren A und B zunächst als von N verschieden angenommen[1]); man erkennt aber aus (57) unmittelbar, dass die Formel (59) auch dann bestehen bleibt, wenn A oder B mit N zusammenfällt.

Es ist nun ersichtlich, dass $x_A - x_B$ und $x_C - x_D$ dasselbe Vorzeichen haben, wenn AB und CD gleichgerichtete Strecken sind, und dass, falls ausserdem $AB = CD$ ist, auch die Gleichung (53) besteht. Jetzt seien das eine Mal die Grundpunkte N und E, das andere Mal die Grundpunkte N' und E' gewählt, und es sollen die den Punkten zugeordneten Zahlen das eine Mal mit x, das andere Mal mit x' bezeichnet werden. Zuerst sei NA mit NE gleichgerichtet. Nun stellen die Brüche

$$(60) \qquad \frac{x_A - x_N}{x_E - x_N}, \quad \frac{x'_A - x'_N}{x'_E - x'_N}$$

für die erste, beziehungsweise zweite Wahl der Grundpunkte das Verhältniss der Streckenzahlen sz(NA) und sz(NE) vor. Es sind also diese Brüche beide gleich dem Abstandsverhältniss $[NA : NE]$ und somit einander gleich. Nunmehr seien NA und NE entgegengesetzt gerichtet. Es stellt von den Brüchen

$$\frac{x_N - x_A}{x_E - x_N}, \quad \frac{x'_N - x'_A}{x'_E - x'_N}$$

je nach der Wahl der Grundpunkte der eine oder der andere das Verhältniss der Streckenzahlen sz(AN) und sz(NE) vor. Es sind also beide Brüche gleich dem Abstandsverhältniss $[AN : NE]$ und deshalb einander gleich. Somit sind die Brüche (60) stets einander gleich, welches auch die Lage von A sein mag; dieser Punkt war zunächst von N verschieden gedacht, man erkennt aber unmittelbar, dass das Endergebniss richtig bleibt, wenn A mit N zusammenfällt. Bedenkt man noch, dass $x_N = 0$, und $x_E = 1$ ist, so findet man die Formel:

$$x_A = \frac{1}{x'_E - x'_N} x'_A - \frac{x'_N}{x'_E - x'_N},$$

d. h. es ist

$$x_A = \alpha x'_A + \beta,$$

---

1) Da Strecken mit zusammenfallenden Endpunkten nicht zugelassen worden sind.

wo die Zahlen α und β von der Lage von A unabhängig sind, w. z. b. w.

3. Um nun zu zeigen, dass jede den obigen Bedingungen entsprechende Vertheilung der Zahlen auf die Punkte der Geraden aus dem geschilderten Verfahren bei passender Wahl der Punkte N und E hervorgeht, denke man sich einmal irgend eine den Bedingungen entsprechende Vertheilung. Sind AB und CD gleichgerichtete Strecken, so sind nach unseren Annahmen $x_A - x_B$ und $x_C - x_D$ von Null verschieden und haben dasselbe Vorzeichen, und wenn überdies $AB = CD$ ist, so gilt auch die Gleichung (53). Wir erklären nunmehr die zu einer Strecke AB gehörende Streckenzahl von vornherein durch den Ausdruck $x_B - x_A$. Es zeigt sich dabei, dass die Streckenzahlen gleichgerichteter Strecken gleiches Vorzeichen haben, und dass für irgend zwei verschiedene Punkte A und B die Streckenzahlen sz(AB) und sz(BA) numerisch gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Da ferner wegen der Gleichung (53) zu gleich gerichteten und gleichen Strecken dieselbe Streckenzahl gehört, so gehört auch zu jedem Abstand eine eindeutig bestimmte Streckenzahl. Liegt nun B zwischen A und C, so dass (vergl. die Axiome (β), (γ) und (δ)) entweder $A \subset B \subset C$, oder $C \subset B \subset A$ ist, so sind die drei Strecken AB, BC, AC gleichgerichtet, und es haben desshalb die drei Streckenzahlen $x_B - x_A$, $x_C - x_B$, $x_C - x_A$ dasselbe Vorzeichen. Für die durch die drei Strecken vorgestellten Abstände, welche von einer Richtung sind, gilt nach der früher für die Summe zweier Abstände gegebenen Definition (§ 19, Nr. 3 und § 20, Nr. 2) die Relation

$$AC = AB + BC.$$

Es ist aber die Relation

$$x_C - x_A = (x_B - x_A) + (x_C - x_B)$$

eine arithmetische „Identität“. Indem man diese Relation mit der vorhergehenden vergleicht, kann man sagen, dass sich die Abstände einer und derselben Richtung so wie ihre Streckenzahlen addiren. Ist also y die zum Abstand b gehörende Streckenzahl, und n eine positive ganze Zahl, so ist ny die zum Abstand nb gehörende Streckenzahl. Sind ferner b und b' gleichgerichtete Abstände, und ist $b' < b$, so giebt es einen Abstand b'' von derselben Richtung so, dass $b = b' + b''$;

zwischen den entsprechenden Streckenzahlen besteht die entsprechende Gleichung $y = y' + y''$, und da die Zahlen y, y', y'' von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben, so muss y' numerisch kleiner als y sein. Von zwei gleichgerichteten Abständen hat also der kleinere die numerisch kleinere Streckenzahl. Nun seien b und c irgend zwei gleichgerichtete Abstände, y und z ihre Streckenzahlen, und m und n zwei positive ganze Zahlen. Es ist dann ersichtlich, dass $nb \gtreqless mc$ ist, je nachdem ny numerisch grösser, gleich oder kleiner ist als mz, d. h. je nachdem $\frac{m}{n}$ kleiner, gleich oder grösser ist als $\frac{y}{z}$. Die beiden Zahlen y und z haben hier gleiches Vorzeichen, und es ist nun bewiesen (vergl. § 10), dass das Verhältniss zweier gleichgerichteten Abstände b und c gleich dem Verhältniss ihrer Streckenzahlen y und z ist, d. h. dass

$$[b : c] = \frac{y}{z}. \tag{61}$$

Sind nun NA und NE gleichgerichtete Strecken, so giebt die Gleichung (61) mit Rücksicht auf die hier gegebene Erklärung der Streckenzahlen

$$[NA : NE] = \frac{x_A - x_N}{x_E - x_N}. \tag{62}$$

Sind NA und NE von entgegengesetzter Richtung, so sind (Axiom (β)) AN und NE gleichgerichtet, und es ist

$$[AN : NE] = \frac{x_N - x_A}{x_E - x_N},$$

es ist also in diesem Fall

$$-[AN : NE] = \frac{x_A - x_N}{x_E - x_N}. \tag{63}$$

Bedeutet jetzt wieder N den Punkt, dem die Zahl 0, und E den Punkt, dem die Zahl 1 zugeordnet ist, so ist $x_N = 0$, und $x_E = 1$, und es gehen die rechten Seiten der Gleichungen (62) und (63) beide in x_A über. Es ist nun ersichtlich, dass diese Gleichungen mit den früheren Gleichungen (54) und (55) übereinstimmen, d. h. es ergiebt sich die jetzt angenommene Vertheilung der Zahlen über die Gerade aus dem früheren Verfahren mit Hilfe der Grundpunkte N und E.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erster Theil: **Grössen und Masszahlen.**

§ 1. Die Axiome 4
§ 2. Einfachste Folgerungen aus den Axiomen I bis VI 7
§ 3. Vervielfachung 8
§ 4. Das archimedische Axiom 10
§ 5. Das commutative Gesetz der Addition 13
§ 6. Folgerungen aus dem Commutativgesetz der Addition . . . 15
§ 7. Aliquote Theile 16
§ 8. Antike und moderne Auffassung der Proportionenlehre . . 17
§ 9. Rationale und irrationale Zahlen 19
§ 10. Die einem Grössenverhältniss zugeordnete Zahl (Masszahl) . 22
§ 11. Commensurable Grössen 24
§ 12. Masszahl einer Summe von Grössen 25
§ 13. Aenderung der Einheit 27
§ 14. Moderne Begründung der Lehre von den Grössenproportionen 28
§ 15. Existenz einer Grösse von vorgeschriebener Masszahl . . . 30
§ 16. Multiplication der Grössen 32
§ 17. Die definirte Multiplication ist die einzige 34

Zweiter Theil: **Anwendung auf die Strecken in einer Geraden.**

§ 18. Die für Punkte und Strecken einer Geraden zunächst zu fordernden Axiome 37
§ 19. Die Strecken erster Richtung als Grössen 40
§ 20. Die Strecken zweiter Richtung 44
§ 21. Vergleichung von Strecken entgegengesetzter Richtung . . 50
§ 22. Ergebnisse für absolute Strecken beider Richtungen . . . 56
§ 23. Abscissen 57

Druckfertig erklärt 11. II. 1901.]

Martin Krause: *Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunctionen.*

Im 94. Bande des Crelleschen Journals zeigt Herr Caspary, daſs die 16 Thetaproducte $\vartheta_\alpha(u_1, u_2)\,\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ als Elemente eines orthogonalen Systems angeordnet werden können. Dieser Casparysche Satz hat sich für die Theorie der Thetafunctionen zweier veränderlichen Grössen als äusserst fruchtbar erwiesen. Der Zweck des folgenden Aufsatzes ist es, im Gebiete der Thetafunctionen dreier veränderlichen Grössen nach ähnlichen Anordnungen zu suchen. Hierbei wird von einer bestimmten Fragestellung ausgegangen, die aus dem zweiten Paragraphen ersichtlich ist und das Problem innerhalb des angegebenen Rahmens vollkommen gelöst. Um die Methode klar hervortreten zu lassen, wird der Fall zweier Veränderlichen mit in Betrachtung gezogen. Es geschieht dieses auch desswegen, um die Stellung der Caspary'schen Anordnung schärfer hervortreten zu lassen.[1])

§ 1. Untersuchung der Thetafunctionen zweier veränderlicher Grössen.

Bekanntlich gilt für die Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten das Theorem:

$$(1)\quad \begin{matrix} g_1\, g_2 \cdots g_p \\ h_1\, h_2 \cdots h_p \end{matrix} = \sum (-1)^{\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha^{(\varkappa)} \cdot h_\alpha} A_\varkappa \cdot B_{\varkappa g}, \quad \varkappa : 1, 2, \cdots 2^p.$$

In dieser Formel nehmen die Grössen $\lambda_1^{(\varkappa)}, \lambda_2^{(\varkappa)} \cdots \lambda_p^{(\varkappa)}$ unabhängig von einander die Werthe Null oder Eins an, ferner ist gesetzt worden:

$$\begin{matrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{matrix} = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{bmatrix}(u_1, u_2, \cdots u_p)\, \vartheta\begin{bmatrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{bmatrix}(v_1, v_2, \cdots v_p).$$

---

1) Siehe in Bezug auf das Folgende auch die Note des Verfassers vom 24. Dezember 1900 in den Comptes Rendus der Pariser Academie.

$$A_x = \Theta\begin{bmatrix} \lambda_1^{(x)} \lambda_2^{(x)} \cdots \lambda_p^{(x)} \\ 0 \quad 0 \cdots 0 \end{bmatrix}(u_1 + v_1, \cdots u_p + v_p),$$

$$B_{xg} = \Theta\begin{bmatrix} \lambda_1^{(x)} + g_1 \cdots \lambda_p^{(x)} + g_p \\ 0 \quad \cdots \quad 0 \end{bmatrix}(u_1 - v_1, \cdots (u_p - v_p)),$$

wobei die Functionen Θ die doppelten Moduln $2\tau_{\alpha\beta}$ besitzen.

Wir nehmen zunächst den Fall $p = 2$. In ihm setzen wir:

$$A_1 = \Theta\begin{bmatrix} 00 \\ 00 \end{bmatrix}(u+v),\ A_2 = \Theta\begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix}(u+v),\ A_3 = \Theta\begin{bmatrix} 10 \\ 00 \end{bmatrix}(u+v),$$

$$A_4 = \Theta\begin{bmatrix} 11 \\ 00 \end{bmatrix}(u+v)$$

und definiren in ähnlicher Weise die vier Grössen B.

Aus der angegebenen Fundamentalformel der Transformation zweiten Grades ergeben sich für den Fall $p = 2$ sechzehn spezielle Formeln. Wir greifen die folgenden heraus, aus denen die fehlenden sich unmittelbar ergeben.

$$\begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4,$$

$$\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix} = A_1B_1 - A_2B_2 + A_3B_3 - A_4B_4,$$

$$\begin{matrix} 00 \\ 10 \end{matrix} = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3 - A_4B_4,$$

$$\begin{matrix} 00 \\ 11 \end{matrix} = A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 + A_4B_4,$$

$$\begin{matrix} 01 \\ 00 \end{matrix} = A_1B_2 + A_2B_1 + A_3B_4 + A_4B_3,$$

$$\begin{matrix} 10 \\ 00 \end{matrix} = A_1B_3 + A_2B_4 + A_3B_1 + A_4B_2,$$

$$\begin{matrix} 11 \\ 00 \end{matrix} = A_1B_4 + A_2B_3 + A_3B_2 + A_4B_1.$$

Aus den Grössen $\pm A$ kann auf mehrfachem Wege ein orthogonales System von 16 Elementen hergestellt worden, ebenso aus den Grössen $\pm B$.[1]) Wir wollen eine Determinante der ersten Art durch $\mathfrak{A}$, der zweiten durch $\mathfrak{B}$ bezeichnen. Wir fragen:

---

1) In Bezug auf die Definition eines orthogonalen Systems werde auf eine Arbeit von Herrn Frobenius im 105. Bande des Crelleschen Journals pag. 69 verwiesen. Ebenda findet sich auch schon die Existenz gewisser orthogonaler Systeme bewiesen.

Können die 16 Thetaproducte $\begin{matrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{matrix}$ *ganz oder theilweise als Elemente einer Determinante von* · 16 *Grössen angeordnet werden, die nach Ersetzung dieser Producte durch die Grössen A und B in der Form eines Productes* $\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{B}$ *dargestellt werden kann?*

Jedenfalls ist dann die Determinante der Thetaproducte auch ihrerseits eine orthogonale. Wenn es nun möglich ist die Thetaproducte als Glieder eines solchen orthogonalen Systems anzuordnen, so genügt es, die Elemente einer Horizontal- und einer Verticalreihe zu kennen, um das ganze System zu kennen. In der That, nehmen wir z. B. an, die Glieder der ersten Horizontal- und der ersten Verticalreihe seien bestimmt. Dann sind die Characteristiken (normal) der Producte der Glieder der ersten Horizontalreihe mit den entsprechenden Gliedern der andern Horizontalreihen eindeutig bestimmt, also die Characteristiken der Elemente selbst auch.

Aus den möglichen Systemen greifen wir diejenigen heraus, in denen das Product $\begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix}$ vorkommt. Da die Reihenfolge der Horizontalreihen willkürlich ist, so können und wollen wir eine derjenigen als erste wählen, welche das Product $\begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix}$ in sich enthalten.

In der ersten Horizontalreihe stehen vier Thetaproducte — ein jedes derselben kann nach den angegebenen Regeln durch die Grössen A und B dargestellt werden. Wir wollen uns ein jedes geordnet denken nach den Grössen A und zwar nach steigenden Indices von A. Die Coefficienten sind die Grössen $\pm B$. Die Determinante derselben muss dann eine orthogonale sein.

Die Characteristiken der Thetaproducte der ersten Horizontalreihe haben die Form

$$\begin{matrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{matrix}$$

Aus dem soeben bemerkten folgt, dass die Systeme $g_1 g_2$ von einander verschieden sein müssen und die Werthe annehmen: 00, 01, 10, 11, ebenso die Systeme $h_1 \; h_2$, da sonst der Determinante der Grössen B die Orthogonalität nicht zukommen könnte.

Da die Reihenfolge der Verticalreihen willkürlich ist, so können wir die Systeme g beliebig anordnen — wir wählen die Reihenfolge:

$$00 \quad 01 \quad 10 \quad 11.$$

Die Systeme h sind dann nicht mehr willkürlich zuzuordnen, vermöge der gemachten Bemerkungen können wir lediglich die Annahme hinzufügen, dass das erste Glied unserer ersten Horizontalreihe den Werth hat:

$$\text{I} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4.$$

Unser System soll sich nun in die Form $\mathfrak{A} . \mathfrak{B}$ bringen lassen. Dann können und wollen wir annehmen, dass die erste Horizontalreihe von $\mathfrak{A}$ die Form hat:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,$$

von $\mathfrak{B}$:

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4.$$

Jeder andere Fall kann zu neuen Resultaten nicht führen.

Unter dieser Voraussetzung muss das zweite Element

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ h_1 & h_2 \end{matrix}$$

der ersten Horizontalreihe unserer zu construirenden Determinante sich in der Form darstellen lassen:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 \pm A_3 B_4 \mp A_4 B_3,$$

oder also es sind zwei Fälle möglich:

$$\text{II} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{01} = A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_4 - A_4 B_3,$$

$$\text{III} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{11} = A_1 B_2 - A_2 B_1 - A_3 B_4 + A_4 B_3$$

Wir nehmen den ersten Fall, der durch Gleichung II repräsentirt wird.

Das dritte Element der ersten Horizontalreihe

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{matrix}$$

hat dann mit Rücksicht auf II die Form:

$$A_1 B_3 \pm A_2 B_4 - A_3 B_1 \mp A_4 B_2,$$

mit Rücksicht auf II bleibt nur die Möglichkeit:

$$\text{IV} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{11} = A_1 B_3 - A_2 B_4 - A_3 B_1 + A_4 B_2.$$

Das vierte Element der ersten Horizontalreihe ergiebt sich dann in der Form:

$$\text{V} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{10} = A_1 B_4 + A_2 B_3 - A_3 B_2 - A_4 B_1.$$

Also ergeben sich die Elemente der ersten Horizontalreihe in der Anordnung:

$$\begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 00 & 01 & 11 & 10. \end{matrix}$$

Genau so ergiebt sich als zweite mögliche Anordnung:

$$\begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 00 & 11 & 10 & 01. \end{matrix}$$

In analoger Weise sind die Elemente der ersten Verticalreihe zu untersuchen. Es ergeben sich dieselben beiden Anordnungen als möglich.

Unter solchen Umständen erhalten wir im Ganzen vier mögliche Orthogonalsysteme. Zwei derselben fallen zusammen, so dass nur drei von einander verschiedene existiren können.

Die beiden ersten lauten:

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{01} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{11} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{10} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{01}{01} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{10} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{11} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{11} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{10} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{01} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{11}{10} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{11} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{01} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00}
\end{array}\right| \qquad
\left|\begin{array}{ccccccc}
\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{11} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{01} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{01}{11} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{01} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{01} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{11} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{11}{01} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{11} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00}
\end{array}\right|$$

ergeben also *keine* Thetarelationen.

Es bleibt also nur die Anordnung übrig

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{11} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{10} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{01} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{01}{01} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{10} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{11} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{00} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{11} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{11}{00} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{01} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{10} \\
\genfrac{}{}{0pt}{}{11}{10} & & \genfrac{}{}{0pt}{}{10}{01} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{01}{00} & - & \genfrac{}{}{0pt}{}{00}{11}
\end{array}\right|$$

Es ist dieses das Casparysche System. Damit sind alle Systeme erschöpft, bei denen das Element $\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00}$ vorkommt, damit sind aber

zu gleicher Zeit alle möglichen Systeme erschöpft, da sich ein jedes System mit Hülfe von Substitutionen halber Perioden auf ein solches zurückführen lässt, in welchem das Element $\genfrac{}{}{0pt}{}{00}{00}$ vorkommt.

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Es giebt nur eine Anordnung der 16 Thetaproducte als Elemente eines orthogonalen Systems der angegebenen Art und zwar die C*ASPARY'sche.*

§ 2. Untersuchung der Thetafunctionen dreier veränderlichen Grössen.

Wir nehmen jetzt den Fall der Thetafunctionen dreier veränderlichen Grössen.

In diesem Falle setzen wir:

$$A_1 = \Theta\begin{bmatrix}000\\000\end{bmatrix}(u+v),\quad A_2 = \Theta\begin{bmatrix}001\\000\end{bmatrix}(u+v),\quad A_3 = \Theta\begin{bmatrix}010\\000\end{bmatrix}(u+v),$$

$$A_4 = \Theta\begin{bmatrix}011\\000\end{bmatrix}(u+v),\quad A_5 = \Theta\begin{bmatrix}100\\000\end{bmatrix}(u+v),\quad A_6 = \Theta\begin{bmatrix}101\\000\end{bmatrix}(u+v),$$

$$A_7 = \Theta\begin{bmatrix}110\\000\end{bmatrix}(u+v),\quad A_8 = \Theta\begin{bmatrix}111\\000\end{bmatrix}(u+v),$$

und bezeichnen in ähnlicher Weise die Grössen B.

Aus den 64 Formeln der Transformation zweiten Grades greifen wir die folgenden heraus, aus denen die fehlenden ohne weiteres ergänzt werden können:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6 + A_7B_7 + A_8B_8,$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{001} = A_1B_1 - A_2B_2 + A_3B_3 - A_4B_4 + A_5B_5 - A_6B_6 + A_7B_7 - A_8B_8,$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{010} = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3 - A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6 - A_7B_7 - A_8B_8,$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{011} = A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 - A_6B_6 - A_7B_7 + A_8B_8,$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{100} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 - A_5B_5 - A_6B_6 - A_7B_7 - A_8B_8,$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{101} = A_1B_1 - A_2B_2 + A_3B_3 - A_4B_4 - A_5B_5 + A_6B_6 - A_7B_7 + A_8B_8,$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{110} = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3 - A_4B_4 - A_5B_5 - A_6B_6 + A_7B_7 + A_8B_8,$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{111} = A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 + A_4B_4 - A_5B_5 + A_6B_6 + A_7B_7 - A_8B_8,$$

$$\begin{matrix}001\\000\end{matrix}=A_1B_2+A_2B_1+A_3B_4+A_4B_3+A_5B_6+A_6B_5+A_7B_8+A_8B_7,$$

$$\begin{matrix}010\\000\end{matrix}=A_1B_3+A_2B_4+A_3B_1+A_4B_2+A_5B_7+A_6B_8+A_7B_5+A_8B_6,$$

$$\begin{matrix}011\\000\end{matrix}=A_1B_4+A_2B_3+A_3B_2+A_4B_1+A_5B_8+A_6B_7+A_7B_6+A_8B_5,$$

$$\begin{matrix}100\\000\end{matrix}=A_1B_5+A_2B_6+A_3B_7+A_4B_8+A_5B_1+A_6B_2+A_7B_3+A_8B_4,$$

$$\begin{matrix}101\\000\end{matrix}=A_1B_6+A_2B_5+A_3B_8+A_4B_7+A_5B_2+A_6B_1+A_7B_4+A_8B_3,$$

$$\begin{matrix}110\\000\end{matrix}=A_1B_7+A_2B_8+A_3B_5+A_4B_6+A_5B_3+A_6B_4+A_7B_1+A_8B_2,$$

$$\begin{matrix}111\\000\end{matrix}=A_1B_8+A_2B_7+A_3B_6+A_4B_5+A_5B_4+A_6B_3+A_7B_2+A_8B_1.$$

Wir können nun ähnlich schliessen, wie im Falle von zwei veränderlichen Grössen. Die Grössen $\pm A$, $\pm B$ können in mannigfacher Weise als Elemente je einer orthogonalen Determinante von 64 Grössen dargestellt werden. Wir wollen zwei solche Determinanten durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen und fragen: *können die 64 Thetaproducte:*

$$\begin{matrix}g_1g_2g_3\\h_1h_2h_3\end{matrix}$$

ganz oder theilweise als Elemente einer Determinante dargestellt werden, die in ein Product von der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *verwandelt werden kann?* Diese Determinante muss dann auch ihrerseits eine orthogonale sein. Es genügt eine Horizontalreihe — etwa die erste — und eine Verticalreihe, etwa die erste, zu kennen, um alle zu kennen. Wir greifen unter den möglichen Systemen diejenigen heraus, die das Product:

$$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$$

in sich enthalten.

Als erste Horizontalreihe wählen wir diejenige oder eine derjenigen, die das Product:

$$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$$

in sich enthalten. Neben diesem Product enthält die Reihe dann noch sieben andere Producte. Alle diese Producte können nach den angegebenen Regeln durch die Grössen A und B dargestellt

werden. Wir denken uns die Producte nach den Grössen A geordnet und zwar nach steigenden Indices. Die Coefficienten sind die Grössen $\pm B_r$. Die Determinante derselben muss eine orthogonale sein. Die Systeme $g_1 g_2 g_3$ sowohl wie auch die Systeme $h_1 h_2 h_3$ der Thetaproducte der ersten Horizontalreihe müssen von einander verschieden sein. Da die Reihenfolge der Verticalreihen willkürlich ist, können wir die Systeme g beliebig anordnen. Wir wählen die Anordnung:

000 001 010 011 100 101 110 111

Die Grössen h können dann nicht mehr willkürlich zugeordnet werden, wir können lediglich die Annahme machen, dass das erste Glied der ersten Horizontalreihe den Werth hat:

$$\mathrm{I}\ \begin{matrix}000\\000\end{matrix} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6 + A_7B_7 + A_8B_8.$$

Die Determinanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ können so geordnet werden, dass die ersten Horizontalreihen resp. lauten:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7,\ A_8,$$
$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6,\ B_7,\ B_8.$$

Das zweite Product der ersten Horizontalreihe unserer zu construirenden Determinante muss sich dann in der Form darstellen lassen:

$$A_1B_2 - A_2B_1 + \delta_3A_3B_4 + \delta_4A_4B_3 + \delta_5A_5B_6 + \delta_6A_6B_5 + \delta_7A_7B_8 + \delta_8A_8B_7,$$

wobei die Grössen δ die Werthe ± 1 annehmen können.

Mit Rücksicht auf die Transformation zweiten Grades ergeben sich die Möglichkeiten:

$$\mathrm{II}\ \begin{matrix}001\\001\end{matrix} = A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_4 - A_4B_3 + A_5B_6 - A_6B_5 + A_7B_8 - A_8B_7,$$

$$\mathrm{III}\ \begin{matrix}001\\011\end{matrix} = A_1B_2 - A_2B_1 - A_3B_4 + A_4B_3 + A_5B_6 - A_6B_5 - A_7B_8 + A_8B_7,$$

$$\mathrm{IV}\ \begin{matrix}001\\101\end{matrix} = A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_4 - A_4B_3 - A_5B_6 + A_6B_5 - A_7B_8 + A_8B_7,$$

$$\mathrm{V}\ \begin{matrix}001\\111\end{matrix} = A_1B_2 - A_2B_1 - A_3B_4 + A_4B_3 - A_5B_6 + A_6B_5 + A_7B_8 - A_8B_7.$$

Diese vier Möglichkeiten sind einzeln zu untersuchen. Wir nehmen den Fall II. Das dritte Product der ersten Horizontalreihe kann dann mit Rücksicht auf I die vier Werthe annehmen:

010 010 010 010
010 011 110 111.

Mit Rücksicht auf das zweite Product bleiben nur die beiden Fälle übrig:

$$\text{VI}\quad \begin{matrix}010\\011\end{matrix} = A_1B_3 - A_2B_4 - A_3B_1 + A_4B_2 + A_5B_7 - A_6B_8 - A_7B_5 + A_8B_6,$$

$$\text{VII}\quad \begin{matrix}010\\111\end{matrix} = A_1B_3 - A_2B_4 - A_3B_1 + A_4B_2 - A_5B_7 + A_6B_8 + A_7B_5 - A_8B_6.$$

Nehmen wir den Fall VI, so sind die übrigen Producte bestimmt und wir erhalten für die erste Horizontalreihe die Anordnung:

000 001 010 011 100 101 110 111
000 001 011 110 111 100 101 010.

In analoger Weise ergeben sich im Ganzen noch sieben andere Anordnungen der ersten Horizontalreihe. Nennen wir die Glieder bei der ersten Anordnung:

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{matrix}$$

so können sie bei den sieben anderen Anordnungen geschrieben werden:

$$\begin{matrix} g_1+\varepsilon_1 & g_2+\varepsilon_2 & g_3+\varepsilon_3 \\ h_1+\eta_1 & h_2+\eta_2 & h_3+\eta_3, \end{matrix}$$

wobei die Characteristiken

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix}$$

für eine jede der sieben Anordnungen je einen festen Werth besitzen. Diese sieben Werthe sind gleich den Characteristiken

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{matrix}$$

mit Ausnahme der Characteristik Null.

Hieraus folgt, dass in jeder der acht möglichen Anordnungen die Characteristik Null vorkommt, dass die 56 übrig bleibenden

Characteristiken zu je zwei einander gleich und sämmtlich ungerade sind. Diese Characteristiken entstehen durch Addition je zweier Characteristiken der ersten Anordnung. Genau in derselben Weise kann die erste Verticalreihe untersucht werden.

Auch hier sind dieselben acht Anordnungen möglich. Combinieren wir dieselben mit den acht Anordnungen der ersten Horizontalreihe, so erhalten wir im Ganzen 64 Systeme. Dieselben gruppiren sich folgendermaassen.

Die Glieder der ersten Horizontalreihe haben die Form:

$$\begin{matrix} g + \varepsilon \\ h + \eta \end{matrix}$$

die der ersten Verticalreihe in ähnlicher Weise:

$$\begin{matrix} g + \varepsilon' \\ h + \eta', \end{matrix}$$

wobei die Characteristiken:

$$\begin{matrix} \varepsilon \\ \eta \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} \varepsilon' \\ \eta' \end{matrix},$$

fest sind, während

$$\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}$$

die früher angegebenen Werthe durchlaufen.

Die sämmtlichen Elemente der Determinante haben dann die Form:

$$\begin{matrix} g' + g'' + \varepsilon + \varepsilon' \\ h' + h'' + \eta + \eta' \end{matrix}$$

wobei die Grössen:

$$\begin{matrix} g' \\ h' \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} g'' \\ h'' \end{matrix}$$

die Grössen der ersten Anordnung sind.

Hieraus folgt, dass die acht Fälle, in denen:

$$\begin{matrix} \varepsilon \\ \eta \end{matrix} = \begin{matrix} \varepsilon' \\ \eta' \end{matrix}$$

ist, zu demselben orthogonalen Systeme führen, das mit dem Namen des *fundamentalen* bezeichnet werden möge. Wir können es schreiben:

$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$	$\begin{matrix}001\\001\end{matrix}$	$\begin{matrix}010\\011\end{matrix}$	$\begin{matrix}011\\010\end{matrix}$	$\begin{matrix}100\\111\end{matrix}$	$\begin{matrix}101\\100\end{matrix}$	$\begin{matrix}110\\101\end{matrix}$	$\begin{matrix}111\\010\end{matrix}$
$-\begin{matrix}001\\001\end{matrix}$	$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$	$\begin{matrix}011\\010\end{matrix}$	$-\begin{matrix}010\\111\end{matrix}$	$\begin{matrix}101\\110\end{matrix}$	$-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}$	$\begin{matrix}111\\100\end{matrix}$	$-\begin{matrix}110\\011\end{matrix}$
$-\begin{matrix}010\\011\end{matrix}$	$-\begin{matrix}011\\010\end{matrix}$	$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$	$\begin{matrix}001\\101\end{matrix}$	$\begin{matrix}110\\100\end{matrix}$	$-\begin{matrix}111\\111\end{matrix}$	$-\begin{matrix}100\\110\end{matrix}$	$\begin{matrix}101\\001\end{matrix}$
$-\begin{matrix}011\\110\end{matrix}$	$\begin{matrix}010\\111\end{matrix}$	$-\begin{matrix}001\\101\end{matrix}$	$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$	$-\begin{matrix}111\\001\end{matrix}$	$-\begin{matrix}110\\010\end{matrix}$	$\begin{matrix}101\\011\end{matrix}$	$\begin{matrix}100\\100\end{matrix}$
$-\begin{matrix}100\\111\end{matrix}$	$-\begin{matrix}101\\110\end{matrix}$	$-\begin{matrix}110\\100\end{matrix}$	$\begin{matrix}111\\001\end{matrix}$	$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$	$\begin{matrix}001\\011\end{matrix}$	$\begin{matrix}010\\010\end{matrix}$	$-\begin{matrix}011\\101\end{matrix}$
$-\begin{matrix}101\\100\end{matrix}$	$\begin{matrix}100\\101\end{matrix}$	$\begin{matrix}111\\111\end{matrix}$	$\begin{matrix}110\\010\end{matrix}$	$-\begin{matrix}001\\011\end{matrix}$	$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$	$-\begin{matrix}011\\001\end{matrix}$	$-\begin{matrix}010\\110\end{matrix}$
$-\begin{matrix}110\\101\end{matrix}$	$-\begin{matrix}111\\100\end{matrix}$	$\begin{matrix}100\\110\end{matrix}$	$-\begin{matrix}101\\011\end{matrix}$	$-\begin{matrix}010\\010\end{matrix}$	$\begin{matrix}011\\001\end{matrix}$	$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$	$\begin{matrix}001\\111\end{matrix}$
$-\begin{matrix}111\\010\end{matrix}$	$\begin{matrix}110\\011\end{matrix}$	$-\begin{matrix}101\\001\end{matrix}$	$-\begin{matrix}100\\100\end{matrix}$	$\begin{matrix}011\\101\end{matrix}$	$\begin{matrix}010\\110\end{matrix}$	$-\begin{matrix}001\\111\end{matrix}$	$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}$

Die 56 weiteren Systeme sind zu je zwei einander gleich und entstehen aus dem fundamentalen System durch Anwendung derjenigen Substitutionen halber Perioden, die den ungeraden Characteristiken entsprechen.

Damit sind alle diejenigen Systeme aufgestellt, welche die Characteristik Null enthalten. Durch Substitution halber Perioden können alle übrigen auf die soeben betrachteten zurückgeführt werden. Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz:

Es giebt 64 *orthogonale Systeme der angegebenen Art. Dieselben können sämmtlich aus einem derselben — etwa dem fundamentalen — durch Substitution halber Perioden abgeleitet werden.*

Druckfertig erklärt 3. II. 1901.]

INHALT.

Seite

O. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass . 1

Martin Krause, Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunctionen 65

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

II.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1901.

Einzelpreis 90 Pfennig.

SITZUNG VOM 4. MÄRZ 1901.

Vorträge hielten:

Herr Wilhelm His, o. M.: Antrag an die internationale Association der Akademien auf Bestellung einer Fach-Commission für menschliche und thierische Entwickelungsgeschichte.

Herr Hermann Credner, o. M.: Das sächsische Schüttergebiet des Sudetischen Erdbebens vom 10. Januar 1901.

Herr Otto Fischer, a. o. M.: Der Gang des Menschen. IV. Theil. (Für die Abhandlungen Bd. XXVI, Heft VII.)

W. His ersucht die Classe um Einbringung nachfolgenden *Antrages an die internationale Association der Akademien.* (Vorgetragen in der Sitzung am 4. März 1901.)

Der von Hrn. W. His, o. M. formulirte, von der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften angenommene und der Generalversammlung der vereinigten Akademien in Paris am 16. April 1901 vorzulegende Antrag lautet: *„Die internationale Association der Akademien möge eine Fach-Commission aufstellen zur Berathung der Mittel und Wege, wie auf den Gebieten, einestheils der menschlichen und thierischen Entwickelungsgeschichte, anderntheils der Hirnanatomie eine nach einheitlichen Grundsätzen erfolgende Sammlung, Verarbeitung und allgemeine Nutzbarmachung von sicherem Beobachtungsmaterial erreicht werden kann."*

Begründung: Unter den Aufgaben, deren Bearbeitung der heutigen anatomischen Forschung obliegt, stehen, ihrer grundlegenden und weitreichenden Bedeutung halber, zwei im Vordergrund wissenschaftlichen Interesses. Es sind dies: einerseits die eingehende Erforschung des Gehirnbaues und andererseits die Verfolgung der schrittweisen Entwickelung des Menschen und der Thiere. Die Bedeutung der letzteren Aufgabe liegt darin, dass der einzig sichere Weg zum Verständniss jeglicher Organisation durch die Erforschung der ontogenetischen und phylogenetischen Entwickelungsstufen der Organismen hindurchführt.

Sowohl bei der entwickelungsgeschichtlichen als bei der Gehirnforschung hat sich die ältere Zergliederungsmethodik als unzureichend erwiesen. Dagegen verdankt man einen guten Theil unserer heutigen Kenntnisse auf den genannten Gebieten den Methoden der Zerlegung in feine Schnitte und der Schnittsynthese. In die Gehirnanatomie ist die Schnittmethode von B. Stilling schon im Beginn der vierziger Jahre eingeführt worden, aber es verging fast ein Menschenalter, bis sie allgemeine Würdigung fand. Heute ist sie in sehr allgemeinem Gebrauch und die Techniken von Schnittführung und Schnittfärbung lassen zur Zeit wenig zu wünschen übrig. In unabhängiger Weise hat auch die entwickelungsgeschichtliche Forschung die Schnittmethodik zu einem ihrer hauptsächlichsten Hilfsmittel gemacht und auf das feinste ausgebildet. Wir sind zur Zeit im Stande, auch die zartesten Objecte nach vorangegangener Härtung in lückenlose Schnittreihen von $^1/_{100}$ oder $^1/_{200}$ mm zu zerlegen, und es ist klar, dass dadurch der Kreis unserer thatsächlichen Anschauungen auf das erheblichste erweitert werden kann. So erwünscht nun aber dieser Zuwachs an neuen Anschauungen sein muss, so ergeben sich daraus bedeutende Erschwerungen der wissenschaftlichen Verarbeitung. Nehmen wir ein Beispiel: es sei ein Embryo von 7 mm Länge in 700 Schnitte von je 10 μ zerlegt worden, so wollen die 700 Schnitte nicht nur im Einzelnen durchbeobachtet, bez. in entsprechender Vergrösserung gezeichnet oder photographirt werden, sondern es sind auch deren gegenseitige Beziehungen zum Verständniss zu bringen. Wer sich die Mühe nehmen will, die 700 Schnitte oder doch eine Auswahl derselben abzubilden und zu beschreiben, hat damit noch kein plastisches Gesammtbild des betreffenden Objectes geschaffen. Dazu bedarf es erst einer Verknüpfung der Einzelbilder zu einem Gesammtbild, d. h. einer nachträglichen Zusammenfügung der Schnitte zu einem körperlichen Ganzen.

Früher als die Gehirnanatomen haben die Embryologen das Bedürfniss der Schnittsynthese empfunden und ihr in verschiedener Weise Rechnung zu tragen gesucht. Am beliebtesten ist zur Zeit die Born'sche Methode der Wachsplattenmodellirung, die allerdings die gestellten Aufgaben nur theilweise erfüllen kann. In den letzten Jahren ist man daran gegangen, auch durchsichtige Modelle zur Erläuterung innerer Structurverhältnisse herzustellen. Im Einzelnen sind noch manche Vervollkommnungen

denkbar, im Ganzen aber kann man sagen, dass die Aufgaben, um die es sich zunächst handelt, wenigstens auf embryologischem Gebiet scharf gestellt und die Methoden zu deren Lösung ausreichend ausgebildet sind. *Die wegen ihrer Kleinheit und Zartheit der unmittelbaren Bearbeitung unzugänglichen Formen des sich entwickelnden Organismus und seiner Theile sind in vergrössertem Maassstabe plastisch zu reproduciren und zwar mit einer Genauigkeit, die auch der messenden Forschung sichere Unterlagen gewährt.*

Ist einmal diese Aufgabe in durchgreifender Weise erfüllt, dann wird die Wissenschaft ein festes thatsächliches Fundament besitzen, vergleichbar etwa den Karten der Geographen, Geologen und Astronomen, den Wörterbüchern der Philologen oder den Geschichtstabellen der Historiker. Nun geht aber die zur Erreichung dieses Fundamentes auszuführende Arbeit so sehr in die Breite, dass Einzelne und selbst Institute darauf verzichten müssen, anders als bruchstückweise derselben Herr zu werden. Dazu ist die Arbeit theilweise eine mehr mechanische, von geschulten Technikern ebensogut, wo nicht besser zu leistende, als von Gelehrten und von letzteren vielfach als „nicht lohnend“ angesehen. Allein auch das, was wirklich an solcher reconstructiver Arbeit bis jetzt durchgeführt worden ist, findet sich in den verschiedenen Instituten oder Privatsammlungen zerstreut und ist nach verschiedenen Maassstäben und Grundsätzen hergestellt. Selbst dieses fragmentarisch gesammelte Material ist bis jetzt Niemand im Stande vollständig zu übersehen.

Auf anderen wissenschaftlichen Gebieten, in denen es sich um Ansammlung von Grundmaterial handelt, dessen Beschaffung die Kräfte Einzelner übersteigt, hat man das erstrebte Ziel durch einheitlich organisirte Arbeit Vieler zu erreichen gewusst. Die Astronomen haben den Himmel, die Geologen die Erde in getrennte Arbeitsgebiete zerlegt, und durch gemeinsam angenommene Grundsätze die Einheitlichkeit der Arbeit und die Zusammenfassbarkeit der Ergebnisse sicher gestellt. Auf den Gebieten der Embryologie und der Gehirnanatomie wird man nach ähnlichen Grundsätzen des Zusammenarbeitens sicherlich mehr und auch für den einzelnen Forscher befriedigenderes erreichen, als wenn jeder Einzelne seinen besonderen Horizont beibehält. Ein auf diesen Gebieten zu erstrebendes Ziel, von dem gleich noch mehr die Rede sein soll, sind Centralanstalten, deren Aufgabe in Sammlung

und Ordnung des jeweilen vorhandenen thatsächlichen Materiales bestehen muss. Solche Anstalten entsprechen schon jetzt einem so ausgeprägten Bedürfniss, dass deren Begründung sicherlich nicht mehr lange auf sich wird warten lassen. Bis zu dem Zeitpunkte aber, wo solche Centralanstalten verwirklicht sein werden, kann eine durch Vereinbarung entstandene centrale Instanz durch Feststellung gewisser allgemeiner Zielpunkte und durch Hinwirken auf einheitliche Arbeitsweisen schon Erhebliches erreichen. Auch kann dadurch die Schaffung von Centralanstalten angemessen vorbereitet werden. In dem Sinne wird der oben formulirte Antrag der internationalen Association der Akademien zur Annahme empfohlen.

Es ist ausdrücklich hervorzuheben, dass solche zu einheitlichen Arbeitsgrundsätzen führende Bestrebungen weit davon entfernt sind, die wissenschaftliche Freiheit der einzelnen Forscher zu beeinträchtigen. Sowie der Besitz sicherer Karten oder zuverlässiger Wörterbücher zum nothwendigen Rüstzeug wissenschaftlicher Arbeiten gehört, so werden auch sichere, durch collective Arbeit geschaffene Anatomien von menschlichen und thierischen Embryonen, sowie fein durchgeführte Gehirnanatomien zu nothwendigen Hilfsmitteln fernerer Forschung werden.

Schon jetzt wird eine centrale Instanz als Vermittlerin von Materialbeschaffung und Materialverwerthung grossen Nutzen stiften können. Auf entwickelungsgeschichtlichem Gebiete liegt eine der grössten Schwierigkeiten in der Beschaffung des Materiales. Ein einzelner Forscher kann im Laufe der Jahre Schnittvorräthe angesammelt haben, die weit über das hinausgehen, was er in seinem Leben zu verarbeiten vermag, und die doch wiederum zu lückenhaft sind, um fortlaufende Entwickelungsreihen daraus herzustellen. Hierbei wird oft der Eine besitzen, was der Andere nicht hat, und bei gut organisirtem Ineinandergreifen kann die Arbeit Aller gefördert werden.

In letzter Instanz gelangen wir aber immer wieder auf die Nothwendigkeit der Schaffung centraler Anstalten. Die allgemeinen Aufgaben solcher Anstalten liegen nach zwei Richtungen hin: einmal haben sie grössere, über die Kräfte einzelner Forscher hinausgehende Aufgaben zu bewältigen, vor allem solche Aufgaben, die ein nach einheitlichem Plane arbeitendes technisch geschultes Personal verlangen, und zweitens haben sie das Material bestimmter Lehrgebiete in der Weise zu sammeln und zu ordnen,

dass es nach Art einer Bibliothek oder eines Museums allen denen zugänglich gemacht wird, die desselben zur Förderung ihrer Kenntnisse bedürfen.

So lange jeder Einzelne mit der Beschaffung des nöthigen Grundmateriales von vorne anfangen, beispielsweise Gehirne sammeln, herrichten, schneiden und verarbeiten muss, bedeuten diese Vorarbeiten das Opfer einer Reihe von Lebensjahren, und nur der eigentliche Spezialforscher kann dies Opfer bringen. Nun ist aber die Zahl derer, die eine genauere Kenntniss des Gehirnbaues bedürfen, eine bedeutende, sie umfasst ausser den Psychiatern auch die Anatomen, Physiologen, Pathologen, Chirurgen und Psychologen.

Gut eingerichtete Anstalten sollen auch den Nichtspezialisten in der Entwickelungsgeschichte und der Hirnanatomie Gelegenheit bieten, eigene Anschauung von Schnittreihen, guten Modellen und ähnlichen Hilfsmitteln zu gewinnen, sie sollen also einem weiten Kreise wissenschaftlicher Arbeiter zu Gute kommen.

Nach einer anderen Richtung hin können Centralanstalten dadurch sich nützlich erweisen, dass bei ihnen die Dokumente abgeschlossener Arbeiten: Originalpräparate aller Art, Photogramme, Modelle, Tabellen u. dergl. deponirt und damit der Vergleichung nachfolgender Forscher zugängig gemacht werden. Einmal ins Leben gerufen werden solche Anstalten gleich anderen ähnlichen Schöpfungen für den wissenschaftlichen Fortschritt eine Bedeutung gewinnen, deren Umfang im Beginn schwer zu übersehen ist.

Fassen wir die Motive, die für den gestellten Antrag sprechen, nochmals zusammen, so haben wir *für das Gebiet der Entwickelungsgeschichte* folgende Gesichtspunkte: das Material ist schwer zu beschaffen, seine Erreichung ist vom Zufall abhängig und nur in langen Zeiträumen erreichbar. Der Forscher, dem seltenes Material in die Hände fällt, pflegt es nur ausnahmsweise erschöpfend durchzuarbeiten. In der Regel benutzt er es zur Prüfung besonderer, ihn speziell interessirender Fragen. Sammlung des Materials und möglichst vollständige thatsächliche Ausbeutung desselben ist aber ein dringendes Bedürfniss der Wissenschaft.

Die zur befriedigenden Bearbeitung entwickelungeschichtlichen Materiales uns zu Gebote stehenden Methoden verlangen einen sehr grossen Aufwand von zum Theil technischer Arbeit. Die Kraft des Einzelnen reicht nur zu Bewältigung verhältnissmässig

enger Gebiete aus. Organische Verknüpfung der Arbeit vieler kann hier Hilfe schaffen.

Das *eingehende Studium des Gehirnbaues* verlangt vor Allem eine genaue Kenntniss der Gehirnentwickelung und insoweit gelten auch bei ihm die obenerwähnten Erwägungen. Für die Bearbeitung des ausgebildeten Organes treten neue Schwierigkeiten hinzu, theils solche des Materiales, theils solche der Methodik, die auch ihrerseits eine systematische Bekämpfung verlangen. Zu einer vollen Beherrschung des so wichtigen Organes wird man wohl nur dadurch gelangen, dass man es, etwa nach den Grundzügen topographischer Bureaux, planmässig durcharbeitet. Im Uebrigen aber gilt vom Gehirn mehr als von irgend einem anderen Körpergebilde, dass sein Studium weiten Kreisen von Betheiligten möglichst zugänglich gemacht und erleichtert werden sollte.

Es bedarf noch eingehender Berathungen, um den besten Weg zur Erreichung hirnanatomischer und entwickelungsgeschichtlicher Centralanstalten ausfindig zu machen und um die zweckmässigste Ausdehnung ihrer Aufgaben festzustellen. Der einzuschlagende Weg wird vielleicht in verschiedenen Staaten ein etwas verschiedener sein. Für das Zusammenarbeiten der demselben Ziel zustrebenden Institutionen bildet dies natürlich kein Hinderniss. Eine Angliederung an bestehende grössere Universitätsanstalten wird sich mancherorts als leichtest erreichbarer Anfang herausstellen. Dabei ist aber eine scharf ausgesprochene Trennung der Verwaltungsgrundzüge nothwendig. Die mehr oder weniger freie Behandlung der dem akademischen Unterricht und der Spezialforschung des Direktors dienenden Universitätssammlungen, und vor Allem die Discontinuität der leitenden Gesichtspunkte müssen ausgeschlossen sein, und die Centralanstalt muss nach ihren eigenen, festbestimmten Grundsätzen verwaltet werden.

Druckfertig erklärt 11. III. 1901.]

Hermann Credner: *Das sächsische Schüttergebiet des Sudetischen Erdbebens vom 10. Januar 1901.* Mit einer Textfigur. (Vorgetragen in der Sitzung vom 4. März 1901.)

Hierzu Tafel I.

In der Frühe des 10. Januars dieses Jahres vollzog sich im Quellgebiet der Aupa und Mettau, am Südabfall der Sudeten in dem Landstriche zwischen Marschendorf, Trautenau, Adersbach und Nachod ein Erdbeben in für Mittel-Europa seltener Heftigkeit. Von diesem epicentralen Gebiete aus folgten seine Wellen dem Sudetischen Zuge nach SO bis nach Mähren, nach NW bis weit nach Sachsen hinein und breiteten sich in elliptischem Verlaufe nach Norden bis in die schlesische Niederung, nach Süden bis jenseits der Städte Deutschbrod und Prag aus. Das Epicentrum und der grösste Theil des Schüttergebiets dieses Bebens gehört demnach Böhmen und Schlesien an, während nur das am weitesten nach WNW vorgeschobene Ende der Schütterellipse nach Sachsen und noch über dessen Nordgrenze hinausgreift.

Auf den Verfolg der seismischen Erscheinungen innerhalb des *sächsischen Areales* beschränkt sich unsere Aufgabe. Die hierbei gewonnenen kartographischen und textlichen, im folgenden Aufsatze niedergelegten Resultate werden sich mit denen des Herrn Prof. Dr. Frech in Breslau und des Herrn Prof. Dr. Woldřich in Prag auf schlesischem und böhmischem Boden zu einem einheitlichen Bilde der Wirkungen und der Verbreitung dieses grossen Sudetischen Bebens vereinen. Meinen beiden Collegen, deren Forschungskreis das Epicentrum dieses Erdbebens angehört, bleibt die interessante Aufgabe vorbehalten, die Ursächlichkeit des letzteren klar zu legen, während wir uns auf eine rein beschreibende Darstellung seines sächsischen Erschütterungsgebietes beschränkt sehen.

Beim Verfolge des Erdbebens vom 10. Januar innerhalb des Königreichs Sachsen hat sich die Organisation unseres sächsischen

Erdbebenbeobachtungs-Dienstes wiederum vorzüglich bewährt. Galt dieses bereits bei früheren Gelegenheiten von den Leistungen der im Vogtland und im südwestlichen Erzgebirge vertheilten Referenten, so wurden diesmal diejenigen Herren in Anspruch genommen, welche dieses Amtes in den östlichen und nördlichen Theilen des Königreichs walten. In der That haben sich dieselben diesen ihren seismologischen Obliegenheiten mit dem grössten Eifer und Erfolg gewidmet und durch persönliches Einziehen von Beobachtungen, Aussendung von Fragebogen, Erlass eines Aufrufes in den Zeitungen, Sichtung des aus ihren Bezirken eingelaufenen Materiales und Einsendung desselben an die durch mich vertretene Centralstelle die Grundlage zu der jetzt vorliegenden einheitlichen kartographischen und beschreibenden Darstellung geliefert. Diese Arbeitsleistung vertheilte sich auf die folgenden Referenten der Königl. sächsischen Erdbebencommission:

Herrn Prof. Dr. O. FRIEDRICH in Zittau für die Südlausitz,

Herrn Seminaroberlehrer Dr. O. BEYER in Bautzen für die Nordlausitz,

Herrn Prof. Dr. HIBSCH in Tetschen-Liebwerd für die an Sachsen grenzenden Elbgebiete,

Herrn Seminaroberlehrer WOLFF in Pirna für das sächsische Elbthalgebirge,

Herrn Kgl. Sectionsgeologen Prof. SIEGERT in Dresden für Dresden und seine Umgebung, ferner

Herrn Oberlehrer MIETH in Gottleuba,

Herrn Apotheker Dr. HOLFERT in Altenberg und

Herrn Bergverwalter MORGENSTERN in Zinnwald für das östliche Erzgebirge, letzteren bis zu dessen böhmischem Absturze,

Herrn Prof. Dr. BECK in Freiberg für die Freiberger Gegend,

Herrn Prof. Dr. STERZEL in Chemnitz für den Chemnitzer Bezirk,

Herrn Oberlehrer Dr. DANZIG in Rochlitz für das westliche Granulitgebirge und dessen Vorland,

Herrn Oberlehrer Dr. FRICKER in Döbeln für das nördliche Granulitgebirge und dessen Vorland.

Ausserdem waren im Verfolg einer von Seiten der *Kgl. Generaldirection der sächsischen Staatseisenbahnen* an alle Stationen der letzteren ergangenen Verordnung eine Anzahl telegraphischer Meldungen über die von diesen beobachteten Erschütterungen eingelaufen, die sich als höchst werthvoll erwiesen. Gleiches gilt

von den Berichten, welche bei dem *Kgl. meteorologischen Institut* zu Chemnitz eingegangen waren und welche mir dessen Director, Herr Prof. Dr. Schreiber, gefälligst überwies.

Mit der Form unserer kurzen übersichtlichen Darstellung liess es sich nicht vereinen, die grosse Zahl derjenigen mit Namen aufzuführen, welche über ihre Beobachtungen entweder an die Herren Referenten oder direct an mich Bericht erstattet haben. Ihnen allen, sowie den genannten Behörden, Instituten und Referenten sei auch an dieser Stelle der verbindlichste Dank für die Bethätigung ihres Interesses am wissenschaftlichen Verfolg eines Erdbebens ausgesprochen, von welchem sich nach den Wahrnehmungen innerhalb dreier Nachbarstaaten herausgestellt hat, dass es mit Bezug auf die Ausdehnung seines Schüttergebietes in der seismologischen Geschichte Mittel-Europas seit dem grossen Beben des Jahres 1872 einzig dasteht, wenn es auch in seiner *Dauer* mit den 37 und 52 tägigen vogtländisch-böhmischen Erdbeben im Herbst 1897 und im Sommer 1900 nicht vergleichbar ist.

Ebenso dankbar ist es anzuerkennen, dass mir die Herren Prof. Dr. Frech und Prof. Dr. Woldřich durch freundliche Ueberlassung der kartographischen Wiedergabe der Beobachtungen innerhalb ihres Antheiles an dem Schüttergebiet des Bebens vom 10. Januar einerseits einen Ueberblick über die Gesammtheit des letzteren, anderseits einen controlirenden Vergleich meiner eigenen Darstellung des sächsischen Grenzareales ermöglicht haben.

Die Hunderte von höchst ausführlichen bis ganz kurzen Berichten, die an hiesiger Centralstelle eingegangen sind, wie es wohl üblich ist, wörtlich oder nach redactioneller Umarbeitung abzudrucken, darauf ist verzichtet worden. Ich selbst habe zwar früher dieser Methode gehuldigt, mich aber später beim Verfolge von nun 53 sächsischen, wesentlich vogtländischen und erzgebirgischen Erdbeben und z. Th. mehrtägigen, ja mehrwöchentlichen Erdbebenschwärmen auf Grund von weit über 1000 Berichten davon überzeugt, mit welchem Maass von kritischer Vorsicht die Mehrzahl solcher Nachrichten mit Bezug auf Eintrittszeit, Dauer, Richtung und Stärkegrad der Erschütterung, sowie auf das dieselbe begleitende Geräusch zu verwerthen sind. Selbst auf Meldungen über innerhalb des allgemeinen, namentlich aber des mehr peripherischen Schüttergebietes immun gebliebene Plätze ist nach meiner Erfahrung kein Gewicht zu legen. So wurden

in gar manchen Fällen aus Ortschaften in Sachsen, wo es doch gelungen ist, die besondere Aufmerksamkeit der Bevölkerung auf Erdbebenerscheinungen zu lenken, mit Bestimmtheit negative Resultate gemeldet, während sich durch nochmalige Umfrage oder durch spätere zufällige Mittheilungen die dort stattgehabte Erschütterung doch noch constatiren liess.

Ueberhaupt aber spiegelt sich die Wirkungsweise und danach der Stärkegrad unserer heimatlichen, immerhin nur wenig heftigen Erdbeben im Allgemeinen nicht in mehr oder weniger vollständigen und zerstreuten Einzelbeobachtungen, sondern in der gruppenweisen Zusammenfassung derselben wieder. Es sind eben die Summen der seismischen Aeusserungen und namentlich deren Maximalwirkungen innerhalb eng begrenzter Gebiete, also innerhalb einer Stadt oder eines ländlichen Bezirkes, welche für die Bestimmung des dortigen Stärkegrades der Erdbewegung massgebend sind. Nach diesem Prozess der geistigen Verschmelzung schrumpft der demselben unterworfene Stoss von Beobachtungsmaterial auf wenige Seiten einer durch ein Uebersichtskärtchen illustrirten textlichen Darstellung zusammen.

Die viel benutzte Rossi'sche seismische Skala liess sich nicht ohne Weiteres zur Feststellung der örtlichen Schütterstärken des Sudetischen Bebens auf sächsischem Boden verwenden. Gleiches gilt nach den sehr gefälligen Mittheilungen der Herren Frech und Woldřich auch von dem schlesischen und böhmischen Schüttergebiete. Die Schwierigkeit einer derartigen und überhaupt jeder Abgrenzung der verschiedengradigen Schütterzonen liegt in der Natur eines Ereignisses, bei dessen Vollzug sich die Energie der Bodenbewegung vom Epicentrum aus in peripherischer Richtung ganz allmählich abschwächt, so dass theoretisch jeder Radius des Schütterkreises eine continuirliche Reihe von abnehmenden Schütterstärken aufweisen müsste. Thatsächlich freilich erleidet diese Gleichmässigkeit durch örtliche Einflüsse, unter denen die Untergrundsverhältnisse und Bauweise der Häuser eine Hauptrolle spielen, lokale Störungen, deshalb gewährt auch nur ein ziemlich dichtes Netz von Einzelbeobachtungen die Möglichkeit, den für einen bestimmten Bezirk normalen Stärkegrad der ihn durcheilenden Oberflächenwellen ausfindig zu machen. Ob und wie viele verschiedengradige Schütterzonen zur Erzielung des Gesammtbildes eines Bebens von einander abzugliedern sind, unterliegt sonach einerseits der Reichlichkeit und Zuverlässigkeit

des Beobachtungsmateriales, anderseits der kritischen, also immerhin subjectiven Abschätzung von Seiten der Beobachter, deshalb wird auch die kartographische Darstellung selbst eines und desselben Bebens durch zwei von einander unabhängige Forscher wohl kaum in ihrer Zonenabgrenzung völlig übereinstimmen.

Das epicentrale Schüttergebiet des Sudetischen Erdbebens gehört nach den vorläufigen kurzen Mittheilungen von Michael in der Zeitschrift für praktische Geologie 1901 S. 74 und nach den auf viel reicherem und bereits gesichtetem Material basirten Kartenskizzen der Herren Frech und Woldřich ungefähr der mittleren Erstreckung des Sudetenzuges an, liegt also mindestens 60 km weit ausserhalb der sächsischen Grenzen. Beide Forscher bezeichnen übereinstimmend die Stärke der Erschütterung innerhalb dieses epicentralen Areales als dem 7. Grad der Rossi'schen Skala entsprechend.

Auf. Grund der verschiedengradigen Schütterwirkung der von dort ausgehenden, einen grossen Theil des Königreichs Sachsen durchlaufenden Oberflächenwellen liess sich eine Gliederung des sächsischen Erdbebengebietes in zwei Zonen bewerkstelligen, die jedoch in der Nähe der von uns construirten beiderseitigen Grenze mit einander verfliessen, so dass sie streckenweise, z. B. in der Südlausitz an einer gewissen Unsicherheit leidet, während eine peripherische Abgrenzung der äusseren Zone überhaupt unmöglich ist. Einige ganz isolirte, z. Th. weit in das sächsische Flachland vorgeschobene Beobachtungspunkte und eine Reihe am Schluss des Aufsatzes hervorzuhebender Wahrnehmungen deuten vielmehr darauf hin, dass sich das makroseismische Gebiet des Sudetischen Bebens noch weiter nach N und NW fortsetzt, als der farbige Aufdruck auf unserem Uebersichtskärtchen reicht, wenn auch dort die Schüttererscheinungen so geringgradig waren, dass sie der allgemeinen Wahrnehmung entgingen.

Die beiden erstgenannten Schütterzonen characterisiren sich als:

1. *Gebiet hochgradiger Schütterstärken*, welche dem Stärkegrad 6—5 der Rossi'schen Skala entsprechen würden.

2. *Gebiet geringerer Schütterstärken*, entsprechend Grad 4—3 Rossi's.

Ausserhalb des letzteren war, wie gesagt, noch eine Anzahl *isolirter peripherischer Beobachtungspunkte* zu verzeichnen.

Die *Zeitbestimmungen* des Vollzugs des Erdbebens im sächsischen Schüttergebiete sind sämmtlich wenig genau und be-

schränken sich meist auf die Angabe „etwa“ oder „kurz nach halb vier“ oder beruhen auf uncontrolirbaren Ortszeiten. Selbst die sich auf mitteleuropäische Zeit beziehenden telegraphischen Berichte einer Anzahl von Eisenbahnstationsvorständen an die Königl. Generaldirection in Dresden schwanken zwischen h. 3. 30 und h. 3. 38, so dass auch sie zur Construction von Homoseisten und zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen nicht tauglich sind.

Dahingegen herrscht in den Angaben über die *Richtung* der letzteren eine auffällige Uebereinstimmung. Unter den 33 uns vorliegenden Mittheilungen über die Bewegungsrichtung der den Beobachtungsort durchlaufenden Wellen wird dieselbe von nicht weniger denn 28 als eine ost-westliche bis südost-nordwestliche angegeben und zwar stützt sich unter diesen eine beträchtliche Zahl nicht bloss auf eine allgemeine Schätzung der Himmelsgegenden, sondern auf ganz bestimmte Beobachtungen und auf am anderen Morgen erfolgte Kompass-Messungen, welche jene Wahrnehmungen erhärten. Diese Einmüthigkeit wirkt auf den Forscher, welcher Gelegenheit gehabt hat, das über eine grosse Zahl von anderen Beben gelieferte Beobachtungsmaterial zu verarbeiten, geradezu überraschend, da sich sonst die Angaben über die Richtung der seismischen Bewegung derart zu widersprechen pflegen, dass deren Verwerthung ausgeschlossen ist. In dem jetzt behandelten Falle vertheilen sich diese annähernd übereinstimmenden Beobachtungen auf das gesammte sächsische Schüttergebiet und entsprechen ziemlich genau der theoretisch vorauszusetzenden Fortpflanzungsrichtung der von dem im OSO gelegenen Epicentrum ausgehenden Oberflächenwellen.

Aus den vorliegenden Berichten lässt sich eine Gesetzmässigkeit in der *zeitlichen Folge der Erderschütterung* und des zugehörigen donnerartigen, rasselnden, dumpfdröhnenden *Geräusches* nicht erkennen. Die meisten der Berichterstatter bezeichnen dasselbe als gleichzeitig mit dem Stoss, einige als ihm vorausgehend und noch wenigere als ihm folgend, ohne dass sich diese Meldungen nach einer bestimmten Regel gruppiren, — werden doch sogar mehrfach aus ein und demselben Orte gegentheilige Reihenfolgen angegeben. Dagegen stimmen sämmtliche Meldungen aus den an der äussersten Peripherie des makroseismischen Schüttergebietes gelegenen Ortschaften, also einerseits aus Klix und Milkel in der nördlichen Lausitz, anderseits aus Hohenfichte, Chemnitz, Cossen,

Rochlitzer Berg und Leipzig darin überein, dass dort nirgends ein begleitendes Geräusch wahrgenommen worden ist.

Erwähnung verdient noch die sich in vielen Berichten aus allen Theilen des sächsischen Erschütterungsareales wiederholende Mittheilung, dass sich der in jener Erdbebennacht heftig, ja sturmartig wehende Wind direct vor Eintritt der Erschütterung gelegt und dann nach kurzer Ruhepause wieder eingesetzt habe.

I. Das sächsische Gebiet hochgradiger Schütterstärken.

(Vergl. das Kärtchen auf Tafel I.)

Das sich der Peripherie des epicentralen Areales anschliessende hochgradige Schüttergebiet des Erdbebens vom 10. Januar bildet nach den bis jetzt an die Oeffentlichkeit gelangten Nachrichten, namentlich aber nach den bereits mehrfach erwähnten, von den Herren Frech und Woldřich freundlichst zur Verfügung gestellten Kartenskizzen zu schliessen, eine von SO nach NW streichende Zone, welche mit ihrer Längsaxe dem gesammten Sudetenzuge bis zum Iser- und Lausitzer Gebirge folgt. Hier überschreitet sie die tief ausgezackte Grenze Sachsens. Auf der Nordseite der letzteren deckt ihre Fortsetzung die sächsische Südlausitz, in Nordböhmen hingegen den westlichen Abschnitt des Isergebirges, sowie den bei weitem grössten Theil des Lausitzer Gebirges und dessen südliches Vorland. Sie umfasst hier die Berggegend von Friedland, sowie das Gelände mit den Orten Gablonz, Reichenberg, Kratzau, Grottau, Gabel, Zwickau und Rumburg südlich bis Aicha und Niemes, aus denen allen Meldungen über seismische Erscheinungen vom Stärkegrad 5—6 eingelaufen sind. In dieses böhmische Schütterareal schiebt sich von Norden her wie ein stumpfer Keil die *Südlausitz* ein. Sie, deren Centrum die Stadt *Zittau* bildet, stellt den *pleistoseismischen Bezirk des sächsischen Schüttergebietes* vor und ist somit für uns der Ausgangspunkt für den weiteren Verfolg des Erdbebens.

Von den dortigen Wirkungen des letzteren lässt sich nach der Gesammtheit der eingegangenen Berichte folgendes Bild entwerfen: In der Frühe des 10. Januar und zwar wenige Minuten nach $3^h\ 30^m$ erschüttern zwei heftige Erdbebenwellen mit

nachfolgendem Erzittern und begleitet von dumpfem oder rasselndem Donnerrollen den Grund und Boden. Häuser wanken oder zittern, Mauern dröhnen und knistern, Thüren klappern im Schloss oder springen auf, Kalk zwischen den Dachziegeln bröckelt ab (Seifhennersdorf), die Betten und Möbel schwanken wellenförmig, Bilder pendeln, Geschirr und Gläser klirren und stossen an einander, Pendeluhren bleiben stehen (Oybin, Zittau, Seifhennersdorf, Rumburg), leicht bewegliche Gegenstände verschieben sich (Gross-Schönau, Ober-Oderwitz) oder fallen um (Lückendorf, Neuhörnitz, Wetzwalde). Einzelne Bilder, Vogelbauer, Schlüssel und dergleichen fallen von der Wand (Leutersdorf, Neuhörnitz), aufgeschichtetes Holz stürzt zusammen (Hainewalde), aufgehäufte Kartoffeln rollen herab (Rumburg). In Neu-Gersdorf versagt das Wasser mehrerer Pumpbrunnen für die nächsten Tage, in Wetzwalde östlich von Zittau bricht im Dorfbach eine Quelle lehmigen Wassers hervor. Das Erdbeben weckt zahlreiche Schläfer, in einigen Dörfern an der sächsisch-böhmischen Grenze, so in Oybin und Lückendorf die Mehrzahl der Bewohner, von denen einzelne — in Oybin viele — erschreckt auf die Strasse stürzen. Stubenvögel fallen von den Sitzstangen und flattern wild im Käfig, so dass sie sich Federn ausstossen.

Die Summe dieser Wirkungen des Erdbebens würde ungefähr dem Stärkegrad 6 der seismischen Skala Rossi's entsprechen. Das von ihnen innerhalb der *sächsischen Süd-Lausitz* betroffene Areal hat nur eine geringe Ausdehnung und erstreckt sich von Reichenau, Wetzwalde, Kratzau und Grottau aus in westlicher Richtung über die Neisse und von da über die Orte Lückendorf, Oybin, Zittau, Hörnitz, Gross-Schönau, Hainewalde, Seifhennersdorf und Neu-Gersdorf bis in die Nachbarschaft von Ober-Oderwitz, Eibau und Rumburg. Im Süden schliesst sich dasselbe auf der Linie Wetzwalde-Grottau-Lückendorf an das gleichgradige Schüttergebiet Nordböhmens an und reicht im Norden nicht weiter wie in die Breite von Neu-Gersdorf und Ober-Oderwitz.

Während es in dieser Richtung ziemlich rasch mit der seismischen Zone von geringeren Schütterstärken verfliesst, machen sich nach *Westen* zu ganz andere Verhältnisse geltend, die augenscheinlich mit dem geologischen Aufbau des östlichen Sachsens und der angrenzenden böhmischen Landstriche in ursächlichem Zusammenhang stehen.

Das Lausitzer Gebirge und sein südliches Vorland setzen

sich, abgesehen von dem palaeozoischen Schieferwalle des Jeschken zusammen aus dem Granit des Lausitzer Massivs und den im Süden an ihm abstossenden Quader- und Pläner-Complexen der oberen Kreideformation. Die vertikale bis überhangende Grenzfläche zwischen beiden wird bekanntlich von der grossen Lausitzer Dislocation gebildet, welche vom Jeschken aus, freilich nicht geradlinig, sondern mit wiederholten winkeligen oder bogigen Absätzen in westnordwestlicher Richtung bis in die Nachbarschaft von Meissen zu verfolgen ist (vergl. das Kärtchen Tafel I). Derjenige Flügel der Kreideformation, welcher dem sich auf dieser ganzen Erstreckung emporschiebenden Lausitzer Granit und Meissner Syenit aufgelagert war und auf dessen Rücken allmählich bis zu mehreren hundert Metern über das südwestlich angrenzende Quaderterrain emporstieg, verfiel während dieses lang dauernden Hebungsaktes bis auf einige geringfügige Lappen der Denudation. Dem gegenüber blieb der dem nordöstlichen Erzgebirge auf- und angelagerte Südwestflügel der oberen Kreide, wenn auch randlich durch Denudation zerschlitzt und im Innern durch Erosion tief eingefurcht, erhalten und bildet jetzt zwischen der Lausitzer Dislocationslinie, die ihn im Nordosten abschneidet, und seiner ursprünglichen erzgebirgischen Ablagerungsgrenze im Südwesten einen verhältnissmässig schmalen Streifen, der sich, von der Elbe durchströmt, von der böhmisch-sächsischen Grenze aus in nordwestlicher Richtung und in etwa 60 km Länge bis nach Meissen erstreckt.

Dieser Streifen von cretaceischem Quader und Pläner ist es, in welchem sich die seismischen Oberflächenwellen von der Süd-Lausitz und dem anliegenden Nordböhmen aus, ununterbrochen innerhalb des nämlichen, fast schwebenden Schichtencomplexes und augenscheinlich geleitet durch die Lausitzer Dislocation, nach seiner ganzen Länge in wenig verminderter Kraft fortpflanzten. In ihm äusserten sie sich deshalb durch viel intensivere Wirkungen, als in dem beiderseits angrenzenden von ihm durch tektonische Discontinuitäten getrennten lausitzer und erzgebirgischen Areale und erreichten selbst noch im äussersten Nordwesten dieses Striches, nämlich bis über Dresden hinaus eine Schütterstärke, die derjenigen des pleistoseismischen südlausitzer Gebiets nahe kommt. Aus diesem Grunde gelangte auch die Richtung der diese einheitliche, geologisch individualisirte Zone ungebrochen durchziehenden Erdbebenwellen zum reinsten Ausdruck und wird inner-

halb des ganzen Streifens durchweg und übereinstimmend als eine von Ost nach West oder von Südost nach Nordwest, also in der Längsrichtung des Streifens verlaufende empfunden.

Entsprechend dem verhältnissmässig hohen Grade der Schütterstärke innerhalb dieses Landstriches und der durch sie bewirkten Aufschreckung seiner Bewohner ist die Anzahl der Beobachtungsorte gerade innerhalb dieses Landstriches eine sehr grosse, so dass sie sich ziemlich eng, zwischen Pirna und Dresden sogar dicht aneinander reihen. Hierbei beschränken sie sich aber nicht etwa nur auf das Elbthal, sondern vertheilen sich auch auf die dasselbe begleitenden Hochflächen (Hohnstein, Weisser Hirsch, Gross-Cotta, Reinhardtsdorf), ja auf die höchsten Emporragungen des angrenzenden Quadersandsteingebirges (Grosser Winterberg, Pfaffenstein, Lilienstein).

Im Ganzen sind aus folgenden Städten und Ortschaften des elbthalgebirgischen Streifens hochgradiger Erschütterung zum Theil zahlreiche und sehr ausführliche Berichte oder wenigstens kurze Meldungen über letztere eingegangen:

Rechts der Elbe von Südosten nach Nordwesten: Herrnskretschen, Schmilka, Grosser Winterberg, Schandau, Wendischfähre, Lilienstein, Hohnstein, Posta, Copitz, Lohmen, Pillnitz, Hosterwitz, Laubegast, Niederpoyritz, Wachwitz, Loschwitz, Weisser Hirsch, Dresden-Neustadt, Pieschen, Radebeul, Lössnitz.

Links der Elbe von Nordwesten nach Südosten: Priessnitz, Löbtau, Plauen, Potschappel, Dresden-Altstadt, Strehlen, Striessen, Blasewitz, Gruna, Klein-Zschachwitz, Pirna, Zehista, Gross-Cotta, Leupoldishain, Königstein, Pfaffenstein, Klein-Hennersdorf, Reinhardtsdorf, Schöna.

Zur Characteristik der verhältnissmässig hochgradigen Erdbebenerscheinungen dieses Schütterstreifens möge die beispielsweise Wiedergabe der Berichte aus einigen der oben aufgezählten Orte und Ortsgruppen dienen:

Schmilka-Herrnskretschen-Schöna. Ein heftiges, mit donnerartigem Rasseln verbundenes, von Südost nach Nordwest verlaufendes Beben setzt Meubel und Betten in wellenförmig schaukelnde Bewegung, die fast 4 Secunden anhält; im Erdgeschoss eines Hauses springen sämmtliche Thüren auf, offne Thüren schwingen, die Fenster klirren, Bilder und Hängelampen pendeln, leichte Gegenstände fallen um oder herab, Schläfer erwachen, Hausthiere werden unruhig, ein paar Füchse springen

in ihrem Käfig wie toll herum, Vögel fallen von ihren Sitzstangen.

In *Hohnstein* macht sich die Erschütterung in so hohem Grade bemerklich, dass die in der Krankenstation der Strafanstalt untergebrachten Gefangenen das Umstürzen ihrer Betten befürchten und nur mit Mühe beruhigt werden können.

In *Pirna* setzen die heftigen Schwankungen des Bodens die Betten derartig in auf- und niedergehende Bewegung, dass Schlafende wach gerüttelt werden und manche entsetzt aus den Betten springen; Oefen und schwere Meubel schaukeln, Fenster und Geschirr klirren.

Im *Keppgrund* bei Pillnitz löst sich ein kleiner Anbau aus der Verbindung mit dem Haus, eine bereits gelockerte Terrassenmauer stürzt ein, die zum Brunnen gefasste Quelle versiecht fast vollständig und gewinnt erst nach einigen Tagen ihre alte Wassermenge wieder.

Aus *Dresden* nebst seinen Vor- und Nachbarorten liegt eine Fülle von z. Th. sehr ausführlichen Berichten vor. Die in ihnen zerstreuten Einzelbeobachtungen lassen sich zum folgenden Bild der dortigen Erdbebenerscheinungen verschmelzen: Zwei heftige stossförmige Erschütterungen gefolgt von fibrirendem Erzittern und begleitet von donnerartigem Brausen und Dröhnen erschrecken Wachende und wecken einzelne Schlafende. Die Zahl der Beobachter ist namentlich in den Vorstädten eine verhältnissmässig grosse, von diesen wiederum sind ziemlich viele durch das Beben zum Erwachen gebracht worden. Auch im Uebrigen entsprechen die seismischen Wirkungen den bereits beschriebenen: Wände knistern, Fussboden, Balken und Fensterrahmen knacken, Thüren, Fenster und Oefen schüttern heftig, offne Thüren schlagen zu und auf, die Betten, die in der Richtung des Stosses stehen, werden wie durch eine Woge erst mit dem einen, dann mit dem andern Ende gehoben und gesenkt, in solchen, die quer zum Stoss stehen, werden die Erwachenden ruckweise hin- und hergerüttelt, schwere Meubel schwanken und krachen, Geschirr klirrt und klappert, Bilder pendeln oder werden in schiefe Richtung gebracht, Obst und Nippessachen fallen von den Wandbrettern, bei manchen Personen stellt sich ein Angstzustand, Uebelsein oder das Gefühl beginnender Seekrankheit ein, Hausthiere und Stubenvögel werden von Schreck ergriffen. Auch über ganz vereinzelte Fälle von Rissbildungen in Wänden und an Decken wird berichtet, so aus

dem Eisenbahnbeamtenhaus (laut telegraphischer Meldung des Vorstandes des Bahnhofs Wettiner Strasse an die K. Generaldirection der sächsischen Eisenbahnen), ferner aus dem Haus Kleine Packhofstrasse 6 in Dresden sowie Sedlitzer Strasse 11. Auch Abblättern des Kalkanstriches von Zimmerdecken wird gemeldet (Villa Albrechtsberg). Höchst interessant ist die an dem 243 m tiefen *artesischen Brunnen* auf dem Albertplatz zu Dresden-Neustadt gemachte Beobachtung, wonach dessen früher klarer Strahl in der Frühe des 10. Januar eine lehmbraune Färbung zeigte, die erst gegen Mittag wieder einer farblosen Beschaffenheit des Wassers Platz machte (Herr Oberlehrer Hallig.).

In fast der nämlichen Schütterstärke wie das Dresdner Gebiet der jungdiluvialen und alluvialen Elbaue scheint das Beben die Ortschaft *Weisser Hirsch*, auf dem die letztere um 120—130 m überhöhenden Steilrande des Granitplateaus betroffen zu haben.

Die äusserste Nordwestgrenze der Hochgradigkeit innerhalb des elbthalgebirgischen Schütterstreifens dürfte in der Gegend von Coswig, also etwa 12 km nordwestlich von Dresden zu suchen sein. Jedenfalls äusserte sich das Beben in *Nieder-Lössnitz* noch ebenso intensiv wie in Dresden und auch Bewohner von *Coswig* fühlten sich mit ihren Betten kräftig gehoben und gesenkt.

Misst man die Schüttererscheinungen der Dresdner Gegend an denen des Lausitzer Gebirges und dessen beiderseitigen Vorlandes ab, so verweisen die letzteren auf einen um etwas höheren Grad seismischer Bewegung als die ersteren. In dem elbthalgebirgischen Schütterstreifen genügte dieselbe nicht mehr, um Pendeluhren zum Stehen, Bilder und dergleichen zum Sturze und viele Schläfer zum Erwachen zu bringen oder Bewohner, wenn auch nur vereinzelter Ortschaften, in ihrem Schrecken auf die Strasse zu treiben, wie solches in der Lausitz lokal der Fall war. Jedenfalls aber markirt sich der Unterschied in der beiderseitigen Schütterstärke weder räumlich noch dynamisch scharf genug, um nach ihm eine Abgrenzung beider Areale zu ermöglichen. Auf unserer Uebersichtskarte sind sie deshalb als „*Gebiet hochgradiger Schütterstärken*", welche ungefähr dem 6. und 5. Grad der Rossi'schen Skala entsprechen, zu einheitlicher Darstellung gelangt.

II. Das sächsische Gebiet geringerer Schütterstärken.

(Vergl. das Kärtchen auf Tafel I.)

Dieselbe Unsicherheit erwächst bei dem Versuche einer Abgrenzung dieses Gebietes von der *Zone nächst geringerer Schütterstärken*, da sich in derselben naturgemäss die Mehrzahl der nämlichen seismischen Wirkungen geltend gemacht hat, wie in der Hauptschütterzone, nur dass sie nicht mehr die gleiche Intensität erlangten. So reicht jetzt der Grad der Erschütterung bis auf wenige Ausnahmen nicht mehr aus, um Schlafende zu wecken oder leichte Gegenstände zum Fall zu bringen. Auch die Zahl der Beobachter in den betroffenen Ortschaften vermindert sich, bis sie sich auf wenige einzelne Fälle reducirt. Dahingegen ist das Beben noch lebhaft genug, um in zahlreichen und streckenweise sich ziemlich eng aneinander schaarenden Ortschaften, wenn auch, wie gesagt, von meist nur Wenigen, als zwei rasch auf einander folgende Wellenbewegungen mit nachfolgendem Zittern bemerkt zu werden, jedoch werden die Angaben über deren Verlaufsrichtung unsicher und widersprechen sich öfters. In Folge dieser geringeren Schärfe der seismischen Erscheinungen sowie von mancherlei Einflüssen äusserer Bedingungen, z. B. des Baues, des Untergrundes, der Lage der Häuser sowie der grösseren oder geringeren Empfindsamkeit der Beobachter leiden die Angaben über das Maass der Schüttererscheinungen an einer auffallenden Ungleichmässigkeit, nach welcher selbst benachbarten Beobachtungspunkten ganz verschiedene Schütterstärken zuzutheilen wären. Als maassgebend für den Verlauf und die periphere Erstreckung dieser Zone müssen deshalb die in ihr wahrgenommenen höchstgradigen seismischen Wirkungen gelten, weil in diesen die Höhe des Schüttergrades zum Ausdruck gelangt.

Ueber diese ergeben die in grosser Zahl vorliegenden Berichte das folgende Bild: Betten gerathen in wellenförmig schaukelnde und zitternde Bewegung, Wände wanken und knistern, offne Thüren bewegen sich in den Angeln, Oefen und Fenster klappern, Porzellan und Glasgeschirr sowie Lampen klirren, die Pendel von Wanduhren schlagen unregelmässig aus, die Gewichte anderer schlagen an ihren Hintergrund an, leichte Bilder schwanken hin und her, donnerartiges dröhnendes Geräusch macht sich hör-

bar. Die Zahl der Beobachter innerhalb der betroffenen Orte ist nur eine geringe, von diesen sind nur wenige durch das Beben aus dem Schlafe geweckt worden. In einem Dorfe (Wurschen bei Pommritz) wird dasselbe durch den Nachtwächter im Freien wahrgenommen. Thiere werden von Angst und Unruhe befallen. Die Gesammtheit dieser Erscheinungen entspricht dem Stärkegrad 4 der ROSSI'schen Skala.

Ihre breiteste Entfaltung hat diese Zone geringerer Schütterstärken im Norden der Hauptzone, nämlich in dem Lausitzer Hügellande, mit welchem sie sich fast vollständig deckt, indem sie sich von der Neisse aus in einer Breite von 25—30 km westlich bis jenseits Pulsnitz hinzieht. Ihr gehören die Städte Ostritz, Görlitz, Herrnhut, Bernstadt, Ebersbach, Neusalza, Löbau, Schluckenau, Schirgiswalde, Bautzen, Neustadt, Stolpen, Bischofswerda, Radeberg und Pulsnitz nebst den zwischen ihnen zerstreuten Ortschaften an. Von der westlichen Lausitz aus erstreckt sie sich nördlich von Dresden vorbei nach Westen bis zur Elbe, die sie in der Gegend von Coswig und Meissen erreicht. Hier äussert sich das Beben noch so kräftig, dass einige wenige Bewohner von Meissen und dem benachbarten Ober-Spaar durch die schaukelnde Bewegung ihrer Betten und durch das Klirren des Geschirrs aus dem Schlafe geweckt werden.

Innerhalb dieses seismischen Hofes vollzieht sich eine unverkennbare Abnahme der seismischen Energie in peripherischer Richtung, so dass die Schütterwirkungen in dessen südlichem, der Hauptschütterzone nächst gelegenem Streifen einen höheren Grad erreichen wie in seinem äussersten Norden. So könnte man versucht sein, einzelne Ortschaften des südlichen Striches noch dem Hauptschüttergebiet zuzutheilen, während sich im Norden, z. B. in Bautzen die Wirkungen des Bebens nur noch in so geringer Intensität äussern, dass sie bloss von ganz wenigen der 22000 Bewohner gespürt werden. Freilich machen sich die Schüttererscheinungen in mehreren östlich von dieser Stadt liegenden Ortschaften, z. B. in Wurschen bei Pommritz und in Nechern und Gröditz wiederum in etwas höherem Grade bemerklich.

Im Norden dieser Lausitzer Zone bereits geringerer Schütterstärken klingen die makroseismischen Schwingungen des Bodens langsam aus. An Stelle der ziemlich dichten Schaarung der Beobachtungspunkte treten nur noch einige wenige nach Norden vorgeschobene Ortschaften, so Klix und Milkel an der Spree, von

wo ganz schwache Schaukelbewegungen gemeldet werden, welche schlaflos im Bette Liegende verspürt haben. Dass sich dieselben noch weiter hinaus in das nördlich angrenzende Flachland der Provinz Schlesien erstreckt haben, beweisen die Berichte aus Priebus an der Neisse und aus Sagan, welche Herrn Prof. Dr. Frech zugegangen sind.

Etwas anders wie im Norden liegen die Verhältnisse *entlang der Südwestgrenze* der elbthalgebirgischen Hauptschütterzone. Auch hier müsste man zunächst einen dieser letzteren parallel verlaufenden Streifen erwarten, in welchem die Intensität der Schütterwirkungen derjenigen des Lausitzer Hügellandes gleichkäme. Thatsächlich aber bestätigt sich diese Erwartung nicht, vielmehr liegen aus dem ganzen unmittelbar anstossenden Landstriche, welcher sich aus der Gegend von Meissen-Nossen bis zum böhmischen Absturz des Erzgebirges nach Südosten erstreckt, fast ausnahmslos Beobachtungen vor, welche auf meist nur so schwache seismische Aeusserungen hinweisen, dass diese ohne die peinlichen Umfragen der dortigen Herren Referenten der Berichterstattung vollständig entgangen wären. Eine Folge dieser Geringgradigkeit der Schütterstärken ist es, dass die Beobachtungsorte nicht wie im Lausitzer Hügellande ein verhältnissmässig engmaschiges Netz bilden, sondern isolirte, weitläufig zerstreute Punkte vorstellen. Hätte jedoch den zwischenliegenden Ortschaften die gleiche nachforschende Mühwaltung zugewendet werden können, so würden sich zweifelsohne auch in ihnen einzelne Personen haben ausfindig machen lassen, denen unter besonders günstigen Verhältnissen jene schwache Erschütterung zur Wahrnehmung gelangt ist. Nur der nordöstliche Abschnitt dieser ganzen seismischen Zone, nämlich Döbeln und seine Umgegend ist es, in welchem sich im westlichen Anschluss an die Meissner Fortsetzung des Lausitzer Schüttergebietes intensivere Erdbebenerscheinungen kundgeben. In der Stadt *Döbeln* selbst erreichen dieselben eine auffallende Stärke. Ist auch die Zahl der Beobachter eine nicht grosse, so sind diese doch sämmtlich durch das Schwanken der Betten und Schränke aus dem Schlafe geweckt worden und vernahmen das Rütteln von Thüren oder das Klirren des Geschirrs und ein donnerartiges Geräusch. In einer Wohnung fiel die bereits lockere Simsleiste eines Regulators herab und vom Rande eines nicht ganz fest stehenden Nachttisches wurde der Wecker und ein Wasserglas in ostsüdöstlicher Richtung herabgeschleudert. Ferner hat der Nacht-

wächter einer dortigen Fabrik die Erderschütterung im Freien so stark verspürt, dass er selbst ins Wanken gerieth, während er zugleich das Klirren der Fenster des Fabrikgebäudes und einen aus der Ferne kommenden, hohlen, dumpfen Donner wahrnahm. Im Schulhause des etwa 2 km südlich von Döbeln gelegenen Dorfes *Ebersbach* wurden ebenfalls mehrere Bewohner durch das Beben geweckt, welches sich auch in *Technitz,* 4 km westlich von Döbeln durch Schwanken und Rütteln von Betten und Meubeln sowie durch Knistern der Wände äusserte. In dem etwa 9 km weiter nördlich gelegenen *Ober-Wutzschwitz* hingegen machte sich dasselbe bereits in viel geringerem Grade und zwar durch das Aneinanderklirren leichter Gegenstände und durch die Unruhe der Pferde bemerklich.

Im Vergleiche mit und im Gegensatze zur Döbelner Gegend hat, wie bereits oben bemerkt, das sich von ihr aus über das östliche Erzgebirge bis zu dessen Kamm ausdehnende Gelände nur eine geringfügige Erschütterung erlitten, die nur aus wenigen Orten gemeldet und in diesen von nur ganz vereinzelten Personen verspürt wurde. Dies gilt selbst von der dem Elbthalgebirge nächst gelegenen Stadt *Gottleuba,* wo eine schaukelnde Bewegung der Betten und Meubel nebst dumpf dröhnendem Donner bemerkt wurde und ähnlich von den benachbarten Orten *Gross-Röhrsdorf* bei Burkhardtswalde, *Schlottwitz* und *Oelsengrund,* ebenso aber auch von dem weiter peripherisch gelegenen *Altenberg,* sowie von *Böhmisch-Zinnwald,* woselbst im Pfarrhause eine schwach stossförmig rüttelnde Erschütterung beobachtet wurde. In *Freiberg* hingegen war eine solche kaum mehr wahrnehmbar und wurde deshalb auch nur von ganz wenigen Personen gespürt oder gemeldet.

Aehnlich liegen die Verhältnisse am böhmischen Fusse des erzgebirgischen Absturzes. Während Tetschen und Bodenbach noch der südlichen Randzone des Gebiets hochgradiger Schüttererscheinungen angehören, haben sich die letzteren in den nur 6—8 km weiter auswärts gelegenen Orten *Eulau, Rongstock* und *Tichlowitz* schon ausserordentlich schwach geäussert, sich aber nach Westen zu bis nach *Teplitz-Schönau* bemerklich gemacht, wo in dem isolirt stehenden Hause „Im weissen Hirschen“ ein Schlafender durch eine heftige Schaukelbewegung des Bettes geweckt und heftiges Thürenrütteln und Donnerrollen gehört wurde. Da die Nachfragen des Herrn Dr. med. FISCHL in der Gegend

von Dux, des Herrn Prof. Dr. Köppner in der Umgegend von Komotau und des Herrn Stadtgeologen Knett in dem Saaz-Karlsbader Gelände nach freundlicher Mittheilung dieser Herren nur negative Resultate erzielten, so dürfte die Westgrenze des nordböhmischen Schüttergebietes in der westlichen Nachbarschaft von Teplitz zu suchen sein, was in Uebereinstimmung mit dem Verlauf der erzgebirgischen Schütterzone stehen würde.

In hohem Grade aber muss es überraschen, dass in Sachsen westlich der das östliche Erzgebirge durchquerenden, sehr geringgradigen Schütterzone und zwar sowohl in dem Areal der nördlichen Abdachung des Erzgebirges, wie in dem sich an diese anschliessenden Hügel- und Flachlande mehrorts seismische Erscheinungen beobachtet worden sind, deren Schüttergrad denjenigen der nach obigen Mittheilungen zu vermuthenden peripherischen Grenzzone zum Theil bedeutend übertrifft.

Der südlichste dieser Punkte ist *Hohenfichte*, im Thal der Flöha. Hier wurde das Beben zwar nur von zwei Personen wahrgenommen, die aber beide durch heftiges Rütteln der Betten, Thüren und Fenster aus dem Schlaf geschreckt wurden.

Aus *Chemnitz* hingegen ging trotz des durch die dortigen Zeitungen zu allgemeiner Kunde gebrachten Aufrufs nur eine einzige Meldung ein, nach welcher der Berichterstatter etwa $1/2$ 4 Uhr plötzlich erwacht ist und seine Stubenvögel äusserst aufgeregt und ängstlich in ihren Käfigen herumflattern hörte.

In *Ober-Lichtenau*, etwa 7 km nördlich von Chemnitz, wurde von einem wach Liegenden ein ziemlich heftiges wellenförmiges Sichheben und -senken erst des südlichen, dann des nördlichen Bettendes, aber ebenfalls kein Geräusch wahrgenommen.

In dem etwa 15 km weiter nach Nordwesten und zwar 80 m über dem Spiegel der nahen Zwickauer Mulde auf dem Granulitplateau gelegenen Bahnhof *Cossen* verspürten mehrere noch wach liegende Beamte einen starken und zwei unmittelbar darauf folgende schwächere wellenförmige Stösse; die Betten, Thüren und Fenster wurden so heftig gerüttelt, dass eine Person erwachte; eine Pendeluhr bleibt stehen, eine Säule von 30 auf einander geschichteten Thalerstücken fällt zusammen.

Auch auf dem *Rochlitzer Berge*, welcher die Sohle des Muldenthales um 185 m überhöht, wird die wellenförmig schwankende Bewegung von den Bewohnern des dortigen Bergrestaurants bemerkt, während von den wachhabenden Beamten der im Mulden-

thal selbst liegenden Bahnhöfe Lunzenau, Wechselburg und Rochlitz nicht die geringste Erschütterung verspürt wurde.

Im Nordosten reihen sich die ebenfalls ziemlich intensiv erschütterten Gegenden zunächst von Döbeln, dann von Meissen an.

So wird denn nach Zusammenfassung des vorher Gesagten die durch eine grosse Anzahl mehr oder weniger dicht gelegener Beobachtungsorte gekennzeichnete Aussenzone des sächsischen Schüttergebietes mit seismischen Stärken vom Grad 4—3 peripherisch, wie folgt, begrenzt: Im Norden durch eine Linie, die sich nördlich von Görlitz, Bautzen und Pulsnitz bis in die Gegend von Meissen nach Westen zieht, sich dann in kurzem Bogen im Nordwesten von Döbeln über den Rochlitzer Berg und Cossen nach Südosten umbiegt und sich in dieser Richtung über Chemnitz nach Teplitz wendet.

Die Längsaxe dieses äusseren Schütterstreifens, ebenso wie diejenige der inneren hochgradigen Schütterzone verläuft, von OSO nach WNW. Verlängert man dieselbe in dieser Richtung, so trifft sie auf den am weitesten nach Westen vorgeschobenen Ort, an welchem das Beben vom 10. Januar innerhalb des Königreichs Sachsen zur Beobachtung gelangte, die Stadt *Leipzig*. Freilich liefen aus dieser trotz der von den dortigen Zeitungen gebrachten Bitte um Erdbebennachrichten nur zwei Mittheilungen über gemachte Beobachtungen ein, doch weisen diese noch auf eine drei- bis viergradige Stärke der Erschütterung hin. So werden in Leipzig selbst und ebenso in dem Vororte Gohlis die Berichterstatterinnen durch das ziemlich heftige Schaukeln ihrer Betten unsanft erweckt und bemerken an den Bewegungen des Ofens und anderer Gegenstände, wie sich mehrere direct darauf folgende Schwankungen durch das Zimmer fortpflanzen.

Die Thatsache, dass die nordwestliche Verlängerung der Axe des elbthalgebirgischen Hauptschüttergebiets nebst der sie umrahmenden Zone nächst geringerer Schütterstärken über die Gegend von Döbeln auf diejenige von Leipzig gerichtet ist; ferner der Umstand, dass selbst noch in dieser Stadt die Schüttererscheinungen mindestens dem Stärkegrade 3 entsprochen haben: liessen vermuthen, dass sich die makroseismische Wirkung der sich über Dresden und Döbeln in westlicher oder nordwestlicher Richtung fortpflanzenden Erdbebenwellen auch über Leipzig hinaus, noch weiter nach Nordwesten fühlbar gemacht hätten. Durch sie müsste dann zunächst die Gegend von Halle, Eisleben und

Mansfeld, dann der Dessau-Magdeburger Landstrich betroffen worden sein. Meine Nachfragen in Halle, sowie die von der Ober-Bergdirection der Mansfelder kupferschieferbauenden Gewerkschaft und der Direction der Riebeck'schen Montanwerke auf ihren Gruben und Anlagen angestellten Ermittlungen, blieben resultatlos. Um so überraschender war es deshalb, dass auf den von Herrn Dr. Wolterstorff auf meine Bitte in der Magdeburger Zeitung erlassenen Aufruf zwei Berichte eingingen, welche es ausser jeden Zweifel setzen, dass sich das Beben auch noch in der Stadt *Magdeburg* in aller Deutlichkeit abgespielt hat. Frau Major Schramm, noch wach im Bette liegend, fühlte etwa $^1/_2$4 Uhr morgens ein leises stossendes Schwanken ihres Bettes, sah die Ampel schwach hin- und herpendeln, eine Bewegung, die sich in dem Schatten an der Wand wesentlich vergrösserte und verdeutlichte. Ebenso berichtet Herr Oberinspector Wolf über das sich ablösende Sichheben und -senken der Enden seines Bettes durch einen wellenförmigen Stoss, der wahrnehmbar von Südosten kam.

Jetzt lag es nahe, zu vermuthen, dass sich das Beben noch weiter nach Nordwesten und zwar bis nach *Hamburg*, wenn auch nur mikroseismisch bemerklich gemacht habe und dort von dem Horizontalpendel der Erdbebenstation des Herrn Dr. Schütt registrirt worden sei. Auf meine Anfrage hatte letzterer die dankbar von mir anerkannte Güte, mir mitzutheilen, dass das Südpendel seines dreifachen Horizontalpendelapparats thatsächlich an dem Zeitpunkte $3^h\ 34^m\ 57^s$ eine, wenn auch minimale Störung angezeigt habe.

Dass sich aber die Erdbebenwellen auch im Süden des Harzgebirges noch weithin fortgepflanzt haben, wird durch die Registrirung des Wiechert'schen 1200 kgr.-Pendels im geophysischen Institut zu *Göttingen* bewiesen. Herr Prof. Dr. Wiechert erhielt dortselbst durch seinen Apparat Diagramme dieses Bebens, welche, so winzig diese Originalaufzeichnungen trotz ihrer 210 maligen Vergrösserung auch sind, doch ein ausserordentlich scharfes und instructives Bild der bis dorthin gelangten Erschütterungen geben. Mit freundlicher Erlaubniss meines verehrten Herrn Collegen gebe ich dasjenige der Nord-Süd-Componente der letzteren und zwar in 525 facher Vergrösserung der thatsächlichen Bodenbewegung wieder.

Nach diesem Diagramm machten sich in Göttingen die Vor-

läufer des Bebens 3 h 33 m 6 s bemerkbar. Von den darauf folgenden beiden Hauptwellen erreichte die erste 3 h 33 m 51 s, die zweite, das Maximum der Bodenbewegung erzeugende 3 h 33 m 58 s den Göttinger Apparat und war von einer grossen Zahl geringfügiger Fibrationen gefolgt, die erst ca. 3 h 36 m ihr Ende fanden. Die beiden Wellen, welche das Süd-Lausitzer Hauptschüttergebiet in wenigstens lokal schreckenerregender Heftigkeit betrafen und die sich ihnen anreihenden, dort noch immer sehr bemerkenswerthen Zitterbewegungen spiegeln sich, nachdem sie von dort aus eine Entfernung von über 350 km durchlaufen haben, in dem Göttinger Diagramm in mikroseismischen

Diagramm der N-S-Componente des Sudetischen Erdbebens vom 10. Januar 1901 nach der Registrirung des Wiechert'schen Pendelseismometers im geophysischen Institute zu Göttingen.
Copie in 525facher Vergrösserung der Bodenbewegungen.

Schwingungen wieder, deren Weite nach der Berechnung des Herrn Prof. Dr. Wiechert bei den Hauptwellen nur $^1/_{200}$ mm betrug!

Rechnet man die Entfernung von dem Trautenauer Epicentralgebiete bis nach Hamburg auf rund 530 km und diejenige bis nach Göttingen zu 430 km, das Maximum des Bebens in Hamburg auf 3 h 34 m 57 s, in Göttingen aber bereits auf 3 h 33 m 58 s, so würden diese Schwingungen ziemlich eine Minute gebraucht haben, um in diesem peripherischen Bereiche ihrer Ausbreitung eine Entfernung von rund 100 km und zwar mit einer Geschwindigkeit von 1,6 km pro Secunde zurückzulegen. Dieses Maass jedoch zur Berechnung der Eintrittszeit des Bebens zu benutzen, ist nicht statthaft, da sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Oberflächenwellen bei ihrem Wege durch Gesteinsmassen von sehr verschiedener Dichte und Elasticität, ja durch lockere Accumulate in Folge der Summirung der zu überwindenden Widerstände mit zunehmender Entfernung vom Epicentrum immer mehr verlangsamen muss.

Dem Hauptbeben vorangehende und nachfolgende Erschütterungen.

Aus mehreren Ortschaften innerhalb des sächsischen Schüttergebietes des Sudetischen Bebens werden geringfügige Erschütterungen gemeldet, welche diesem 3 h und etwa 33 m erfolgten Hauptbeben zum Theil vorangingen, meist aber in bis mehrtägigen Zeitzwischenräumen nachfolgten und in letzterem Falle sämmtlich auf Abschnitte des Elbthalgebirges beschränkt waren.

Am 10. Januar. Bereits früh 1 h, also zwei und eine halbe Stunde vor dem Hauptbeben, wurde in der Gegend von *Herrnhut*, ferner in *Schandau* und in einigen naheliegenden *böhmischen Ortschaften* ein ziemlich heftiger Stoss verspürt, den auch ein Nachtwächter in *Döbeln*, und zwar im Freien, in Verbindung mit dumpfem Donnerrollen in der Richtung von SO nach NW beobachtet hat (nach Dr. FRICKER in Döbeln). Diese Orte vertheilen sich somit auf die ganze nördliche Schütterzone des Hauptbebens.

Herr Prof. Dr. HIBSCH berichtet über schwache, dem letzteren folgende Erdstösse in *Tetschen*:

Am 10. Januar 11 h 7 m nachts.

Am 11. Januar 4 h 5 m früh.

Am 12. Januar 4 h 59 m früh.

Ferner fühlt:

Am 16. Januar früh 2 h 44 m der Berichterstatter, Herr Prof. Dr. SCHNEIDER in *Blasewitz* bei Dresden, dass sein Bett plötzlich vertikal gehoben und stark geschüttelt wird.

Am 17. Januar früh 5 h 25 m wird der elbthalgebirgische Strich zwischen *Klein-Hennersdorf* bei Schandau und *Klein-Sedlitz* bei Dohna von zwei so heftigen stossförmigen Erschütterungen betroffen, dass in dem zwischenliegenden *Pirna* Geschirr schwankt und zum Theil zu Boden fällt, Thüren rütteln oder auf- und zuschlagen (Herr Seminaroberlehrer WOLFF).

Gleiches ereignet sich in der nämlichen Gegend:

Am 21. Januar, früh 3 h 45 m, wo in *Pirna* der Berichterstatter durch mehrere kräftige Erschütterungen geweckt wird und das Haus auf die Dauer von etwa 4 Secunden in stark zitternde Bewegung geräth (Herr Seminaroberlehrer WOLFF).

Es sind die letzten makroseismischen Nachwirkungen des Sudetischen Erdbebens vom 10. Januar 1901.

Druckfertig erklärt 30. IV. 1901.]

Tafel I.

E .... von über 50.000 Einwohnern.
.... „ „ 20.000 „
.... △Dörfer „ „ 10.000 „
◉Märkte ○Dörfer „ „ 5.000 „
◎ *Märkte* ○ *Dörfer* „ „ 2.000 „
◎ *Märkte* ○ *Dörfer* „ unter „ „
Burgen ♁ *Klöster* ♁ *Klosterruinen*.

HÜTTERGEBIET
ERDBEBENS
uar 1901.

Jsolirte peripherische Beobachtungspunkte

Grosse Lausitzer Dislocation

INHALT.

Seite

Wilhelm His, Antrag an die internationale Association der Akademien auf Bestellung einer Fach-Commission für menschliche und thierische Entwickelungsgeschichte 77

Hermann Credner, Das sächsische Schüttergebiet des Sudetischen Erdbebens vom 10. Januar 1901. Mit 1 Figur und 1 Tafel . 83

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

III.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1901.

Einzelpreis 1 Mark 70 Pfg.

SEP 20 1901

SITZUNG VOM 6. MAI 1901.

Vorträge hielten:

Herr W. Scheibner, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn M. Krause-Dresden, o. M.: Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunktionen.

Derselbe: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn Willibald Reichardt-Dresden: Ueber Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die vermittelst hyperelliptischer Funktionen integrirbar sind.

Derselbe: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn P. Stäckel-Kiel: Ueber das Dirichlet'sche Integral.

Herr H. Bruns, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn F. Hausdorff-Leipzig: Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Martin Krause: *Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunctionen.*[1])

In einer Arbeit gleichen Titels ist gezeigt worden, dass und wie die Thetafunctionen zweier und dreier Veränderlichen entweder ganz oder theilweise als Elemente von orthogonalen Systemen angeordnet werden können. Im Folgenden sollen die Betrachtungen verallgemeinert werden und zwar auf den Fall der Thetafunctionen von vier Veränderlichen. Es zeigt sich hier das Resultat, dass Anordnungen der skizzirten Art *nicht* existiren.

Dann aber soll die ganze Theorie noch einmal in anderer Weise aufgebaut werden und zwar unabhängig von der Theorie der Thetafunctionen, *lediglich als Aufgabe der Determinantentheorie.* Wir stellen erstens das Problem, *alle orthogonalen Systeme von* 16, 64, 256 *etc. Elementen von der Form* $\pm A_r$ *aufzustellen, wobei r resp. die Werthe annehmen kann:* 1 . . . 4; 1 . . . 8; 1 . . . 16 *etc.* Die Aufgabe wird für die Fälle von 16 und 64 Elementen wirklich durchgeführt, im Falle von 256 Elementen dagegen die Unmöglichkeit ihrer Lösung nachgewiesen.

1) Siehe diese Berichte. Sitzung vom 7. Januar 1901.

Nachdem das geschehen ist, *sollen die orthogonalen Bildungen näher untersucht werden, die durch Multiplication zweier orthogonaler Systeme der genannten Art entstehen.* Wir erhalten auf diesem Wege Resultate, die durch Specialisirung die Resultate der vorigen Arbeit ergeben, zu gleicher Zeit aber den Weg zeigen, auf welchem noch weitere Thetaanordnungen eigenthümlicher Art gewonnen werden können.

§ I.

Untersuchung der Thetafunctionen von vier Veränderlichen.

Wir gehen für den Fall der Thetafunctionen von vier Veränderlichen ganz analog vor, wie bei den Thetafunctionen von zwei und drei Veränderlichen.

Wir setzen in:

$$\theta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(u+v)$$

an Stelle der Systeme g der Reihe nach:

0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111,
1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111,

und bezeichnen die entstehenden θ-Functionen der Reihe nach durch $A_1, A_2, \ldots A_{16}$. Die Grössen B entstehen aus den Grössen A, indem an Stelle von $u+v : u-v$ gesetzt wird. Wir fragen: *Können die 256 Thetaproducte:*

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{matrix}$$

ganz oder theilweise als Elemente einer Determinante D dargestellt werden, die in ein Product von der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *verwandelt werden kann, wobei unter* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *orthogonale Determinanten von* 256 *Elementen von der Form* $\pm A_r$ *resp.* $\pm B_r$ *zu verstehen sind.*

Es genügt eine Horizontalreihe, etwa die erste, und eine Verticalreihe, etwa die erste zu kennen, um alle zu kennen. Wir greifen unter den möglichen Determinanten diejenigen heraus, die das Product:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

in sich enthalten. Als erste Horizontalreihe wählen wir diejenige oder eine derjenigen, die das zuletzt genannte Product enthalten.

Neben diesem enthält die Reihe dann noch fünfzehn andere Producte. Alle diese Producte können nach angegebenen Regeln durch die Grössen A_r und B_r dargestellt werden. Wir denken sie uns nach den Grössen A_r geordnet und zwar nach steigenden Indices derselben. Die Coefficienten sind die Grössen $\pm B_r$, die Determinante der letzteren müsste eine orthogonale sein. Die Systeme g, wie auch die Systeme h müssen untereinander verschieden sein. Da die Reihenfolge der Verticalreihen willkürlich ist, können wir die Systeme g beliebig anordnen. Wir wählen die am Anfang des Paragraphen angegebene Anordnung. Die Grössen h können dann nicht mehr willkürlich zugeordnet werden, wir können lediglich die Annahme machen, dass das erste Glied der ersten Horizontalreihe den Wert hat:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \sum_{r=1}^{r=16} A_r\, B_r.$$

Die Determinanten A und B können so geordnet werden, dass die ersten Horizontalreihen resp. lauten:

$$A_1,\ A_2 \ldots A_{16},$$
$$B_1,\ B_2 \ldots B_{16}.$$

Das zweite Element der ersten Horizontalreihe unserer zu construirenden Determinante müsste dann einen der acht Werthe annehmen:

$$\begin{matrix} 0001 & 0001 & 0001 & 0001 & 0001 & 0001 & 0001 & 0001 \\ 0001, & 0011, & 0101, & 0111, & 1001, & 1011, & 1101, & 1111. \end{matrix}$$

Wir wählen das Product:

$$\begin{matrix} 0001 \\ 0001. \end{matrix}$$

Das dritte Element kann dann nur vier Werthe annehmen und zwar die Werthe:

$$\begin{matrix} 0010 & 0010 & 0010 & 0010 \\ 0011, & 0111, & 1011, & 1111. \end{matrix}$$

Auch hier beschränken wir uns auf den ersten Ausdruck:

$$\begin{matrix} 0010 \\ 0011. \end{matrix}$$

Die Determinante der Grössen B müsste nun ebenfalls die Form haben:

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 \\ \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 \end{vmatrix},$$

wobei $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_4$ orthogonale Systeme mit den Elementen $\pm B_r$ für $r = 1, 2, \ldots 8$, $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ orthogonale Systeme mit den Elementen $\pm B_r$ für $r = 9, 10, \ldots 16$ bedeuten. Bei $\mathfrak{B}_1$ ist überdies die Annahme zulässig, dass die Elemente der ersten Horizontal- und Verticalreihe das positive Zeichen haben. Da die drei ersten Horizontalreihen von $\mathfrak{B}_1$ nach dem soeben bemerkten feste Elemente besitzen, so sind nach dem früheren die Elemente der fünf folgenden Horizontalreihen fest bestimmt. Schreiben wir nur die Indices der Grössen B_r, so hat $\mathfrak{B}_1$ die Form:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	− 1	4	− 3	6	− 5	8	− 7
3	− 4	− 1	2	7	− 8	− 5	6
4	3	− 2	− 1	− 8	− 7	6	5
5	− 6	− 7	8	− 1	2	3	− 4
6	5	8	7	− 2	− 1	− 4	− 3
7	− 8	5	− 6	− 3	4	− 1	2
8	7	− 6	− 5	4	3	− 2	− 1.

Bei $\mathfrak{B}_2$ sind die drei ersten Horizontalreihen durch unsere Annahme festgelegt. Sie lauten:

9	10	11	12	13	14	15	16
10	− 9	12	− 11	14	− 13	16	− 15
11	− 12	− 9	10	15	− 16	− 13	14.

Die übrigen Horizontalreihen sind hierdurch sämmtlich bis auf ein allen Gliedern gemeinsames Zeichen bestimmt, insbesondere kann die vierte Horizontalreihe nur die beiden Werthe annehmen.

12	11	− 10	− 9	− 16	− 15	14	13
− 12	− 11	10	9	16	15	− 14	− 13.

Beides ist unmöglich. In der That, nehmen wir den ersten Fall, so müssten die vier ersten Elemente der ersten Horizontalreihe von $\mathfrak{B}_3$ lauten:

$$\begin{array}{rrrr} 9 & -10 & -11 & -12, \end{array}$$

von $\mathfrak{B}_4$:

$$\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 3 & 4, \end{array}$$

und das ist, wie man sich leicht überzeugt, unmöglich.

Im zweiten Falle kann etwa folgendermaassen geschlossen werden.

Die vier ersten Elemente der vier ersten Horizontalreihen von $\mathfrak{B}_3$ müssten lauten:

$$\begin{array}{rrrr} 9 & -10 & -11 & 12 \\ 10 & 9 & 12 & 11 \\ 11 & -12 & 9 & -10 \\ 12 & 11 & -10 & -9, \end{array}$$

von $\mathfrak{B}_4$:

$$\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & -4 & -3 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1. \end{array}$$

Das führt aber zu einem Widerspruch, wenn man die fünften Horizontalreihen von $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_4$ hinzunimmt.

In ähnlicher Weise könnten alle übrigen Fälle untersucht werden — es zeigt sich stets ein Widerspruch. Es ist nun thatsächlich nicht nöthig, alle 64 Fälle einzeln zu untersuchen — die Substitution halber Perioden lehrt, dass man sich auf einige wenige Fälle beschränken kann, indessen möge hierauf nicht näher eingegangen werden. Jedenfalls ergiebt sich das Resultat, *dass für den Fall der Thetafunctionen von vier Veränderlichen und damit für alle weiteren Fälle eine Anordnung von Thetaproducten der angegebenen Art nicht möglich ist*

§ 2.

Untersuchung der orthogonalen Determinanten von 16 Elementen, die sämmtlich die Form $\pm A_r$ haben, für $r = 1, 2, 3, 4$.

Wir wollen jetzt dasselbe Problem auf anderem Wege behandeln, welcher zunächst völlig unabhängig von der Theorie der hyperelliptischen Transcendenten ist und fragen dazu: *Wie sehen alle orthogonalen Determinanten von 16 Elementen aus, die alle die Form* $\pm A_r$ *haben, wobei r der Reihe nach die Werthe*

1, 2, 3, 4 *annehmen kann?* Das Problem wird vereinfacht, wenn wir die Annahme hinzufügen, dass die Elemente der ersten Horizontal- und Verticalreihe das positive Zeichen besitzen. Wir wollen der einfacheren Bezeichnung wegen die Grössen A_r wieder durch ihre Indices ersetzen, dann ergeben sich *zwei* und *nur* zwei Typen von möglichen Determinanten, nämlich:

$$\text{I} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

und:

$$\text{II} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Aus ihnen entstehen alle überhaupt möglichen Systeme durch Vertauschung von Horizontal- oder Verticalreihen oder durch Multiplication beliebiger Horizontal- resp. Verticalreihen mit -1. Wir können die gefundenen Resultate etwas anders darstellen, indem wir Indices einführen. Es kommen vier Anordnungen der Grössen A vor und zwar bei beiden Systemen dieselben in derselben Reihenfolge. Wir wollen dieselben durch *obere* Indices bezeichnen $g_1 g_2$ und diesen Grössen der Reihe nach die Werthe beilegen:

$$00, \quad 01, \quad 10, \quad 11.$$

Es kommen ferner vier Zeichencombinationen vor und zwar die Combinationen:

$$\begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & +. \end{matrix}$$

Auch diese Anordnungen wollen wir durch Indices bezeichnen und zwar durch *untere* $h_1 h_2$, wobei $h_1 h_2$ der Reihe nach dieselben Werthe durchlaufen wie $g_1 g_2$, nämlich;

$$00, \quad 01, \quad 10, \quad 11.$$

Das ganze Symbol:

$$\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}$$

wollen wir dann in Klammern setzen und die *Characteristik* der entsprechenden Horizontalreihe nennen. Wir wollen ferner den Grössen g und h auch beliebige ganzzahlige Werthe beilegen, indem wir annehmen, dass die Characteristik sich nicht ändert, wenn wir die einzelnen Grössen g und h um gerade Zahlen vermehren. Dann haben unsere beiden Determinanten die Form:

$$\text{I}\quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad\qquad \text{II}\quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

§ 3.

Untersuchung aller orthogonalen Determinanten von 64 Elementen von der Form $\pm A_r$ für $r = 1, 2, \ldots, 8$.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und *fragen nach allen orthogonalen Determinanten von 64 Elementen, die sämmtlich die Form haben* $\pm A_r$ *und zwar für* $r = 1, 2, \ldots, 8$. Auch hier ersetzen wir die Grössen A_r durch ihre Indices und nehmen an, dass die Elemente der ersten Horizontal- und Verticalreihe das potitive Zeichen besitzen. Dann werden wir als Typen jedenfalls Determinanten von der Form wählen können:

$$\begin{matrix} C_1 D_1 \\ D_2 C_2 \end{matrix}$$

wobei C_1, C_2 orthogonale Systeme von 16 Elementen sind, die aus den Grössen $\pm A_r$ für $r = 1, 2, 3, 4$ gebildet werden können, während D_1, D_2 orthogonale Systeme mit den Elementen $\pm A_r$ für $r = 5, 6, 7, 8$ darstellen. Ferner sind die Elemente der

ersten Horizontalreihe von C_1 und D_1 positiv, ebenso wie die Elemente der ersten Verticalreihe von C_1 und D_2.

Nun sind vier Categorien zu unterscheiden. Entweder haben C_1 und D_1 beide die Form I von § 2, oder beide die Form II oder je eines die Form I und die Form II, wobei die zweite, dritte, vierte Horizontalreihe von D_1 sich von den entsprechenden Reihen in I oder II noch um das Zeichen unterscheiden kann. In jeder Categorie sind demnach *acht* und *nur acht* Fälle möglich, da das Zeichen des ersten Elementes der zweiten, dritten, vierten Horizontalreihe von D_1 sowohl positiv als auch negativ sein kann. Von diesen acht Fällen zeigen sich jedesmal nur vier möglich, so dass in jeder Categorie *vier* Typen von Orthogonalsystemen existiren, *im Ganzen also* 16. Bleiben wir bei der ersten Categorie stehen, so lautet eines der Systeme:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	−1	4	−3	6	−5	8	−7
3	−4	−1	2	7	−8	−5	6
4	3	−2	−1	−8	−7	6	5
5	−6	−7	8	−1	2	3	−4
6	5	8	7	−2	−1	−4	−3
7	−8	5	−6	−3	4	−1	2
8	7	−6	−5	4	3	−2	−1

Schreiben wir diese Anordnung:

$$\begin{matrix} C_1 D_1 \\ D_2 C_2, \end{matrix}$$

so entstehen die drei noch fehlenden Anordnungen derselben Categorie, indem wir in D_1 die α^{te} und β^{te} Horizontalreihe, in D_2 die α^{te} und β^{te} Verticalreihe und in C_2 die α^{te} und β^{te} Horizontal- und Verticalreihe mit -1 multipliciren. Dabei ist für α und β der Reihe nach zu setzen:

$$\begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 3. \end{matrix}$$

Gehen wir zur zweiten Categorie über, so lautet ein System derselben:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	−1	−4	3	6	−5	−8	7
3	4	−1	−2	7	8	−5	−6
4	−3	2	−1	−8	7	−6	5
5	−6	−7	8	−1	2	3	−4
6	5	−8	−7	−2	−1	4	3
7	8	5	6	−3	−4	−1	−2
8	−7	6	−5	4	−3	2	−1.

Die drei fehlenden Systeme gehen aus dem soeben hingeschriebenen Systeme durch dieselben Operationen hervor, wie im ersten Falle. Dabei kann diese Anordnung aus der angegebenen Anordnung der ersten Categorie abgeleitet werden, indem die 2. und 3., 6. und 7. Horizontal- und Verticalreihe mit einander vertauscht werden und dann an Stelle von

$$2,\ 3,\ 6,\ 7$$

resp. gesetzt wird:

$$3,\ 2,\ 7,\ 6.$$

Aus der dritten Categorie greifen wir die Anordnung heraus:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	−1	4	−3	6	−5	−8	7
3	−4	−1	2	7	8	−5	−6
4	3	−2	−1	8	−7	6	−5
5	−6	−7	−8	−1	2	3	4
6	5	−8	7	−2	−1	−4	3
7	8	5	−6	−3	4	−1	−2
8	−7	6	5	−4	−3	2	−1.

Die drei fehlenden Systeme folgen hieraus wie in den Fällen 1 und 2.

Die Anordnungen der vierten Categorie folgen aus denen der dritten Categorie in einer einfachen Weise, die wir folgendermaassen andeuten. Schreiben wir die Anordnungen der dritten Categorie:

$$\begin{matrix} C_1 D_1 \\ D_2 C_2 \end{matrix}$$

so lauten die der vierten:

$$D_1 C_1$$
$$C_2 D_2$$

nachdem noch einfache Zeichen- und Buchstabenversetzungen vorgenommen sind.

Wir können die Resultate übersichtlicher zusammenstellen, und zwar beschränken wir uns dabei auf die Determinanten der beiden ersten Categorien.

In ihnen kommen stets dieselben acht von einander verschiedenen Anordnungen der Grössen A_1, A_2, $\cdots A_8$ vor und zwar in derselben Reihenfolge. Wir wollen dieselben durch *obere* Indices bezeichnen g_1, g_2, g_3 und zwar wollen wir diesen Grössen der Reihe nach die Werthe beilegen:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

In ähnlicher Weise kommen im Ganzen acht Zeichencombinationen bei den Grössen A_1, $A_2 \cdots A_8$ vor und zwar die folgenden:

$$\begin{array}{cccccccc}
+ & + & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & + & - & + & - & + & - \\
+ & + & - & - & + & + & - & - \\
+ & - & - & + & + & - & - & + \\
+ & + & + & + & - & - & - & - \\
+ & - & + & - & - & + & - & + \\
+ & + & - & - & - & - & + & + \\
+ & - & - & + & - & + & + & -.
\end{array}$$

Auch diese Anordnungen wollen wir durch Indices bezeichnen und zwar durch *untere* $h_1 h_2 h_3$ und $h_1 h_2 h_3$ der Reihe nach dieselben Werthe durchlaufen lassen, wie die Grössen $g_1 g_2 g_3$. Das ganze Symbol:

$$\begin{pmatrix} g_1\, g_2\, g_3 \\ h_1\, h_2\, h_3 \end{pmatrix}$$

wollen wir dann in Klammern schliessen und die *Characteristik* der entsprechenden Horizontalreihe nennen. Wir wollen ferner den Grössen g und h auch beliebige ganzzahlige Werthe beilegen, indem wir annehmen, dass die Characteristik sich nicht ändert, wenn wir die einzelnen Grössen g oder h um gerade Zahlen vermehren. Dann kann die erste Determinante geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\,0\,1\\0\,0\,1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,1\,1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\,1\,1\\1\,1\,0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\,0\,0\\1\,1\,1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\,0\,1\\1\,0\,0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\,1\,0\\1\,0\,1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\,1\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix}.$$

Die acht orthogonalen Systeme der beiden ersten Categorien entstehen nun aus dem vorliegenden, indem an Stelle der Grössen:

$$\begin{pmatrix}g_1\,g_2\,g_3\\h_1\,h_2\,h_3\end{pmatrix}$$

die Characteristiken gesetzt werden:

$$\begin{pmatrix}g_1+g_1', & g_2+g_2', & g_3+g_3'\\h_1+h_1', & h_2+h_2', & h_3+h_3'\end{pmatrix}$$

wobei:

$$\begin{pmatrix}g_1'\,g_2'\,g_3'\\h_1'\,h_2'\,h_3'\end{pmatrix}$$

eine beliebige aber für das jedesmalige System unveränderliche Characteristik einer der Horizontalreihen des ersten Systems bedeutet. Hierbei ist die Reihenfolge der Horizontalreihen nicht mehr dieselbe wie in den ursprünglichen Anordnungen — indessen ist das unwesentlich. Hiermit ist eine übersichtliche Darstellung der acht möglichen Anordnungen der ersten und der zweiten Categorie gegeben.

§ 4

Nachweis, dass es keine orthogonalen Determinanten von 256 Elementen giebt, die sämmtlich die Form $\pm A_r$ haben.

Es liegt nun nach dem vorangegangenen nahe zu fragen, *ob es orthogonale Systeme von 256 Elementen giebt, die alle die Form haben* $\pm A_r$, *wobei r die Werthe* 1, 2, ·· 8, 1′, 2′, ·· 8′ *annehmen kann.* Wir wählen hier die gestrichenen Zahlen, da sich diese einfacher schreiben lassen, als die Zahlen 9, ··· 16.

Jedenfalls müssten die Systeme die Form haben:

$$\begin{vmatrix} C_1 D_1 \\ D_2 C_2 \end{vmatrix}$$

wobei C_1 und C_2 orthogonale Systeme der Grössen 1, 2, ·· 8, D_1, D_2 orthogonale Systeme der Grössen 1′, 2′, ··· 8′ sind. Wir haben uns dabei wieder die Grössen A_r durch ihre Indices ersetzt gedacht. Die Elemente der ersten Horizontalreihe in C_1 und D_1 haben das positive Zeichen, ebenso die Elemente der ersten Verticalreihe in C_1 und D_2. Sind C_1 und D_1 gegeben, so sind C_2, D_2 bestimmt.

C_1 kann die sechszehn im vorigen Paragraphen angegebenen Systeme bedeuten, bei D_1 ist eine grössere Mannigfaltigkeit möglich, da die ersten Elemente einer jeden Horizontalreihe mit Ausnahme der ersten sowohl das positive als auch das negative Zeichen annehmen können. Es sind daher $2^7 \cdot 16$ Werthsysteme möglich, so dass wir im Ganzen $2^7 \cdot 256$ Determinanten von der Form:

$$\begin{vmatrix} C_1 D_1 \\ D_2 C_2 \end{vmatrix}$$

zu untersuchen hätten.

Wir wollen nun für C_1 die erste der im vorigen Paragraphen behandelten Determinanten wählen, wir wollen ferner annehmen, dass D_1 abgesehen vom Zeichen der ersten Elemente der Horizontalereihen auch diese Form habe. Nehmen wir an, dass das Zeichen der ersten Elemente der 5., 6., 7., 8. Horizontalreihe resp. gleich ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 sei, so folgt leicht, dass das Zeichen der ersten Elemente der 2., 3., 4. Horizontalreihen resp. gleich $-\varepsilon_3\varepsilon_4$, $-\varepsilon_2\varepsilon_4$, $-\varepsilon_1\varepsilon_4$ oder auch gleich $-\varepsilon_4\varepsilon_3$, $-\varepsilon_1\varepsilon_3$, $-\varepsilon_2\varepsilon_3$ sein muss und zwar folgt das aus der Hinzunahme der

neunten Horizontalreihe der ganzen Determinante. Jedenfalls müsste demnach die Beziehung bestehen:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_3 = \varepsilon_2 \varepsilon_4 .$$

Die Hinzunahme der zehnten Horizontalreihe zeigt, dass auch das unmöglich ist, so dass die 2^7 Determinanten der angegebenen Art ausgeschlossen sind.

In ähnlicher Weise könnten alle anderen Fälle untersucht werden — *stets ergiebt sich dasselbe Resultat.* Es ist nun durchaus nicht nöthig, alle diese Fälle einzeln zu behandeln — indessen soll dieser Punkt hier nicht ausführlich untersucht werden. Es möge nur bemerkt werden, dass die Betrachtungen des vorigen Paragraphen die Mittel an die Hand geben, aus der Unmöglichkeit einiger weniger Fälle die Unmöglichkeit aller übrigen zu erschliessen.

§ 5.

Multiplication zweier orthogonalen Systeme von 16 Elementen der angegebenen Form.

Wir wollen uns nun die zwei orthogonalen Determinanten des zweiten Paragraphen von 16 Elementen gebildet denken und zwar das eine Mal mit Hülfe der Grössen $\pm A_r$, das andere Mal mit Hülfe der Grössen $\pm A_r'$. Der ersten Determinante ordnen wir die Symbole $\binom{g}{h}$, der zweiten die Symbole $\binom{g'}{h'}$ zu.

Wir wollen uns ferner die vier Producte dieser Determinanten gebildet denken. Die Elemente der hierdurch entstehenden Determinante setzen sich dann aus Producten von der Form $\pm A_r A_s'$ zusammen. Diese Elemente sollen nach den Grössen A_r geordnet werden und zwar nach steigenden Indices derselben. Dann gehört zu den Coefficienten — den Grössen $\pm A_s'$ — ein ganz bestimmtes Symbol $\pm \binom{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$. Dieses Symbol ordnen wir dem ganzen Ausdrucke zu und zwar unter Fortlassung der Klammer d. h. wir bezeichnen das entsprechende Element $\sum \pm A_r \cdot A_s'$ durch:

$$\pm \begin{matrix}\mathfrak{g}\\ \mathfrak{h}\end{matrix} .$$

Dann folgt leicht, dass sich durch Multiplication der beiden Horizontalreihen:

$$\binom{g}{h} \text{ und } \binom{g'}{h'}$$

der Ausdruck ergiebt:

$$(-1)^{\varepsilon}\,{\mathfrak{g} \atop \mathfrak{h}} = (-1)^{\varepsilon}\,{g+g' \atop h+h'}$$

$$\varepsilon = \sum g(h+h').$$

Von den vier Producten fallen nun zwei zusammen, so dass wir die folgenden drei Anordnungen erhalten:

$$\begin{vmatrix} \substack{00\\00} & \substack{01\\01} & \substack{10\\11} & \substack{11\\10} \\ -\substack{01\\01} & \substack{00\\00} & \substack{11\\10} & -\substack{10\\11} \\ -\substack{10\\11} & -\substack{11\\10} & \substack{00\\00} & \substack{01\\01} \\ -\substack{11\\10} & \substack{10\\11} & -\substack{01\\01} & \substack{00\\00} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \substack{00\\00} & \substack{01\\11} & \substack{10\\10} & \substack{11\\01} \\ -\substack{01\\11} & \substack{00\\00} & -\substack{11\\01} & \substack{10\\10} \\ -\substack{10\\10} & \substack{11\\01} & \substack{00\\00} & -\substack{01\\11} \\ -\substack{11\\01} & -\substack{10\\10} & \substack{01\\11} & \substack{00\\00} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \substack{00\\00} & \substack{01\\11} & \substack{10\\10} & \substack{11\\01} \\ -\substack{01\\01} & \substack{00\\10} & -\substack{11\\11} & \substack{10\\00} \\ -\substack{10\\11} & \substack{11\\00} & \substack{00\\01} & -\substack{01\\10} \\ -\substack{11\\10} & -\substack{10\\01} & \substack{01\\00} & \substack{00\\11} \end{vmatrix}.$$

Es sind das aber dieselben Determinanten — von unwesentlichen Zeichenänderungen abgesehen — wie in § 1 der citirten Arbeit, nur dass die Symbole hier zunächst eine allgemeinere Bedeutung haben wie am angegebenen Orte. Wir brauchen die Grössen A und A' nur in bestimmter Weise zu specialisiren, um die früheren Resultate zu erhalten.

Die Formenmannigfaltigkeit, die sich bei der Multiplication zweier beliebiger orthogonaler Systeme von 16 Elementen von der Form $\pm A_r$, resp. $\pm A'_s$ ergiebt, ist freilich mit dem bemerkten nicht erschöpft, da die Horizontal- und Verticalreihen vertauscht und mit dem negativen Zeichen versehen werden können. Es kommen hierbei thatsächlich neue Combinationen hinzu. Nehmen wir z. B. die beiden Systeme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1' & -2' & -3' & 4' \\ 2' & 1' & -4' & -3' \\ 3' & 4' & 1' & 2' \\ 4' & -3' & 2' & -1' \end{vmatrix}$$

so ergiebt sich durch Multiplication das System:

$$\begin{vmatrix} \substack{00\\11} & \substack{01\\10} & \substack{10\\00} & \substack{11\\01} \\ \substack{01\\10} & -\substack{00\\11} & -\substack{11\\01} & \substack{10\\00} \\ \substack{10\\00} & \substack{11\\01} & -\substack{00\\11} & -\substack{01\\10} \\ -\substack{11\\01} & \substack{10\\00} & -\substack{01\\10} & \substack{00\\11} \end{vmatrix},$$

welches von den bisher aufgestellten verschieden ist. Führen wir alle hierbei sich ergebenden Fälle durch, so kommen wir thatsächlich zu weiteren Relationen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen, indessen würde es die Ziele dieser Arbeiten überschreiten, hierauf näher einzugehen.

§ 6.

Multiplication zweier orthogonalen Determinanten von 64 Elementen der angegebenen Form.

Ganz ähnlich können wir im Falle der Determinanten von 64 Elementen vorgehen. Wir beschränken uns auf die Determinanten der beiden ersten Categorien. Wir wollen uns nun einmal eine solche für die Grössen $\pm A_r$, ein ander Mal für die Grössen $\pm A_r'$ gebildet denken und ordnen den Horizontalreihen der beiden Determinanten wiederum die Symbole $\binom{g}{h}$ und $\binom{g'}{h'}$ zu. Je zwei solcher Determinanten multipliciren wir mit einander, so dass wir im Ganzen 64 Producte erhalten. Wir denken uns die Elemente der durch Multiplication entstandenen Determinante nach den Grössen A_r geordnet und zwar nach steigenden Indices derselben. Dann gehört zu den Coefficienten — den Grössen $\pm A_s'$ — ein ganz bestimmtes Symbol:

$$\pm \binom{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$$

Wir wollen uns das ganze Element durch dasselbe Symbol bezeichnet denken, nur unter Fortlassung der Klammer d. h. durch

$$\pm \begin{matrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} \end{matrix}.$$

Dann folgt leicht, dass sich durch Multiplication zweier Horizontalreihen:

$$\binom{g}{h} \text{ und } \binom{g'}{h'}$$

ein Element ergiebt, welches wir zu bezeichnen haben durch:

$$(-1)^\varepsilon \begin{matrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} \end{matrix} = (-1)^\varepsilon \begin{matrix} g + g' \\ h + h' \end{matrix}$$

$$\varepsilon = \sum g(h + h').$$

Damit sind alle Schwierigkeiten gehoben. Von den 64 Determinanten, die sich durch Multiplication ergeben, werden acht einander gleich, nämlich diejenigen, welche durch Multiplication zweier Determinanten derselben Form entstehen, was in acht Fällen möglich ist. Die gemeinsame Determinante hat dann in der Diagonalreihe stets das Glied $\begin{matrix} 000 \\ 000 \end{matrix}$ und fällt mit der Determinante zusammen, die auf Seite 75 der citirten Abhandlung angegeben worden ist. Wir nennen sie die fundamentale Determinante. Die 56 übrig bleibenden Determinanten fallen zu je zwei zusammen, so dass sich im Ganzen 28 neue Determinanten ergeben. Die Elemente derselben entstehen, von leicht zu bestimmenden Zeichen abgesehen, aus den Elementen der fundamentalen Determinante, indem an Stelle von

$$\begin{matrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} \end{matrix} \text{ gesetzt wird: } \begin{matrix} \mathfrak{g} + \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{h} + \mathfrak{h}' \end{matrix},$$

wobei $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$ so gewählt ist, dass:

$$\sum \mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{h}'$$

eine ungerade Zahl ist. Damit sind diese Fälle erschöpft.

Wir haben bisher angenommen, dass die Glieder der ersten Horizontal- und Verticalreihe in einer jeden der beiden Determinanten das positive Zeichen besitzen. Sehen wir davon ab, so ergeben sich eine Fülle weiterer Möglichkeiten, aus welchen wir die folgenden herausgreifen. Die Determinante der Grössen $\pm A_r$ soll die angegebene Eigenschaft beibehalten, in der Deter-

minante der Grössen $\pm A_r'$ denken wir uns die Horizontalreihen in beliebiger Weise mit -1 multiplicirt. Für die Producte der beiden Determinanten mit den Elementen $\pm A_r$ und $\pm A_r'$ können sich dann wesentlich neue Resultate nicht ergeben. Anders gestaltet sich die Sache, wenn wir uns die Verticalreihen der Determinante mit den Elementen $\pm A_r'$ mit -1 multiplicirt denken. Hierbei ergeben sich im Ganzen 2^8 Möglichkeiten, von denen aber je zwei, in denen die entsprechenden Verticalreihen sämmtlich mit dem entgegengesetzten Zeichen multiplicirt sind, nur zu unwesentlich von einander verschiedenen Resultaten führen werden. Wir können daher annehmen, dass die erste Verticalreihe mit dem positiven Zeichen versehen ist und erhalten demgemäss 2^7 mögliche Fälle. Unter diesen giebt es 2^6 Fälle, in denen die Zahl der negativen Zeichen eine gerade, ebenso viele, in denen sie ungerade ist. Wir behalten nur die erste Categorie bei und auch von diesen wollen wir nur diejenigen in Betracht ziehen, die den von uns angegebenen und behandelten acht Zeichenanordnungen entsprechen, deren Anzahl also auch acht ist. Dann folgt leicht, dass, wenn wir eine bestimmte Wahl treffen und diese durch die unteren Indices h'' bezeichnen, dass dann die Horizontalreihen der Determinante mit den Elementen $\pm A_r'$, die wir durch:

$$\binom{g'}{h'}$$

bezeichnen, übergehen in:

$$\binom{g'}{h' + h''}.$$

Damit sind aber wiederum alle Schwierigkeiten gehoben. Multipliciren wir die acht Determinanten mit den Elementen $\pm A_r$, mit den acht Determinanten mit den Elementen $\pm A_r'$, die zu der Anordnung h'' gehören, so erhalten wir 2^9 Anordnungen, die aus den vorhin angegebenen entstehen, indem an Stelle der Elemente

$$\begin{matrix}\mathfrak{g}\\ \mathfrak{h}\end{matrix}$$

die Elemente:

$$\begin{matrix}\mathfrak{g}\\ \mathfrak{h} + h''\end{matrix}$$

gesetzt werden. Genau so kann in allen acht Fällen verfahren werden, so dass wir im Ganzen $8 \cdot 2^9$ Anordnungen erhalten.

Es zeigt sich, dass unter ihnen nur 35 neue Determinanten enthalten sind, die aus der fundamentalen entstehen, indem an Stelle der Elemente:

$$\begin{matrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} \end{matrix}$$

die Elemente:

$$\begin{matrix} \mathfrak{g} + \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{h} + \mathfrak{h}' \end{matrix}$$

gesetzt werden, wobei:

$$\sum \mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{h}' \equiv 0$$

ist — mit Ausnahme der Characteristik Null. Im Ganzen erhalten wir also 64 Determinanten, die alle aus der fundamentalen entstehen, indem an Stelle der Elemente:

$$\begin{matrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} \end{matrix}$$

die Elemente:

$$\begin{matrix} \mathfrak{g} + \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{h} + \mathfrak{h}' \end{matrix}$$

gesetzt werden, wobei nunmehr

$$\begin{matrix} \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{h}' \end{matrix}$$

eine beliebige Characteristik bedeutet. Auch hier haben wir von einfachen Zeichenschwierigkeiten abgesehen.

Die Resultate, die wir auf diesem Wege erhalten haben, enthalten die Resultate des zweiten Paragraphen in der citirten Arbeit als specielle Fälle in sich. Wir kommen zu ihnen, wenn wir den Grössen A_r und A_r' die seiner Zeit angegebenen Werthe beilegen.

Die ganze Formenmannigfaltigkeit, die sich beim Multipliciren zweier beliebigen orthogonalen Systeme mit den Elementen $\pm A_r$, $\pm A_r'$ ergiebt, ist freilich mit dem bemerkten keineswegs erschöpft, da die Verticalreihen noch in mannigfacher Weise mit -1 multiplicirt, ferner die Reihen verschoben und die acht Systeme der dritten und vierten Categorie mit in den Bereich der Betrachtungen gezogen werden können. Auch in diesen Fällen werden sich durch specielle Annahmen über die Grössen A_r und A_r' Thetarelationen ergeben müssen. Es würde die Aufgabe dieser Mittheilung überschreiten, hierauf näher einzugehen, es möge nur bemerkt werden, dass Herr JAHNKE einer freundlichen brieflichen Mittheilung zu Folge auf diesem Wege that-

sächlich zu Thetarelationen gelangt ist. Herr Jahnke multiplicirt die beiden Determinanten mit einander:

1	− 2	− 3	4	5	6	− 7	8
2	1	− 4	− 3	− 6	5	8	7
3	4	1	2	7	− 8	5	6
4	− 3	2	− 1	8	7	6	− 5
− 5	6	− 7	8	1	2	3	− 4
6	5	− 8	− 7	2	− 1	− 4	− 3
7	− 8	− 5	6	− 3	− 4	1	− 2
8	7	6	5	− 4	3	− 2	− 1

und:

1′	2′	− 3′	4′	5′	6′	7′	8′
− 2′	1′	4′	3′	6′	− 5′	− 8′	7′
3′	− 4′	1′	2′	− 7′	− 8′	5′	6′
4′	3′	2′	− 1′	8′	− 7′	6′	− 5′
− 5′	− 6′	7′	8′	1′	2′	3′	− 4′
6′	− 5′	− 8′	7′	2′	− 1′	− 4′	− 3′
− 7′	8′	− 5′	6′	− 3′	− 4′	1′	− 2′
8′	7′	6′	5′	− 4′	3′	− 2′	− 1′.

Wendet man dann die Formeln der quadratischen Transformation der Thetafunctionen von drei Argumenten an, so ergiebt sich ein orthogonales Vierundsechszigersystem für die Thetafunctionen von 3 Argumenten, in welchem *sämmtliche* 64 Thetas auftreten und jeder Coefficient die Summe von 4 Thetaproducten darstellt.

Druckfertig erklärt 28. V. 1901.]

Wilibald Reichardt in Dresden: *Ueber Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mittels hyperelliptischer Funktionen integrirbar sind.*

Bei der Behandlung von Problemen der Dynamik, insbesondere auch der Hydrodynamik, ist man bereits wiederholt zu Differentialgleichungen gelangt, die mit Hilfe von hyperelliptischen Funktionen integrirt werden können.[1] Mit Recht hat sich daher die Aufmerksamkeit der Mathematiker der Theorie solcher Differentialgleichungen zugewendet.[2] Insbesondere schien es bei der

---

1) Vergl. z. B. Weber, H. „Anwendung der Thetafunktionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit", Math. Ann. XIV, 173—206, 1879. — Kowalevski, S. „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe", Acta Math. XII, 177—232, 1889; „Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe", Acta Math. XIV, 81—93, 1890. — Koetter, Fr. „Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit", Sitzungsber. der Kgl. Preuſs. Akad. der Wissensch. 1891, 47—56 und Journ. für die reine und angew. Math. CIX, 51—81 und 89—111, 1892; „Sur le cas traité par Mme Kowalevski de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe", Acta Math. XVII, 209—264, 1893; „Die von Steklow und Liapunow entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit", Sitzungsber. der Kgl. Preuſs. Akad. der Wissensch. 1900, 79—87.

2) Siehe z. B. Caspary, F. „Sur une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions thêta, et sur un théorème élémentaire relatif aux fonctions hyperelliptiques de première espèce", Comptes rendus CXI, 225—227, 1890; „Sur une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions thêta forment les intégrales", Comptes rendus CXII, 1120—1123, 1891; „Sur deux systèmes d'équations différentielles dont les fonctions hyperelliptiques de première espèce forment les intégrales", Comptes rendus CXII, 1305—1308, 1891; „Sur une nouvelle manière d'établir les relations algébriques qui ont lieu entre les fonctions hyperelliptiques de première espèce", Ann. de l'Éc. Norm. (3), X, 253—294, 1893. — Koetter, Fr. „Ueber eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonaler Coordinatensysteme durch

hohen Bedeutung, zu der die durch elliptische Funktionen integrirten Lamé-Hermite'schen und Picard'schen Differentialgleichungen in der Physik gelangt sind, von Interesse, die entsprechenden vermittelst hyperelliptischer Funktionen integrirbaren Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzusuchen und ihre Theorie zu begründen. Die nachstehenden Betrachtungen sollen die bereits vorliegenden Arbeiten dieser Art[1]) in ähnlicher Weise ergänzen, wie die Note des Herrn M. Krause „Ueber eine Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche durch elliptische Funktionen integrirbar sind" (Sitzungsber. der Kgl. Preuſs. Akad. der Wissensch. 1900, 258—268) die früheren Untersuchungen über Picard'sche Differentialgleichungen vervollständigt und verallgemeinert; es soll also über die Zahl der scheinbar singulären Punkte keinerlei einschränkende Voraus-

Thetafunktionen zweier Argumente, welche die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als Spezialfälle umfaſst", Sitzungsber. der Kgl. Preuſs. Akad. der Wissensch. 1895, 807—814 und Journ. für die reine und angew. Math. CXVI, 213—246, 1896. — Jahnke, E. „Ueber ein allgemeines aus Thetafunktionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik", Sitzungsber. der Kgl. Preuſs. Akad. der Wissensch. 1896, 1023—1030 und Journ. für die reine und angew. Math. CXIX, 234—252, 1898; „Ueber einen Zusammenhang zwischen den Elementen orthogonaler Neuner- und Sechzehnersysteme", Journ. für die reine und angew. Math. CXVIII, 224—233, 1897; „Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions thêta de deux arguments et leur application à la Dynamique", Comptes rendus CXXVI, 1013—1016, 1898.

1) Picard et Appell „Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles", Comptes rendus XCII, 692—695, 1881. — Krause, M. „Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce", Journ. de Math., fondé par Liouville (4), III, 87—107, 1887; „Sur les systèmes d'équations différentielles auxquels satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce", Comptes rendus CXXVI, 1086—1088, 1489—1492, 1618—1621, 1898; „Ueber Systeme von Differentialgleichungen, denen die vierfach periodischen Funktionen zweiter Art Genüge leisten", Ann. di Mat. (3), I, 265—282, 1898; „Ueber verallgemeinerte Lamé-Hermite'sche Differentialgleichungen für den Fall zweier veränderlichen Gröſsen", Ber. der Kgl. Sächs. Ges. der Wissensch. 1898, 192—206 und 231—245; „Ueber Systeme von Differentialgleichungen, denen vierfach periodische Funktionen Genüge leisten", Transactions of the Americ. Soc. I, 287—292, 1900. — Jahnke, E. „Neue Methode zur Herleitung der Differentialbeziehungen für die Thetafunktionen von zwei Argumenten", Ber. der Kgl. Sächs. Ges. der Wissensch. 1900, 140—151.

setzung gemacht werden. Ebenfalls in Uebereinstimmung mit der genannten Arbeit des Herrn KRAUSE werden dabei diejenigen Methoden benutzt, von denen Herr L. FUCHS in seiner Note „Ueber eine Klasse von Differentialgleichungen, welche durch ABEL'sche oder elliptische Funktionen integrirbar sind" (Nachr. von der Kgl. Ges. der Wissensch. zu Göttingen 1878, 19—32, vgl. auch Ann. di Mat. (2), IX, 25—34, 1878) Gebrauch gemacht hat, und die ihren Ausgangspunkt von solchen Differentialgleichungen nehmen, deren Coefficienten rationale Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind.

§ 1. Ueber eine besondere Klasse von linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen z sind.

In der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1)\qquad R(z)\frac{d^2Z}{dz^2}+\left(\tfrac{1}{2}R'(z)-\frac{F'(z)}{F(z)}R(z)\right)\frac{dZ}{dz}=\tfrac{1}{4}\frac{H(z)}{N(z)}Z$$

bedeuten

$$R(z)=r_0(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4)(z-k_5)$$
$$F(z)=(z-b_1)^{e_1}(z-b_2)^{e_2}\cdots\cdots(z-b_\nu)^{e_\nu}$$

gegebene Funktionen derart, dass alle k_j von einander verschieden, und dass alle b_k von einander und von allen k_j verschieden sind. $F(z)$ habe den Grad n, so dass also

$$e_1+e_2+\cdots+e_\nu=n$$

ist. Ferner sei

$$N(z)=(z-b_1)(z-b_2)\cdots\cdots(z-b_\nu),$$

und $H(z)$ bedeute eine noch näher zu bestimmende ganze rationale Funktion $(\nu+3)$ten Grades von z.

Sieht man zunächst noch von der Forderung ab, dass $H(z)$ eine *ganze* Funktion von z ist, so wird einer Gleichung von der Form (1) genügt durch die beiden linear unabhängigen Integrale

$$(2)\qquad Z=\sqrt{G(z)}\,e^{\pm c\int\frac{F(z)\,dz}{G(z)\,s}},$$

wobei $G(z)$ eine beliebige rationale Funktion, c eine beliebige Constante und

$$s=\sqrt{R(z)}$$

ist. In der That: Berechnet man die Differentialquotienten dieser Funktionen Z und trägt ihre Werthe in die linke Seite von (1) ein, so erhält man einen Ausdruck von der Form der rechten Seite, und zwar ergiebt sich, dass $H(z)$ bei gegebenem $G(z)$ und c die durch die folgende Gleichung definirte rationale Funktion sein muss:

$$(3)\quad \frac{H(z)}{N(z)}=R(z)\left[2\frac{G''(z)}{G(z)}-\frac{G'(z)^2}{G(z)^2}-2\frac{F'(z)\cdot G'(z)}{F(z)\,G(z)}\right]+R'(z)\frac{G'(z)}{G(z)}+4c^2\frac{F(z)^2}{G(z)^2}.$$

Von dieser Grundlage aus gelingt es, die folgende Aufgabe zu lösen:

Man soll eine ganze rationale Funktion $H(z)$ vom Grade $\nu+3$ und eine ganze rationale Funktion $G(z)$ von gegebenem Grade

$$(4)\qquad m \geqq n-1$$

und mit einem der positiven Einheit gleichen Coefficienten von z^m berechnen derart, dass die beiden Funktionen (2) *Integrale der Differentialgleichung* (1) *sind.*

Zu diesem Zwecke löse man (3) auf nach $4c^2$, differentiire nach z und multiplicire mit $\frac{F(z)^2}{2G(z)}$. Dadurch erhält man

$$(5)\quad \begin{cases} R(z)\dfrac{d^3G(z)}{dz^3}+3\left(\frac{1}{2}R'(z)-\dfrac{F'(z)}{F(z)}R(z)\right)\dfrac{d^2G(z)}{dz^2} \\ +\left(\frac{1}{2}R''(z)-2\dfrac{F'(z)}{F(z)}R'(z)+\dfrac{3F'(z)^2-F(z)F''(z)}{F(z)^2}R(z)-\dfrac{H(z)}{N(z)}\right)\dfrac{dG(z)}{dz} \\ -\left(\frac{1}{2}\dfrac{H'(z)}{N(z)}-\frac{1}{2}\dfrac{N'(z)\,H(z)}{N(z)^2}-\dfrac{F'(z)\,H(z)}{F(z)\,N(z)}\right)G(z)=0. \end{cases}$$

Wenn also die Constante c in (2) keinen bestimmt vorgegebenen Werth hat, sondern willkürlich gelassen wird, so ist die obige Aufgabe identisch mit der anderen, eine Funktion $(\nu+3)$ten Grades $H(z)$ aufzusuchen von der Eigenschaft, dass die Differentialgleichung 3. Ordnung (5) integrirbar wird durch eine ganze rationale Funktion $G(z)$ von gegebenem Grade (4), die ebenfalls zu bestimmen ist.

Hierzu hat man (5) noch in passender Weise umzuformen. Man multiplicire mit $2N(z)^2$ und beachte, dass

$$M(z)=N(z)\frac{F'(z)}{F(z)}=N(z)\sum_1^{\nu}{}_k\,\frac{e_k}{z-b_k}$$

eine als bekannt anzusehende ganze rationale Funktion $(\nu - 1)$ten Grades von z ist. Auf diese Weise findet man, dass die gesuchten Funktionen $H(z)$ und $G(z)$ der folgenden Identität genügen müssen:

$$(6)\begin{cases} -2N(z)H(z)G'(z) - [N(z)H'(z) - (2M(z) + N'(z))H(z)]G(z) \\ +2N(z)^2R(z)G'''(z) + 3[N(z)^2R'(z) - 2M(z)N(z)R(z)]G''(z) \\ +[N(z)^2R''(z) - 4M(z)N(z)R'(z) + 2(2M(z)^2 + M(z)N'(z) \\ -M'(z)N(z))R(z)]G'(z) = 0. \end{cases}$$

Setzt man hier

$$H(z) = \sum_0^{\nu+3} h_j z^{\nu+3-j}, \quad G(z) = \sum_0^m g_i z^{m-i} \quad (g_0 = 1)$$

und trägt man ebenso für die bekannten Funktionen $M(z)$, $N(z)$ und $R(z)$ ihre Entwickelungen nach fallenden Potenzen von z ein, so erhält man durch Nullsetzen der Coefficienten von

$$z^{m+2\nu+2}, \; z^{m+2\nu+1}, \; \ldots \; z^1, \; z^0$$

$m + 2\nu + 3$ Gleichungen (7) zur Berechnung der $m + \nu + 4$ Unbekannten

$$h_0, \; h_1, \; \cdots \; h_{\nu+3}, \; g_1, \; g_2, \; \cdots \; g_m.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert

$$h_0 = m(m - 2n + 3)r_0.$$

Man kann es also, ausser in den Fällen $n = 0$ und $n = 1$, durch Wahl von m stets dahin bringen, dass $h_0 = 0$ und also der Grad von $H(z)$ auf $\nu + 2$ herabgedrückt wird; man braucht zu diesem Zwecke nur $m = 2n - 3$ zu wählen. Es mag jedoch im Folgenden nur an der Bedingung (4) festgehalten, m also im Uebrigen als eine beliebig gewählte positive ganze Zahl angesehen werden.

Verlangt man nur, dass eine Differentialgleichung (1) zwei Integrale von der Form (2) hat, so sind die Coefficienten h_j von $H(z)$ und g_i von $G(z)$ nur an die Erfüllung der Relationen (7) gebunden; hat aber die Constante c oder, worauf es doch allein ankommt, deren Quadrat einen bestimmt vorgegebenen Werth, so müssen die genannten $m + \nu + 4$ Grössen auch noch derjenigen Bedingung (8) genügen, die man aus (3) erhält, wenn man mit

$N(z)G(z)^2$ multiplicirt und die Coefficienten von $z^{2n+\nu}$ einander gleich setzt.[1])

Die $m+2\nu+3$ Gleichungen (7) sind nun aber, ausser bei $\nu=0$, niemals unabhängig von einander, vielmehr sind immer ν derselben eine Folge der $m+\nu+3$ anderen, solange nur m an die Bedingung (4) gebunden bleibt.[2]) Unterwirft man also die $m+\nu+4$ Unbekannten h_j und g_i den Relationen (7), so bleibt noch eine dieser Grössen willkürlich; über diese kann dann in der Weise verfügt werden, dass auch noch der Gleichung (8) genügt wird, in der c^2 einen gegebenen Werth hat.

Ergebniss. Wenn die Funktionen $R(z)$ und $F(z)$ und der Grad m von $G(z)$ innerhalb der angegebenen Einschränkungen, die Constante c^2 aber vollkommen beliebig gegeben sind, so lässt sich stets eine endliche Anzahl zugehöriger ganzer rationaler Funktionen $H(z)$ und $G(z)$ derart bestimmen, dass die beiden Funktionen (2) Integrale der Differentialgleichung (1) sind.

Für das Folgende ist es nun von Bedeutung, zu erfahren, welcher Art die Nullstellen einer so gefundenen Funktion $G(z)$ sein müssen. Um dies zu untersuchen, kann man auf der rechten Seite von (3) die für die Umgebung einer solchen Nullstelle gültige Potenzentwickelung setzen. Dabei sind 2 Fälle zu unterscheiden:

A. Es sei $z=t$ eine τ-fache Nullstelle von $G(z)$, und t verschieden von allen Wurzeln b_k der Gleichung $F(z)=0$. Dann kommt:

$$\frac{(z)}{(z)} = R(t)\left[-\frac{\tau(2-\tau)}{(z-t)^2}+\left(\frac{2\tau G^{(\tau+1)}(t)}{(\tau+1)G^{(\tau)}(t)}-\frac{2\tau F'(t)}{F(t)}\right)\frac{1}{z-t}\cdots\cdots\right]$$
$$+R'(t)\left[\frac{\tau(\tau-1)}{z-t}\cdots\cdots\right]+\cdots$$
$$+4c^2F(t)^2\left[\frac{\tau!}{G^{(\tau)}(t)}\right]^2\left[\frac{1}{(z-t)^{2\tau}}-\left(\frac{2G^{(\tau+1)}(t)}{(\tau+1)G^{(\tau)}(t)}-\frac{2F'(t)}{F(t)}\right)\frac{1}{(z-t)^{2\tau-1}}\cdots\cdots\right].$$

1) Wenn man von den Gliedern mit c^2 absieht, so steigt in der Identität, die man aus (3) durch Multiplication mit $N(z)G(z)^2$ erhält, z bis zum Grade $2m+\nu+3$ an. Wenn also c^2 von Null verschieden ist, kann die Bedingung (8) nur erfüllt werden, falls

$$2m+\nu+3 \geqq 2n+\nu \quad \text{oder} \quad m \geqq n-1$$

ist, wie in (4) vorausgesetzt wurde.

2) Der direkte Nachweis hierfür — wenigstens im Falle $\nu=1$ — soll demnächst bei anderer Gelegenheit veröffentlicht werden.

B. Es sei $z = b$ eine β-fache Wurzel von $G(z) = 0$, wobei b eine e-fache Nullstelle von $F(z)$ (und mithin eine einfache Nullstelle von $N(z)$) bedeutet. In diesem Falle wird

$$\frac{H(z)}{N(z)} = R(b)\left[-\frac{\beta(2e+2-\beta)}{(z-b)^2}\cdots\cdots\right]+\cdots\cdot$$
$$+4c^2\left[\frac{F^{(e)}(b)}{e!}\cdot\frac{\beta!}{G^{(\beta)}(b)}\right]^2\left[\frac{1}{(z-b)^{2\beta-2e}}\cdots\cdot\right].$$

Da nun $H(z)$ eine ganze rationale Funktion von z ist, so darf $H(z):N(z)$ an den Stellen t gar nicht, an den Stellen b höchstens einfach unendlich werden. Beachtet man noch, dass nach der alle b betreffenden Verabredung $R(b)$ von Null ver- verschieden ist, und ferner, dass die Gleichung $R(z) = 0$ keine Doppelwurzel besitzen soll, so gelangt man auf Grund der vorstehenden Entwickelungen zu den folgenden Ergebnissen:

I. Ist c von Null verschieden, so muss $G(z)$ die Form haben

$$(9)\quad G(z) = \prod_i (z-t_i)\prod_k{}'(z-b_k)^{e_k+1} = G_0(z)F_1(z)N_1(z).$$

Hier soll der Strich an dem zweiten Produktzeichen andeuten, dass sich das Produkt nicht über alle ν Faktoren $z - b_k$, sondern nur — soweit es der gegebene Werth von m erlaubt — über beliebig viele derselben erstreckt und dass es auch ganz wegbleiben kann. Ferner ist

$$G_0(z) = \prod(z-t_i),\quad F_1(z) = \prod{}'(z-b_k)^{e_k},$$
$$N_1(z) = \prod{}'(z-b_k).$$

Alle in (9) vorkommenden Grössen t_i sind von einander, von allen k_j und von allen b_k verschieden, und jede von diesen Grössen t_i genügt der Relation

$$(10)\qquad 4c^2 = R(t_i)\left[\frac{G'(t_i)}{F(t_i)}\right]^2 = R(t_i)\left[\frac{G_0'(t_i)N_1(t_i)}{F_0(t_i)}\right]^2,$$

wobei die Funktion F_0 definirt ist durch die Gleichung

$$F(z) = F_0(z)F_1(z).$$

Endlich erfüllt jede von denjenigen Grössen b_k, auf die sich Π' bezieht, die folgende Bedingung:

$$(11)\ 4c^2 = R(b_k)\left[\frac{G^{(e_k+1)}(b_k)}{F^{(e_k)}(b_k)}\right]^2 = R(b_k)\left[\frac{(e_k+1)G_0(b_k)N_1'(b_k)}{F_0(b_k)}\right]^2.$$

II. Ist $c = 0$, so besitzt $G(z)$ die Gestalt:

$$(12)\quad G(z) = \prod^{j}{}' (z - k_j) \prod^{i} (z - t_i)^2 \prod^{k}{}' (z - b_k)^{2e_k + 2}$$
$$= G_0(z) F_1(z)^2 N_1(z)^2.$$

Das erste Produkt erstreckt sich bei einem geraden Werthe von m über 0 oder 2 oder 4, bei ungeradem m aber über 1 oder 3 oder 5 Faktoren $z - k_j$; von dem letzten Produkt gilt dasselbe wie von dem zweiten Produkt in (9). Ebenso haben $F_1(z)$ und $N_1(z)$ dieselbe Bedeutung wie in (9), dagegen ist jetzt

$$G_0(z) = \prod{}' (z - k_j) \prod (z - t_i)^2.$$

Wiederum sind alle t_i von einander, von allen k_j und von allen b_k verschieden; jedoch ist diesmal jedes t_i an die Bedingung gebunden

$$(13)\quad \frac{2F'(t_i)}{F(t_i)} - \frac{2G'''(t_i)}{3G''(t_i)} = \frac{R'(t_i)}{R(t_i)},$$

die man auch folgendermassen schreiben kann:

$$(13\text{a})\quad \frac{2F_0'(t_i)}{F_0(t_i)} - \frac{2G_0'''(t_i)}{3G_0''(t_i)} - \frac{2F_1'(t_i)}{F_1(t_i)} - \frac{4N_1'(t_i)}{N_1(t_i)} = \frac{R'(t_i)}{R(t_i)},$$

während für die Grössen k_j und b_k keinerlei besondere Vorschriften zu machen sind.

Das zuletzt gefundene Resultat ermöglicht es, im Falle $c = 0$ die Funktionen $H(z)$ und $G(z)$ auf einfachere Weise zu berechnen als mit den allgemeinen Relationen (7) und (8). Da man nämlich im Falle $c = 0$ nach (12) von vornherein weiss, dass $G(z)$ die Form $r(z)Q(z)^2$ haben muss, wo

$$r(z) = \prod{}' (z - k_j)$$

als eine bekannte Funktion gelten kann, so hat man ausser den Coefficienten h_j von $H(z)$ nur noch die Coefficienten q_i von $Q(z)$ zu ermitteln. Dies aber gelingt mit Benutzung der folgenden Identität, die man aus (3) ableitet, wenn man dort

$$R(z) = r(z) \cdot r_1(z), \quad G(z) = r(z)Q(z)^2, \quad c = 0$$

setzt und mit $N(z) \cdot Q(z)$ multiplicirt:

$$(14)\quad H(z)Q(z) - 4N(z)r(z)r_1(z)Q''(z)$$
$$+ 2[2M(z)r(z)r_1(z) - N(z)(3r'(z)r_1(z) + r(z)r_1'(z))]Q'(z)$$
$$+ [2M(z)r'(z)r_1(z) - N(z)(2r''(z)r_1(z) + r'(z)r_1'(z))]Q(z) = 0.$$

Hier braucht man nur

$$H(z)=\sum_0^{\nu+3}{}_j h_j z^{\nu+3-j}, \quad Q(z)=\sum_0^{\mu}{}_i q_i z^{\mu-i} \quad (q_0=1)$$

zu setzen und ebenso für die bekannten Funktionen $M(z)$, $N(z)$, $r(z)$ und $r_1(z)$ ihre Entwickelungen nach Potenzen von z einzutragen, um durch Nullsetzen der Coefficienten von

$$z^{\mu+\nu+3}, \quad z^{\mu+\nu+2}, \ldots z^0$$

$\mu+\nu+4$ Gleichungen (15) zu erhalten zur Bestimmung der $\mu+\nu+4$ Unbekannten

$$h_0,\ h_1,\ \cdots h_{\nu+3},\ q_1,\ q_2,\ \cdots q_\mu.$$

Es mag genügen, diese Gleichungen für 2 der überhaupt in Betracht kommenden 6 Fälle anzugeben.

Ist erstens

$$m=2\mu, \quad r(z)=1, \quad r_1(z)=R(z)=\sum_0^5{}_j r_j z^{5-j},$$

so nehmen die Relationen (15), wenn man noch

$$N(z)=\sum_0^{\nu}{}_k n_k z^{\nu-k} \qquad (n_0=1),$$

$$M(z)=\sum_0^{\nu}{}_k m_k z^{\nu-1-k} \quad (m_0=n,\ m_\nu=0)$$

setzt, die folgende Form an:

(15a)
$$\sum_0^{\mu}{}_i\Big\{h_{\mu+\nu+3-l-i}$$
$$+2(\mu-i)\sum_0^{\nu}{}_k[2m_k-(\mu-\nu+l-i+k)n_k]r_{\mu+\nu+3-l-i-k}\Big\}q_i=0$$
$$(l=\mu+\nu+3, \quad \mu+\nu+2, \quad \cdots 0).$$

Zweitens sei

$$m=2\mu+1, \quad r(z)=z-k_1,$$

$$r_1(z)=\frac{R(z)}{z-k_1}=\sum_0^4{}_j \varrho_j z^{4-j} \quad \left(\varrho_j=\sum_0^j{}_i r_i k_1^{\,j-i}\right).$$

Führt man dann in (14) $R(z)$ statt $r(z) \cdot r_1(z)$ und $R'(z) - r'(z) r_1(z)$ statt $r(z) r_1'(z)$ ein, so gewinnt man die gesuchten Gleichungen in der Gestalt:

$$(15\text{b}) \qquad L_l + \sum_0^\mu {}_i \sum_0^\nu {}_k [2 m_k$$
$$- (3\mu - \nu + 1 + l - 3i + k) n_k] \varrho_{\mu+\nu+3-l-i-k} q_i = 0$$
$$(l = \mu + \nu + 3, \quad \mu + \nu + 2, \quad \cdots 0),$$

wobei L_l die linke Seite von (15a) bedeutet.

Hat man nun im Falle $c = 0$ nach den Gleichungen (7) und (8) oder besser nach den Relationen (15) irgend ein Paar Funktionen $H(z)$ und $G(z)$ berechnet, die zu den gegebenen Funktionen $R(z)$ und $F(z)$ und zu dem gegebenen Grade m von $G(z)$ in endlicher Anzahl gehören, so liefert die Formel (2) zwar nur ein Integral der Differentialgleichung (1), nämlich

$$Z = \sqrt{G(z)};$$

nach bekannten Regeln findet man aber dazu sofort ein zweites:

$$Z = \sqrt{G(z)} \int \frac{F(z)\, dz}{G(z)\, s}.$$

§ 2. Zusammenstellung von Formeln aus der Theorie der hyperelliptischen Funktionen.

Um von den Erörterungen des vorigen Paragraphen zur Aufstellung und Integration der hier zu betrachtenden Systeme von Differentialgleichungen gelangen zu können, bedarf man gewisser Beziehungen aus der Theorie der hyperelliptischen Funktionen, die an dieser Stelle in aller Kürze zusammengestellt werden mögen.

Im Folgenden sollen, wie bereits in einer früheren Arbeit[1]), die sechs ungeraden Thetafunktionen mit zwei Argumenten v_1, v_2, also nach Weierstrass die Funktionen

$$-\vartheta_{24}(v) \quad -\vartheta_3(v) \quad -\vartheta_{04}(v) \quad -\vartheta_{13}(v) \quad -\vartheta_{02}(v) \quad -\vartheta_1(v)$$

der Reihe nach mit

$$\vartheta_1(v) \quad \vartheta_2(v) \quad \vartheta_3(v) \quad \vartheta_4(v) \quad \vartheta_5(v) \quad \vartheta_6(v) = \vartheta(v)$$

1) „Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Funktionen", Nova Acta der Leop.-Carol. Akad. L, 373—483, 1887.

bezeichnet werden, wonach die zehn geraden Thetafunktionen mit den WEIERSTRASS'schen Indices

0 34 01 23 2 5 4 12 03 14

beziehentlich die neuen Indices

12 13 14 15 23 24 25 34 35 45

zu erhalten haben.

Im Interesse einer Vereinfachung der Formeln werden statt dieser Thetafunktionen hyperelliptische Sigmafunktionen eingeführt durch die Gleichungen:

$$\sigma_j(v) = \frac{\vartheta_j(v)}{C_j} \quad (j = 1, 2, \cdots 6)$$

$$\sigma_{ij}(v) = \frac{\vartheta_{ij}(v)}{\vartheta_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, \cdots 5)^{1)}$$

$$C_j = \eta_j \sqrt{k_2 - k_1} \, \frac{\vartheta_{jk}\vartheta_{jl}\vartheta_{jm}\vartheta_{jn}}{\vartheta_{34}\vartheta_{35}\vartheta_{45}} \quad (j = 1, 2 \cdots 5)$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -i, \quad \eta_4 = \eta_5 = i$$

$$C_6 = C = -i\left(\sqrt{k_2 - k_1}\right)^3 \frac{\vartheta_{12}\vartheta_{13}\vartheta_{14}\vartheta_{15}\vartheta_{23}\vartheta_{24}\vartheta_{25}}{\vartheta_{34}^2\vartheta_{35}^2\vartheta_{45}^2}.$$

Dabei bedeuten k, l, m, n diejenigen vier der Zahlen 1, 2, ·· 5, die von j verschieden sind, während unter k_1, k_2 beliebige Constante zu verstehen sind.

Definirt man ferner drei weitere constante Grössen k_3, k_4, k_5 durch die Gleichungen

$$\frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{\vartheta_{24}^2\vartheta_{25}^2}{\vartheta_{34}^2\vartheta_{35}^2}, \quad \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_1} = -\frac{\vartheta_{23}^2\vartheta_{25}^2}{\vartheta_{34}^2\vartheta_{45}^2}, \quad \frac{k_5 - k_1}{k_2 - k_1} = -\frac{\vartheta_{23}^2\vartheta_{24}^2}{\vartheta_{35}^2\vartheta_{45}^2},$$

so lassen sich die zwischen den Nullwerthen der ersten partiellen Ableitungen der ungeraden Sigmafunktionen bestehenden Relationen auf die einfache Form bringen:

$$\sigma_j'(v_\varepsilon)_0 - \sigma_1'(v_\varepsilon)_0 = (k_j - k_1)\sigma'(v_\varepsilon)_0 \quad (j = 2, 3, 4, 5, \quad \varepsilon = 1, 2).$$

---

1) Diese Sigmafunktionen unterscheiden sich von denen des Herrn KLEIN („Ueber hyperelliptische Sigmafunktionen", Math. Ann. XXVII, 431—464, 1886) um einen Exponentialfaktor.

Unter solchen Umständen kann die Einführung neuer Argumente u_1, u_2 statt v_1, v_2 erfolgen durch die Gleichungen

$$(16)\quad \begin{cases} u_1 = K_{11} v_1 + K_{12} v_2 \qquad K v_1 = K_{22} u_1 - K_{12} u_2 \\ u_2 = K_{21} v_1 + K_{22} v_2 \qquad K v_2 = - K_{21} u_1 + K_{11} u_2 \\ \qquad K = K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21} \\ K_{1\varepsilon} = \dfrac{2}{\sqrt{r_0}} [\sigma_j'(v_\varepsilon)_0 - k_j \sigma'(v_\varepsilon)_0] \\ K_{2\varepsilon} = - \dfrac{2}{\sqrt{r_0}} \sigma'(v_\varepsilon)_0. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, 3, 4 \text{ oder } 5 \\ \varepsilon = 1, 2 \end{pmatrix}$$

Hier bedeutet $\sqrt{r_0}$ eine beliebige Constante.

Trägt man in die Sigmafunktionen für v_1, v_2 die sich aus den vorstehenden Formeln ergebenden Werthe in u_1, u_2 ein und setzt dann

$$(17)\quad \begin{cases} u_1 = \displaystyle\int \frac{z_1\,dz_1}{s_1} - \int \frac{z_2\,dz_2}{s_2} \\ u_2 = \displaystyle\int \frac{dz_1}{s_1} - \int \frac{dz_2}{s_2} \\ s_1 = \sqrt{R(z_1)} \qquad s_2 = \sqrt{R(z_2)} \\ R(z) = r_0 (z - k_1)(z - k_2)(z - k_3)(z - k_4)(z - k_5), \end{cases}$$

so gelten die folgenden Gleichungen der ROSENHAIN'schen Parameterdarstellung

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_j(v)}{\sigma(v)} = \sqrt{(z_1 - k_j)(z_2 - k_j)} = p_j \qquad (j = 1, 2, \cdots 5) \\ \dfrac{\sigma_{ij}(v)}{\sigma(v)} = \dfrac{p_i p_j}{z_2 - z_1} \left[\dfrac{s_1}{\sqrt{r_0}(z_1 - k_i)(z_1 - k_j)} + \dfrac{s_2}{\sqrt{r_0}(z_2 - k_i)(z_2 - k_j)} \right] \\ \qquad (i, j = 1, 2, \cdots 5). \end{cases}$$

Hieraus findet man dann weiter, wenn statt $k_i - k_j$ kurz $(i\ j)$ geschrieben wird,

$$(19)\quad \begin{cases} z_1 + z_2 = k_i + k_j + \dfrac{1}{(ij)} \left[\dfrac{\sigma_j^2(v)}{\sigma^2(v)} - \dfrac{\sigma_i^2(v)}{\sigma^2(v)} \right] \\ z_1 \cdot z_2 = k_i \cdot k_j + \dfrac{1}{(ij)} \left[k_i \dfrac{\sigma_j^2(v)}{\sigma^2(v)} - k_j \dfrac{\sigma_i^2(v)}{\sigma^2(v)} \right] \end{cases}$$

und ferner unter Berücksichtigung des sich aus (17) ergebenden Differentialzusammenhangs von z_1, z_2 und u_1, u_2:

$$(20)\quad \begin{cases} du_1 = \dfrac{z_1\,dz_1}{s_1} - \dfrac{z_2\,dz_2}{s_2} \\ du_2 = \dfrac{dz_1}{s_1} - \dfrac{dz_2}{s_2} \end{cases}$$

die folgenden Formeln:

$$(21)\quad \begin{cases} s_1 = \dfrac{1}{(ij)}[-(z_1-k_j)\mathsf{A}_i + (z_1-k_i)\mathsf{A}_j] \\ s_2 = \dfrac{1}{(ij)}[\ (z_2-k_j)\mathsf{A}_i - (z_2-k_i)\mathsf{A}_j] \\ z_2 s_1 = \dfrac{1}{(ij)}[\ (z_1-k_j)\mathsf{B}_i - (z_1-k_i)\mathsf{B}_j] \\ z_1 s_2 = \dfrac{1}{(ij)}[-(z_2-k_j)\mathsf{B}_i + (z_2-k_i)\mathsf{B}_j], \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\mathsf{A}_i = \frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\sigma_i^2(v)}{\sigma^2(v)}, \quad \mathsf{B}_i = \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\sigma_i^2(v)}{\sigma^2(v)}.$$

Eine blosse Folge hiervon sind die Relationen

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{s_1+s_2}{z_1-z_2} = \dfrac{1}{(ij)}(\mathsf{A}_j - \mathsf{A}_i) \\ \dfrac{z_2 s_1 + z_1 s_2}{z_1-z_2} = \dfrac{1}{(ij)}(k_i\mathsf{A}_j - k_j\mathsf{A}_i) = \dfrac{1}{(ij)}(\mathsf{B}_i - \mathsf{B}_j) \\ \dfrac{z_2^2 s_1 + z_1^2 s_2}{z_1-z_2} = \dfrac{1}{(ij)}(k_j\mathsf{B}_i - k_i\mathsf{B}_j). \end{cases}$$

Zum Schlusse dieser ersten Gruppe von Formeln mag noch eine Darstellung hyperelliptischer Integrale zweiter Gattung durch Sigmafunktionen angegeben werden, zu der man kommt, wenn man in der üblichen Weise $\dfrac{\partial^2 \log\sigma(v)}{\partial u_1^2}$ und $\dfrac{\partial^2\log\sigma(v)}{\partial u_1\,\partial u_2}$ durch Sigmafunktionen und dann mit Hilfe von (19) durch z_1, z_2 ausdrückt, daraus aber unter Benutzung von (20) das vollständige Differential von $\dfrac{\partial\log\sigma(v)}{\partial u_1}$ berechnet. Man findet

$$(23)\quad \begin{cases} \displaystyle\int^{z_1}\frac{z_1^2\,dz_1}{s_1} - \int^{z_2}\frac{z_2^2\,dz_2}{s_2} = \psi(u) \\ \psi(u) = -\dfrac{4}{r_0}\dfrac{\partial\log\sigma(v)}{d u_1} + \Big[\dfrac{4}{r_0}\sum\nolimits_{24}''(u_1,\ u_1)_0 + k_2 + k_4\Big]u_1 \\ \qquad + \Big[\dfrac{4}{r_0}\sum\nolimits_{24}''(u_1,\ u_2)_0 - k_2 k_4\Big]u_2, \end{cases}$$

wo $\sum_{24}''(u_\varepsilon, u_\eta)_0$ den Nullwerth des zweiten partiellen Differentialquotienten nach u_ε und u_η derjenigen Funktion $\sum_{24}(u)$ bedeutet, die aus $\sigma_{24}(v)$ hervorgeht, wenn man für v_1, v_2 ihre Werthe (16) einsetzt.

Die noch weiter erforderlichen Formeln aus der Theorie der hyperelliptischen Funktionen sind dadurch charakterisirt, dass in ihnen ein algebraischer Parameter t nebst einem der beiden zugehörigen Werthe $s(t)$ von $\sqrt{R(t)}$ vorkommt. Statt dessen können auch die beiden transcendenten Parameter

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \int\limits_{k_2}^{t,\,s(t)} \frac{z\,dz}{s} = \int\limits_{k_2}^{t,\,s(t)} du_1 \\ \alpha_2 = \int\limits_{k_2}^{t,\,s(t)} \frac{dz}{s} = \int\limits_{k_2}^{t,\,s(t)} du_2 \end{cases}$$

oder auch die Werthe a_1, a_2 von v_1, v_2 auftreten, die nach (16) zu diesen besonderen Werthen α_1, α_2 von u_1, u_2 gehören. Nach (18) können dann diese Grössen a_1, a_2 unabhängig von α_1, α_2 und von t, $s(t)$ auch dadurch definirt werden, dass sie der Relation genügen

$$\sigma_2(a_1, a_2) = 0.$$

Umgekehrt kann man natürlich t, $s(t)$ durch a_1, a_2 (oder α_1, α_2) ausdrücken; denn nach (19) und (21) hat man:

$$(25)\qquad \begin{cases} t = k_j + \frac{1}{(2j)} \frac{\sigma_j^2(a)}{\sigma^2(a)} \\ s(t) = \left[\frac{1}{(2j)^2} \frac{\sigma_j^2(a)}{\sigma^2(a)} - 1\right] \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{\sigma_j^2(a)}{\sigma^2(a)}. \end{cases} \qquad (j = 1,\ 3,\ 4 \text{ oder } 5)$$

Zunächst mag t verschieden von allen k_j vorausgesetzt werden. Indem man dann dem Gedankengange des Herrn Krause in seiner anfangs citirten Arbeit in diesen Berichten folgt, gelangt man zu den nachstehenden Ergebnissen:

$$(26)\qquad \begin{cases} (z_1 - t)(z_2 - t) = \frac{t - k_2}{(21)(23)(24)(25)}\, \Psi(u, \alpha) \\ \Psi(u, \alpha) = \frac{\sigma_2(v + a)\,\sigma_2(v - a)}{\sigma^2(v)\,\sigma^2(a)} \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \int \frac{dz_1}{(z_1-t)s_1} - \int \frac{dz_2}{(z_2-t)s_2} = \frac{1}{s(t)}\varphi(u,\ \alpha) \\ \varphi(u,\ \alpha) = \log\frac{\sigma_2(v-a)}{\sigma_2(v+a)} + 2\omega_1 u_1 + 2\omega_2 u_2 \\ \omega_1 = \frac{\partial \log\sigma(a)}{\partial\alpha_1},\quad \omega_2 = \frac{\partial\log\sigma(a)}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{2(2j)}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{\sigma_j^2(a)}{\sigma^2(a)} \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \sqrt{(z_1-t)(z_2-t)}\,e^{\mp\frac{s(t)}{2}\left[\int\frac{dz_1}{(z_1-t)s_1}-\int\frac{dz_2}{(z_2-t)s_2}\right]} = \Phi(u,\ \pm\alpha) \\ \Phi(u,\ \alpha) = \frac{\sigma_2(v+a)}{\sigma(v)\sigma(a)}e^{-\omega_1u_1-\omega_2u_2} \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} \int\frac{2R(t)+(z_1-t)R'(t)}{(z_1-t)^2s_1}dz_1 - \int\frac{2R(t)+(z_2-t)R'(t)}{(z_2-t)^2s_2}dz_2 \\ \qquad = \chi(u,\ \alpha) \\ \chi(u,\alpha) = -2t\frac{\partial\log\sigma_2(v+a)\sigma_2(v-a)}{\partial u_1} - 2\frac{\partial\log\sigma_2(v+a)\sigma_2(v-a)}{\partial u_2} \\ \qquad + \left[4t\sum_{24}''(u_1,\ u_1)_0 + 4\sum_{24}''(u_1,u_2)_0 - r_{24}(t)\right]u_1 \\ \qquad + \left[4t\sum_{24}''(u_1,\ u_2)_0 + 4\sum_{24}''(u_2,u_2)_0 + \right. \\ \qquad \left. + (k_1+k_3+k_5-2t)r_{24}(t) - r_{135}(t)\right]u_2 \\ r_{24}(t) = r_0(t-k_2)(t-k_4),\ r_{135}(t) = r_0(t-k_1)(t-k_3)(t-k_5). \end{cases}$$

Mit Hilfe der bisher angegebenen Formeln ist es möglich, für jeden Werth von h Funktionen Δ_h von u_1, u_2, α_1, α_2 zu berechnen derart, dass

$$\int\frac{dz_1}{(z_1-t)^hs_1} - \int\frac{dz_2}{(z_2-t)^hs_2} = \Delta_h(u,\ \alpha)$$

wird. Denn aus (23), (17), (27) und (29) entnimmt man unmittelbar

$$(30)\quad \begin{cases} \Delta_{-2}(u,\ \alpha) = \psi(u) - 2tu_1 + t^2u_2 \\ \Delta_{-1}(u,\ \alpha) = u_1 - tu_2 \\ \quad\Delta_0(u) = u_2 \\ \Delta_1(u,\ \alpha) = \frac{1}{s(t)}\varphi(u,\ \alpha) \\ \Delta_2(u,\ \alpha) = \frac{1}{2R(t)}\left[\chi(u,\ \alpha) - \frac{R'(t)}{s(t)}\varphi(u,\ \alpha)\right]. \end{cases}$$

Hieraus aber berechnet man alle weiteren Funktionen Δ_h mit Hilfe einer Recursionsformel, die man auf die bei solcher Ge-

legenheit übliche Art ableitet, indem man zunächst das Differential des Quotienten $\frac{s}{(z-t)^{h-1}}$ bildet. Entwickelt man $R(z)$ nach Potenzen von $z-t$:

$$R(z) = \sum_0^5 r_j(t)(z-t)^{5-j},$$

so führt dieser Weg zu der folgenden Gleichung:

$$(31)\qquad \begin{aligned} &(2h-2)r_5(t)\Delta_h(u,\alpha) + (2h-3)r_4(t)\Delta_{h-1}(u,\alpha) \\ &+ \cdots + (2h-7)r_0(t)\Delta_{h-5}(u,\alpha) + \Gamma_h(u,\alpha) = 0, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma_h(u,\alpha)$ diejenige Funktion bedeutet, die man erhält, wenn man den Bruch

$$2\frac{(z_2-t)^{h-1}s_1 - (z_1-t)^{h-1}s_2}{[(z_1-t)(z_2-t)]^{h-1}}$$

vermittelst der Formeln (19), (21), (25) und (26) durch u_1, u_2, α_1, α_2 ausdrückt.

Schliesslich mag noch eine Formel Platz finden, die sich auf den Fall bezieht, dass t gleich einem Nullwerth k_j von $R(z)$ ist:

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{dz_1}{(z_1-k_j)s_1} - \int \frac{dz_2}{(z_2-k_j)s_2} = \frac{1}{R'(k_j)}\chi_j(u) \qquad (j=1,2,\ldots 5) \\ &\chi_j(u) = -4k_j\frac{\partial \log \sigma_j(v)}{\partial u_1} - 4\frac{\partial \log \sigma_j(v)}{\partial u_2} \\ &+ [4k_j{\textstyle\sum''_{24}}(u_1, u_1)_0 + 4{\textstyle\sum''_{24}}(u_1, u_2)_0 - r_{24}(k_j)]\,u_1 \\ &+ [4k_j{\textstyle\sum''_{24}}(u_1, u_2)_0 + 4{\textstyle\sum''_{24}}(u_2, u_2)_0 + \\ &+ (k_1+k_3+k_5-2k_j)r_{24}(k_j) - r_{135}(k_j)]\,u_2. \end{aligned} \right.$$

Diese letzte Formel entsteht übrigens unmittelbar aus (29), wenn man dort $t = k_j$ setzt.

§ 3. Uebergang zu Systemen von Differentialgleichungen 2. Ordnung, die vermittelst hyperelliptischer Funktionen integrirbar sind.

Hat man nach den Relationen (7) und (8), beztl. im Falle $c = 0$ nach den Formeln (15), zwei Funktionen $H(z)$ und $G(z)$ berechnet, die zu der Funktion $R(z)$ des vorigen Paragraphen, zu irgend einer Funktion $F(z)$ von der in § 1 angegebenen Art,

zu irgend welchem der Relation (4) genügenden Werthe von m und zu irgend einem Werthe von c gehören, so besitzt das System der beiden Differentialgleichungen

$$(33) \quad R(z_\varepsilon)\frac{\partial^2 Z}{\partial z_\varepsilon^2} + \left(\tfrac{1}{2}R'(z_\varepsilon) - \frac{F'(z_\varepsilon)}{F(z_\varepsilon)}R(z_\varepsilon)\right)\frac{\partial Z}{\partial z_\varepsilon} = \tfrac{1}{4}\frac{H(z_\varepsilon)}{N(z_\varepsilon)}Z \quad (\varepsilon = 1, 2)$$

nach den Erörterungen des § 1 im Falle $c \neq 0$ die beiden Funktionen

$$(34) \quad Z_\varepsilon = \sqrt{G(z_1)G(z_2)}\, e^{\eta_\varepsilon c\left[\int \frac{F(z_1)\,dz_1}{G(z_1)s_1} - \int \frac{F(z_2)\,dz_2}{G(z_2)s_2}\right]}$$

$$(\varepsilon = 1, 2;\ \eta_1 = -1,\ \eta_2 = +1)$$

und im Falle $c = 0$ die beiden Funktionen

$$(35) \quad \begin{cases} Z_1 = \sqrt{G(z_1)G(z_2)} \\ Z_2 = \sqrt{G(z_1)G(z_2)}\left[\int \frac{F(z_1)\,dz_1}{G(z_1)s_1} - \int \frac{F(z_2)\,dz_2}{G(z_2)s_2}\right] \end{cases}$$

als linear unabhängige Integrale.

Führt man jetzt in (33) statt z_1, z_2 die durch (20) definirten Argumente der hyperelliptischen Funktionen als neue unabhängige Veränderliche ein, so erhält man zunächst

$$z_1^2\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1^2} + 2z_1\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial u_2^2} - \left(z_1 s_1 \frac{F'(z_1)}{F(z_1)} - s_1\right)\frac{\partial Z}{\partial u_1}$$
$$- s_1\frac{F'(z_1)}{F(z_1)}\frac{\partial Z}{\partial u_2} = \tfrac{1}{4}\frac{H(z_1)}{N(z_1)}Z$$

$$z_2^2\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1^2} + 2z_2\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial u_2^2} + \left(z_2 s_2 \frac{F'(z_2)}{F(z_2)} - s_2\right)\frac{\partial Z}{\partial u_1}$$
$$+ s_2\frac{F'(z_2)}{F(z_2)}\frac{\partial Z}{\partial u_2} = \tfrac{1}{4}\frac{H(z_2)}{N(z_2)}Z.$$

Um z_1, z_2 vollständig zu beseitigen, combinire man diese Gleichungen in geeigneter Weise und setze

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_1^\nu{}^k \frac{e_k}{z - b_k}$$

$$\frac{H(z)}{N(z)} = B_0 z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 + \sum_1^\nu{}^k \frac{B_{k+3}}{z - b_k} \quad (B_0 = h_0).$$

Auf solche Weise gewinnt man das folgende System von zwei Differentialgleichungen mit den unabhängigen Variablen u_1, u_2:

$$
(36)\quad\left\{\begin{aligned}
&(z_1+z_2)\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1^2}+2\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1\partial u_2}-X_1\frac{\partial Z}{\partial u_1}-X_2\frac{\partial Z}{\partial u_2}=\tfrac14 X_3 Z\\
&\qquad z_1z_2\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial u_2^2}-Y_1\frac{\partial Z}{\partial u_1}-Y_2\frac{\partial Z}{\partial u_2}=\tfrac14 Y_3 Z\\
&X_1=(n-1)\frac{s_1+s_2}{z_1-z_2}+\\
&\quad+\sum_1^{\nu}{}_k\frac{e_kb_k}{(z_1-b_k)(z_2-b_k)}\left[\frac{z_2s_1+z_1s_2}{z_1-z_2}-b_k\frac{s_1+s_2}{z_1-z_2}\right]\\
&X_2=\sum_1^{\nu}{}_k\frac{e_k}{(z_1-b_k)(z_2-b_k)}\left[\frac{z_2s_1+z_1s_2}{z_1-z_2}-b_k\frac{s_1+s_2}{z_1-z_2}\right]\\
&X_3=B_0(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+B_1(z_1+z_2)+B_2\\
&\quad-\sum_1^{\nu}{}_k\frac{B_{k+3}}{(z_1-b_k)(z_2-b_k)}\\
&Y_1=(n-1)\frac{z_2s_1+z_1s_2}{z_1-z_2}+\\
&\quad+\sum_1^{\nu}{}_k\frac{e_kb_k}{(z_1-b_k)(z_2-b_k)}\left[\frac{z_2^2s_1+z_1^2s_2}{z_1-z_2}-b_k\frac{z_2s_1+z_1s_2}{z_1-z_2}\right]\\
&Y_2=\sum_1^{\nu}{}_k\frac{e_k}{(z_1-b_k)(z_2-b_k)}\left[\frac{z_2^2s_1+z_1^2s_2}{z_1-z_2}-b_k\frac{z_2s_1+z_1s_2}{z_1-z_2}\right]\\
&Y_3=B_0z_1z_2(z_1+z_2)+B_1z_1z_2-B_3\\
&\quad-\sum_1^{\nu}{}_k\frac{B_{k+3}(z_1+z_2-b_k)}{(z_1-b_k)(z_2-b_k)}.
\end{aligned}\right.
$$

Hier hat man sich die Grössen

$$z_1+z_2,\ z_1z_2,\ \frac{s_1+s_2}{z_1-z_2},\ \frac{z_2s_1+z_1s_2}{z_1-z_2},\ \frac{z_2^2s_1+z_1^2s_2}{z_1-z_2},\ (z_1-b_k)(z_2-b_k)$$

durch die unter (19), (22) und (26) angegebenen Ausdrücke in u_1, u_2 ersetzt zu denken.

Um zwei linear unabhängige Integrale des Systems (36) zu finden, hat man nur die Integrale (34) beztl. (35) des Systems (33) als Funktionen von u_1, u_2 darzustellen.

I. Fall. $c \neq 0$.

Hier ist zu beachten, dass nach (9) $G(z)$ die Form hat

$$G(z)=\prod(z-t_i)\prod{}'(z-b_k)^{r_k+1}=G_0(z)F_1(z)N_1(z).$$

Setzt man also noch, wie schon früher,

$$F(z) = F_0(z) \cdot F_1(z),$$

so erhält man

$$\frac{F(z)}{G(z)} = \frac{F_0(z)}{G_0(z) N_1(z)}.$$

Weiter muss berücksichtigt werden, dass man nach (10) und (11) setzen kann:

$$c = s(t_i)\frac{G_0'(t_i) N_1(t_i)}{2 F_0(t_i)} = s(b_k)\frac{(e_k + 1) G_0(b_k) N_1'(b_k)}{2 F_0(b_k)}.\text{[1]}$$

A. Ist nun $m > n$, so kann $\frac{F(z)}{G(z)}$ ohne weiteres in Partialbrüche zerlegt werden, worauf man erhält

$$c\frac{F(z)}{G(z)} = \sum_i \frac{s(t_i)}{2(z - t_i)} + \sum_k{}' \frac{s(b_k)(e_k + 1)}{2(z - b_k)}.$$

Diese Entwickelung ist in (34) einzusetzen. Dann findet man mit Benutzung von (28) die folgenden beiden Integrale des Systems (36):

$$(37) \qquad \begin{cases} Z_1 = \prod_i \Phi(u, \alpha^{(i)}) \prod_k{}' \Phi(u, \alpha^{[k]})^{e_k + 1} \\ Z_2 = \prod_i \Phi(u, -\alpha^{(i)}) \prod_k{}' \Phi(u, -\alpha^{[k]})^{e_k + 1}. \end{cases}$$

Hier bedeuten $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$ die beiden zu t_i, $s(t_i)$ nach (24) gehörigen Parameter, während $\alpha_1^{[k]}$, $\alpha_2^{[k]}$ ebenso von b_k, $s(b_k)$ abhängen.

B. Ist $m = n$, so gehe man aus von der Identität

$$\frac{F(z)}{G(z)} = 1 + \frac{F_0(z) - G_0(z) N_1(z)}{G_0(z) N_1(z)}$$

und entwickele den Quotienten rechter Hand in Partialbrüche. Dann gewinnt man unter Berücksichtigung von (17) zwei Integrale des Systems (36) in folgender Gestalt:

$$(37\text{a}) \qquad Z_1^{(n)} = e^{-c u_2} Z_1, \quad Z_2^{(n)} = e^{c u_2} Z_2,$$

falls Z_1 und Z_2 dieselben Funktionen bedeuten wie in (37).

---

1) Das Vorzeichen einer ersten Quadratwurzel $s(t_i) = \sqrt{R(t_i)}$ oder $s(b_k) = \sqrt{R(b_k)}$ kann hier beliebig gewählt werden; unter jedem weiteren $s(t_i)$ und $s(b_k)$ ist aber derjenige Wurzelwerth zu verstehen, bei dessen Wahl c dasselbe Vorzeichen erhält wie im ersten Falle.

C. Ist $m = n - 1$, so ist in der Identität

$$\frac{F(z)}{G(z)} = z - \sum_1^{\nu} {}^k e_k b_k + \sum{}' (e_k + 1) b_k + \sum t_i +$$
$$+ \frac{F_0(z) - (z - \Sigma e_k b_k + \Sigma'(e_k + 1) b_k + \Sigma t_i) G_0(z) N_1(z)}{G_0(z) N_1(z)}$$

der Zähler des rechts stehenden Bruches vom Grade $n - 2 - \sum{}' e_k$, der Nenner aber vom Grade $n - 1 - \sum{}' e_k$. Man kann also wiederum in Partialbrüche zerlegen und erhält als Integrale von (36):

$$(37\text{b}) \quad \begin{cases} Z_1^{(n-1)} = e^{-c u_1 + c(\Sigma e_k b_k - \Sigma'(e_k + 1) b_k - \Sigma t_i) u_2} \cdot Z_1 \\ Z_2^{(n-1)} = e^{c u_1 - c(\Sigma e_k b_k - \Sigma'(e_k + 1) b_k - \Sigma t_i) u_2} \cdot Z_2, \end{cases}$$

wobei Z_1 und Z_2 wiederum dieselbe Bedeutung haben wie in (37).

II. Fall. $c = 0$.

Jetzt hat nach (12) die ganze Funktion $G(z)$ die Form

$$G(z) = \prod{}' (z - k_j) \prod (z - t_i)^2 \cdot \prod{}' (z - b_k)^{2 e_k + 2}$$
$$= G_0(z) F_1(z)^2 N_1(z)^2.$$

Trägt man dies in das erste Integral (35) des Systems (33) ein, so erkennt man mit Benutzung der Formeln (18) und (26), dass das System von Differentialgleichungen (36) unter allen Umständen das Integral besitzt

$$(38) \quad Z_1 = \prod{}' \frac{\sigma_j(v)}{\sigma(v)} \prod \Psi(u, \alpha^{(i)}) \prod{}' \Psi(u, \alpha^{[k]})^{e_k + 1},$$

wobei die Grössen $\alpha^{(i)}$ und $\alpha^{[k]}$ dieselben Parameter bedeuten wie in (37).

Schwieriger ist es, das zweite Integral (35) als Funktion von u_1, u_2 darzustellen. Da $\sqrt{G(z_1) \cdot G(z_2)}$ gleich der Funktion (38) ist, so handelt es sich noch darum, eine Funktion $\Omega(u)$ derart zu bestimmen, dass

$$\int \frac{F(z_1) dz_1}{G(z_1) s_1} - \int \frac{F(z_2) dz_2}{G(z_2) s_2} = \Omega(u)$$

ist. Hierzu beachte man zunächst, dass man setzen kann:

$$\frac{F(z)}{G(z)} = \frac{F_0(z)}{G_0(z) F_1(z) N_1(z)^2}.$$

Das Weitere gestaltet sich wiederum verschieden je nach dem Werthe von m.

A. Ist $m > n$, so gewinnt man unter Benutzung der Relation (13a) die folgende Darstellung durch Partialbrüche:

$$\frac{F(z)}{G(z)} = P_1(z) + P_2(z) + P_3(z)$$

$$P_1(z) = \sum_j{}' \frac{F_0(k_j)}{G_0'(k_j)\, F_1(k_j)\, N_1(k_j)^2} \frac{1}{z - k_j}$$

$$P_2(z) = \sum^i \left[\frac{c_i}{(z - t_i)^2} + \frac{d_i}{z - t_i}\right]$$

$$c_i = \frac{2F_0(t_i)}{G_0''(t_i)\, F_1(t_i)\, N_1(t_i)^2}$$

$$d_i = \frac{F_0(t_i)}{G_0''(t_i)\, F_1(t_i)\, N_1(t_i)^2}\left[\frac{2F_0'(t_i)}{F_0(t_i)} - \frac{2G_0'''(t_i)}{3G_0''(t_i)} - \frac{2F_1'(t_i)}{F_1(t_i)} - \frac{4N_1'(t_i)}{N_1(t_i)}\right]$$

$$= \frac{F_0(t_i)}{G_0''(t_i)\, F_1(t_i)\, N_1(t_i)^2} \frac{R'(t_i)}{R(t_i)}$$

$$P_2(z) = \sum^i \frac{F_0(t_i)}{R(t_i)\, G_0''(t_i)\, F_1(t_i)\, N_1(t_i)^2} \frac{2R(t_i) + (z - t_i)\, R'(t_i)}{(z - t_i)^2},$$

$$P_3(z) = \sum_k{}' \left[\frac{F_0(b_k)}{G_k(b_k)} \frac{1}{(z - b_k)^{e_k+2}} + \sum_1^{e_k+1}{}^l \frac{c_{kl}}{(z - b_k)^{e_k+2-l}}\right]$$

$$G_k(z) = \frac{G_0(z)\, F_1(z)\, N_1(z)^2}{(z - b_k)^{e_k+2}} \qquad c_{kl} = \frac{1}{l!}\left[\frac{d^l}{dz^l}\left(\frac{F_0(z)}{G_k(z)}\right)\right]_{z = b_k}.$$

Dementsprechend zerfällt auch die gesuchte Funktion $\Omega(u)$ in drei Theile, die man nach (32), (29), (30) und (31) berechnen kann:

$$(39)\begin{cases} \Omega(u) = \Omega_1(u) + \Omega_2(u) + \Omega_3(u) \\ \Omega_1(u) = \sum_j{}' \dfrac{F_0(k_j)}{R'(k_j)\, G_0'(k_j)\, F_1(k_j)\, N_1(k_j)^2}\, \chi_j(u) \\ \Omega_2(u) = \sum^i \dfrac{F_0(t_i)}{R(t_i)\, G_0''(t_i)\, F_1(t_i)\, N_1(t_i)^2}\, \chi(u, \alpha^{(i)}) \\ \Omega_3(u) = \sum_k{}' \left[\dfrac{F_0(b_k)}{G_k(b_k)} \varDelta_{e_k+2}(u, \alpha^{[k]}) + \sum^l c_{kl}\, \varDelta_{e_k+2-l}(u, \alpha^{[k]})\right]. \end{cases}$$

Wegen der Bedeutung der Gröſsen $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\alpha_1^{[k]}$, $\alpha_2^{[k]}$ vergleiche man (37).

Ist also $m > n$, so lautet ein zweites Integral des Systems (36):

(40) $$Z_2 = Z_1 \cdot \Omega(u),$$

wobei Z_1 durch (38), $\Omega(u)$ durch (39) definirt ist.

B. Ist $m = n$, so findet man mit Hilfe der Identität

$$\frac{F(z)}{G(z)} = 1 + \frac{F_0(z) - G_0(z) F_1(z) N_1(z)^2}{G_0(z) F_1(z) N_1(z)^2}$$

als zweites Integral des Systems (36):

(40a) $$Z_2^{(n)} = Z_1 [u_2 + \Omega(u)].$$

C. Ist $m = n - 1$, so ist

$$F_0(z) - \left(z - \sum_1^{\nu} e_k b_k + \sum' k_j + 2\sum t_i + 2\sum'(e_k + 1) b_k\right) G_0(z) F_1(z) N_1(z)^2$$

eine ganze rationale Funktion $D(z)$ vom Grade $n - 2 - \Sigma' e_k$, während die Funktion

$$E(z) = G_0(z) F_1(z) N_1(z)^2$$

einen um 1 höheren Grad hat. Die Identität

$$\frac{F(z)}{G(z)} = z - \sum_1^{\nu} e_k b_k + \sum' k_j + 2\sum t_i + 2\sum'(e_k + 1) b_k + \frac{D(z)}{E(z)}$$

lehrt dann, dass dem zweiten Integral (35) des Systems (33) das folgende Integral des Systems (36) entspricht:

(40b) $$Z_2^{(n-1)} = Z_1 \cdot [u_1 - (\Sigma e_k b_k - \Sigma' k_j - 2\Sigma t_i - 2\Sigma'(e_k + 1) b_k) u_2 + \Omega(u)].$$

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass man im Falle $c \neq 0$ sofort noch zwei linear unabhängige Integrale, im Falle $c = 0$ noch ein drittes Integral des Systems von Differentialgleichungen (36) angeben kann, die sämtlich von den beiden bereits gefundenen Integralen (37) beztl. (38) und (40) linear unabhängig sind. Führt man nämlich neue Argumente U_1, U_2 ein, die mit z_1, z_2 durch die Gleichungen verbunden sind

$$\begin{cases} dU_1 = \dfrac{z_1 dz_1}{s_1} + \dfrac{z_2 dz_2}{s_2} \\ dU_2 = \dfrac{dz_1}{s_1} + \dfrac{dz_2}{s_2}, \end{cases}$$

so lehrt der Vergleich mit den Definitionsgleichungen (20) der Grössen u_1, u_2, dass die neuen Argumente mit den alten in folgendem Zusammenhange stehen:

$$dU_1 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} du_1 - \frac{2 z_1 z_2}{z_1 - z_2} du_2$$

$$dU_2 = \frac{2}{z_1 - z_2} du_1 - \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} du_2.$$

Hier sind nach (19) die Coefficienten von du_1 und du_2 solche Funktionen von u_1, u_2, in denen nur noch ein Vorzeichen willkürlich bleibt.

Die neuen Integrale des Systems (36) werden nun gewonnen, wenn man in den Funktionen (37) beztl. (40) u_1, u_2 durch U_1, U_2 ersetzt, alsdann aber für U_1, U_2 diejenigen Ausdrücke in u_1, u_2 einträgt, die durch die Integration der vorstehenden Differentialrelationen entstehen.

Druckfertig erklärt 7. VI. 1901.]

Paul Stäckel in Kiel: *Ueber das Dirichlet'sche Integral.*

I.

Der Beweis, den Dirichlet im Jahre 1829 für die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch trigonometrische Reihen gegeben hat, beruht auf dem Lehrsatze:

„Ist $f(\xi)$ eine stetige Function von ξ, die, während ξ von 0 bis h wächst $\left(\text{wo die Constante } h > 0 \text{ und } \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, so wird das Integral:

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\,d\xi,$$

wenn man darin der Zahl n immer grössere positive Werthe beilegt, zuletzt immerfort weniger als jede angebbare Gröſse von $\frac{\pi}{2}f(0)$ verschieden sein.“ (Werke Bd. I. Berlin 1889. S. 154.)

Als Corollar aus diesem Satze folgt (a. a. O. S. 155):

„Sind g und h Constanten, welche den Bedingungen genügen $g > 0$, $\frac{\pi}{2} \geqq h > g$, und geht die Function $f(\xi)$, wenn ξ von g bis h wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt über, so wird das Integral:

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\,d\xi$$

für unendlich grosses n der Null gleich.“

Im Folgenden will ich zunächst einen Weg angeben, auf dem man unmittelbar, ohne Benutzung des Dirichlet'schen Lehrsatzes, zu dem Corollar gelangt, und dann zeigen, dass sich unter gewissen Voraussetzungen über die Natur der Function $f(\xi)$ umgekehrt aus dem Corollar der Lehrsatz ableiten lässt.

Einen sehr eleganten direkten Beweis für das Corollar findet man bereits in einer 1860 erschienenen Abhandlung von Herrn Scheibner[1]), der, wie Dirichlet, zunächst voraussetzt, dass $f(\xi)$ in dem Integrationsintervall stetig ist und nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, und dann durch Zerlegung in Intervalle die Gültigkeit des Corollars auf Functionen ausdehnt, die nur eine endliche Anzahl von endlichen Sprüngen und endlich viele Maxima und Minima besitzen. Der hier mitgetheilte Beweis ist insofern allgemeiner, als bei ihm einzig und allein die Stetigkeit von $f(\xi)$ in dem Intervall $\xi = (g \ldots h)$ vorausgesetzt wird, sodass also stetige Functionen mit unendlich vielen Oscillationen nicht ausgeschlossen werden.

2.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet die Formel:

$$\int_\alpha^\beta \sin(2n+1)\xi d\xi = \frac{\cos(2n+1)\alpha - \cos(2n+1)\beta}{2n+1},$$

aus der sofort folgt, dass der absolute Werth des Integrals $\leq \frac{2}{2n+1}$ ist. Zu demselben Ergebnis gelangt man auch durch eine geometrische Betrachtung. Die zu der Curve

$$\eta = \sin(2n+1)\xi$$

gehörige Area besteht aus Wellen der Länge $\frac{2\pi}{2n+1}$, bei denen Berg und Thal immer gleich gross, nämlich gleich $\frac{2}{2n+1}$ sind. Da Berg und Thal auf entgegengesetzten Seiten der ξ-Achse liegen, liefern sie zusammen jedesmal den Beitrag Null zum Integral und bei der Summation kann höchstens eine (positiv oder negativ zu nehmende) Fläche vom Inhalte $\frac{2}{2n+1}$ übrig bleiben.

Ist die Function $\varphi(\xi)$ in dem Intervall $\xi = (g \ldots h)$ stetig, so ist sie bekanntlich auch gleichmässig stetig, es lässt sich also nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse

1) Über unendliche Reihen und deren Convergenz. Gratulationsschrift für Prof. Unger. Leipzig. S. Hirzel. 1860.

ε eine ganze positive Zahl r von der Beschaffenheit angeben, dass für die r Intervalle

$$\xi = \left(g \cdots g + \frac{h-g}{r}\right), \left(g + \frac{h-g}{r} \cdots g + 2\frac{h-g}{r}\right),$$

$$\cdots, \left(g + \lambda\frac{h-g}{r} \cdots g + (\lambda+1)\frac{h-g}{r}\right), \left(g + (r-1)\frac{h-g}{r} \cdots h\right)$$

die Darstellungen gelten:

$$\varphi(\xi) = \varphi\left(g + \lambda\frac{h-g}{r}\right) + \varepsilon\vartheta_\lambda(\xi) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, r-1),$$

wo die Functionen $\vartheta_\lambda(\xi)$ den Ungleichheiten

$$|\vartheta_\lambda(\xi)| < 1$$

genügen. Mithin besteht die Gleichung:

$$\int_g^h \sin(2n+1)\xi \cdot \varphi(\xi)d\xi = \sum_{\lambda=0}^{r-1}\varphi\left(g + \lambda\frac{h-g}{r}\right)\int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)\xi d\xi$$

$$+ \varepsilon \cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1}\int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)\xi \cdot \vartheta_\lambda(\xi)d\xi.$$

In der ersten Summe ist jedes der r Integrale absolut genommen $\leqq \frac{2}{2n+1}$, in der zweiten, da der Integrand, abgesehen vom Vorzeichen, < 1 ist, jedes der r Integrale absolut genommen kleiner als das Integrationsintervall, also $< \frac{h-g}{r}$. Bedeutet also M das Maximum des absoluten Betrages von $\varphi(\xi)$ in dem Intervall $\xi = (g \cdots h)$, so ist unter allen Umständen:

$$\left|\int_g^h \sin(2n+1)\xi \cdot \varphi(\xi)d\xi\right| < M \cdot \frac{2r}{2n+1} + \varepsilon(h-g).$$

Wählt man daher jedesmal, nachdem ε angenommen und r bestimmt ist, $2n+1$ hinreichend gross, zum Beispiel

$$2n + 1 \geqq r^2,$$

so kann man durch Verkleinerung von ε erreichen, dass der absolute Betrag des Integrals

$$\int_g^h \sin(2n+1)\xi \cdot \varphi(\xi)\,d\xi$$

kleiner als jede gegebene beliebig kleine positive Grösse δ wird, d. h. es ist:

$$(L) \qquad \lim_{n=\infty} \int_g^h \sin(2n+1)\xi \cdot \varphi(\xi)\,d\xi = 0.$$

Es ist nützlich, sich die geometrische Bedeutung der Bedingung anschaulich zu machen, dass $2n+1$ gross gegen die grosse Zahl r sein soll. Durch die Eintheilung des Intervalls $\xi = (g \cdots h)$ in eine grosse Anzahl kleiner Theilintervalle wird erreicht, dass die Function $\varphi(\xi)$ in jedem der Theilintervalle höchstens um den Betrag 2ε schwankt, also nahezu constant ist. Indem man jetzt $2n+1$ gross gegen r wählt, bewirkt man, dass die Anzahl der Wellen, die auf jedes Theilintervall fallen, trotz der Kleinheit dieser Intervalle wieder gross wird. Da aber Berge und Thäler Beiträge zu dem Integral liefern, die sich gegenseitig zerstören, so bleibt für jedes Theilintervall als Gesammtbeitrag zum Integral nur eine so kleine Grösse übrig, dass auch die Summe von r solchen ausserordentlich kleinen Grössen klein ist. Man gewinnt auf diese Weise eine klare Einsicht in den Process, der bewirkt, dass der Werth des Integrals mit wachsenden Werthen der Zahl n immer kleiner und kleiner wird.

3.

Wenn die Function $f(\xi)$ in dem Intervall $\xi = (g \cdots h)$ stetig ist, so gilt dasselbe von der Function

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sin \xi},$$

sobald $g > 0$, $\frac{\pi}{2} \leqq h > g$ ist, wobei g dem Werthe Null beliebig nahe kommen darf, und so folgt daher aus der Gleichung (L) sofort das DIRICHLET'sche Corollar:

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi} f(\xi)\,d\xi = 0,$$

das somit für alle stetigen Functionen $f(\xi)$ bewiesen ist.

Eine wesentliche Veränderung der Sachlage tritt ein, wenn man in der Gleichung (L) $g = 0$ annimmt, denn alsdann ist es nicht zulässig

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sin \xi}$$

zu setzen, weil für $\xi = 0$ die Stetigkeit durch das Verschwinden von $\sin \xi$ zerstört werden kann. Will man also die Gleichung (L) verwerthen, so muss man dafür sorgen, dass auch der Zähler von $\varphi(\xi)$ für $\xi = 0$ verschwindet. Das lässt sich aber erreichen, indem das Integral

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi} f(\xi)\, d\xi$$

in der Form geschrieben wird:

$$f(0) \cdot \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi} d\xi + \int_0^h \sin(2n+1)\xi \cdot \frac{f(\xi) - f(0)}{\sin \xi} d\xi,$$

und hieraus folgt durch eine einfache Ueberlegung der Lehrsatz:

„Ist die Function $f(\xi)$ so beschaffen, dass ausser $f(\xi)$ selbst auch der Quotient

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi}$$

in dem Intervall $\xi = (0 \cdots h)$, $h \leqq \frac{\pi}{2}$ stetig ist, so gilt die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi} f(\xi)\, d\xi$$

$$= f(0) \cdot \lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi} d\xi = \frac{\pi}{2} f(0).“$$

Hieraus folgt, dass eine stetige Function $F(\xi)$ für jedes Intervall, in dem sie eine endliche erste Ableitung besitzt, stets in eine Fourier'sche Reihe entwickelt werden kann.

Druckfertig erklärt 4. VI. 1901.]

Felix Hausdorff: *Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

Von den nachstehenden kleineren Untersuchungen behandelt § 1 einen der grundlegenden Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, § 2 ist eine Notiz zur empirischen Prüfung des Gauss'schen Fehlergesetzes, § 3 giebt eine neue und sehr vereinfachte Construction von Fehlerfunctionen, insbesondere für den Fall, dass das Gauss'sche Gesetz als erste Annäherung gilt.

1. Die relative Wahrscheinlichkeit.

Der Begriff der relativen Wahrscheinlichkeit kommt sowohl ausdrücklich als implicite in den bisherigen Darstellungen vor, spielt dort aber durchaus nicht die *fundamentale* Rolle, die ihm m. E. unter den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebührt.

Wenn bei dem Versuche, der über das Eintreffen oder Ausbleiben des Ereignisses E entscheidet, die Zahl der *überhaupt* günstigen gleichberechtigten Fälle durch die Zahl der *überhaupt* möglichen gleichberechtigten Fälle dividirt wird, so entsteht die Wahrscheinlichkeit von E schlechthin, die *absolute Wahrscheinlichkeit* $p(E)$. Werden hingegen unter den günstigen und möglichen Fällen nur diejenigen gezählt, die ein bestimmtes anderes Ereigniss F herbeiführen, so entsteht die *relative Wahrscheinlichkeit von E unter der Voraussetzung, dass F verwirklicht sei,* ein Begriff, für den sich die Schreibung $p_F(E)$ und etwa die Ausdrucksweise *relative Wahrscheinlichkeit von E, posito F* empfehlen dürfte. Hierbei muss daran erinnert werden, dass in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich ja auch sonst mehrfache, genau zu bezeichnende Abweichungen von der gewöhnlichen Terminologie gestattet, das Wort *Ereigniss* einen umfassenderen Sinn hat als anderswo und nicht nur das zeitliche Geschehen, sondern jede Art Thatbestand, Sachverhalt, „Urtheilsmaterie" bedeuten kann; „ein Ereigniss trifft ein" würde im sonstigen

wissenschaftlichen Sprachgebrauch häufig durch andere Wendungen wiederzugeben sein, etwa: eine Voraussetzung trifft zu, eine Hypothese ist verwirklicht, eine Alternative entscheidet sich, ein Subject hat bestimmte Prädicate u. s. w. Bezüglich dieser verschiedenen Qualitäten ist den durch die Operation $p_F(E)$ mit einander in Beziehung gesetzten Ereignissen E und F der weiteste Spielraum gelassen; E und F können Ereignisse gleicher Structur, können aber auch so heterogen wie möglich sein, sie können zeitliches Geschehen bedeuten und in jeder der drei möglichen Folgen auftreten (E vor F, E zugleich mit F, E nach F), können sich aber auch auf irgend ein vom Zeitverlauf unberührtes Verhalten der Dinge beziehen. Wie mir scheint, sind es unter allen diesen Möglichkeiten nur zwei specielle Einschränkungen, in denen der Begriff der relativen Wahrscheinlichkeit bisher zu seinem Rechte gekommen ist: einmal der Fall, dass das vorausgesetzte Ereigniss F dem noch zweifelhaften E zeitlich *vorangeht,* sodann der Fall, dass E eine der unter der Voraussetzung F noch übrig bleibenden Möglichkeiten ist, mit anderen Worten, dass E als Specialfall in F enthalten, mit dem Eintreffen von E sicherlich auch F realisirt ist. Kurz, wenn wir bereits jetzt die eingeführte Bezeichnung benutzen, man beschränkte zweitens den Begriff der relativen Wahrscheinlichkeit $p_F(E)$ auf den Fall, dass die umgekehrte relative Wahrscheinlichkeit $p_E(F) = 1$, gleich der Gewissheit ist: so z. B. wird nach der relativen Wahrscheinlichkeit gefragt, dass, wenn aus einem Kartenspiel eine Figur gezogen worden ist, diese Figur ein König sei. Diese Beschränkung ebensowohl wie die erste, dass die Voraussetzung F nothwendig ein vergangenes Ereigniss betreffen müsse, ist dem Wesen der Sache durchaus nicht angemessen; wir wiederholen, dass es logisch vollkommen freisteht, zwei Ereignisse E und F von beliebiger Qualität und beliebigem Zusammenhange durch die Operation $p_F(E)$ mit einander in Beziehung zu bringen, der sich natürlich als verschiedene, aber gleichberechtigte Operation die relative Wahrscheinlichkeit von F, posito E, also der Quotient $p_E(F)$ anreiht. Nur in dem einen Falle, dass F eine *unmögliche* Voraussetzung, ein Ereigniss von der absoluten Wahrscheinlichkeit Null, darstellt, wird das Zeichen $p_F(E)$ bedeutungslos und reducirt sich auf die völlig unbestimmte Form $0:0$, da offenbar keiner der sonst möglichen und günstigen Fälle die Voraussetzung F realisirt.

Es bedarf keiner weitläufigen Erörterung, dass die absolute Wahrscheinlichkeit, aus der durch Hinzutreten bestimmter Voraussetzungen die relativen Wahrscheinlichkeiten entspringen, selbst nichts schlechthin Absolutes, sondern von dem jeweilig vorhandenen oder als vorhanden betrachteten Erkenntnissstande abhängig ist: also auch nur wiederum eine relative Wahrscheinlichkeit, genommen unter Voraussetzungen, die besonders zu formuliren kein Anlass vorliegt. Jener Erkenntnissstand kann sich verändern und dementsprechende Veränderungen der absoluten und relativen Wahrscheinlichkeiten nach sich ziehen; wäre z. B. bei derjenigen Beurtheilung einer Sachlage, der die Wahrscheinlichkeitsansätze $p(E)$ und $p_F(E)$ entspringen, irrthümlicherweise ein Thatbestand G übersehen worden, dessen Wirklichkeit anzunehmen sich nachträglich als nothwendig erweist, so würden die genannten Ansätze in $p_G(E)$ und $p_{FG}(E)$ abzuändern sein; also die vom ursprünglichen Standpunkt aus relative Wahrscheinlichkeit $p_G(E)$ würde sich als die dem corrigirten Standpunkte entsprechende absolute Wahrscheinlichkeit erweisen. Diese Betrachtung zeigt, dass sich die POISSON'sche Unterscheidung zwischen subjectiver Wahrscheinlichkeit (probabilité) und objectiver, abstracter Wahrscheinlichkeit (chance), soweit sie überhaupt scharf fassbar ist, zwanglos in das Schema der absoluten und relativen Wahrscheinlichkeit einfügt: wobei *im Allgemeinen* die subjective Wahrscheinlichkeit der absoluten, die objective der relativen entspricht — eine Paradoxie in der Benennung, die in diesem Falle nicht zu vermeiden ist. Denn die objective Wahrscheinlichkeit repräsentirt gegenüber der subjectiven die vermehrte Sachkenntniss, die verminderte Ungewissheit, sie entsteht durch Hinzutritt gewisser Voraussetzungen, deren Erfülltsein von der subjectiven Wahrscheinlichkeit in suspenso gelassen war; sie ist ein $p_F(E)$, das vor der subjectiven Wahrscheinlichkeit $p(E)$ die Kenntniss des Sachverhaltes F voraus hat. Die objective, relative, d. h. durch bereicherten Erkenntnissstand beschränkte Wahrscheinlichkeit ist ein Quotient *aus kleineren Zahlen* als die subjective, absolute, voraussetzungsärmere Wahrscheinlichkeit, denn jedes positive Wissen verringert die Zahl der Möglichkeiten; denkt man sich diese Vermehrung des Wissens, und die entsprechende Verkleinerung von Zähler und Nenner im Wahrscheinlichkeitsbruche, bis zur äussersten Grenze fortschreitend, so kann als im strengsten Sinne „objective“ Wahrscheinlichkeit, der als Erkenntnissniveau

die Intelligenz des Laplace'schen Weltgeistes entsprechen würde, nur einer der beiden Werthe 0 oder 1 bestehen bleiben. So, wie gesagt, fällt im Allgemeinen die Zuordnung zwischen dem Begriffspaar „absolute und relative Wahrscheinlichkeit" und der Poisson'schen Unterscheidung aus; jedoch soll nicht verkannt werden, dass auch die entgegengesetzte Rollenvertheilung möglich ist. Ein vermehrtes Wissen kann, statt in der Hinzunahme, auch in der Preisgabe, im Fallenlassen bisher unangezweifelter Voraussetzungen bestehen, in der Eröffnung vorher ausgeschlossener Möglichkeiten, in der Vergrösserung des Zählers und Nenners im Wahrscheinlichkeitsquotienten, — man denke etwa an die nichteuklidische Geometrie, oder fingire, um dem üblichen Vorstellungskreise der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher zu bleiben, den Fall, dass die Kugelvertheilung in mehreren Urnen, deren eine aufs Gerathewohl zur Ziehung ausgewählt wird, zwar verschieden ist, aber irrthümlicherweise für identisch gehalten wird. Hier würde also dem niedrigeren, *subjectiven* Erkenntnissstande eine durch Voraussetzungen beschränkte *relative*, der vollständigen *objectiven* Sachkenntniss eine *absolute*, voraussetzungsärmere Wahrscheinlichkeit entsprechen — welche Parallele dem gewöhnlichen Sprachgebrauch mehr zusagen dürfte, doch aber nur für den Fall zutrifft, dass das fortschreitende Erkennen ausnahmsweise nicht aufbauend, constructiv, dogmatisch, sondern skeptisch, destructiv, Irrthümer zerstörend vorgeht. Endlich kann, aus dem Zusammenwirken polemischer und schöpferischer Erkenntniss, der Fall entspringen, dass eine bisher unangetastete Voraussetzung preisgegeben und eine neue, unter Umständen das Gegentheil der ersten, der corrigirten Auffassung zu Grunde gelegt wird; es ist dann der Übergang einer relativen Wahrscheinlichkeit $p_F(E)$ in irgend eine andere relative Wahrscheinlichkeit $p_G(E)$, der dem Poisson'schen Übergang von der subjectiven probabilité zur objectiven chance entspricht. Die geschilderte Mehrdeutigkeit in der Correspondenz, die Biegsamkeit und Ambiguität der relativen Wahrscheinlichkeit hinsichtlich ihres Erkenntnisswerthes darf nicht überraschen, da die logische Berechtigung des Ansatzes $p_F(E)$ ganz unabhängig ist vom Wahrheitsgehalt der hinzugefügten Voraussetzung F (nur den Fall $p(F) = 0$ ausgeschlossen).

Wenn für irgend ein Ereignisspaar E, F die verschiedenen absoluten und relativen Wahrscheinlichkeiten wirklich formulirt und in Beziehung gesetzt werden sollen, so kommt man auf die

folgende einfache, wohl von Poincaré zuerst gegebene Aufstellung. Vorher sei verabredet, dass wir mit $\overline{E}$ das Nichtstattfinden von E, das (contradictorische) Gegentheil von E bezeichnen wollen; ferner soll, wie im Logikcalcül üblich, $E+F$ das Stattfinden mindestens eines der beiden Ereignisse E, F und $E \cdot F$ das Stattfinden beider Ereignisse bedeuten, sodass $\overline{E+F} = \overline{E} \cdot \overline{F}$. Diese beiden Operationen des Entweder-oder und des Sowohl-als auch befolgen, als Addition und Multiplication aufgefasst, einzeln das associative und commutative, zusammen das distributive Gesetz. Man hat ohne Weiteres $E = EF + E\overline{F}$ und durch leichte Verallgemeinerung

$$E = EF_1 + EF_2 + \cdots + EF_n,$$

wenn $F_1 F_2 \cdots F_n$ die Glieder einer vollständigen Disjunction, d. h. einander ausschliessende Ereignisse sind, von denen eins eintreten muss. Solche Disjunctionsglieder lassen sich immer durch $n-1$ Elemente in der Form

$$F_1 = G_1, \; F_2 = \overline{G}_1 G_2, \; F_3 = \overline{G}_1 \overline{G}_2 G_3,$$
$$\cdots F_{n-1} = \overline{G}_1 \overline{G}_2 \cdots \overline{G}_{n-2} G_{n-1}, \; F_n = \overline{G}_1 \overline{G}_2 \cdots \overline{G}_{n-2} \overline{G}_{n-1}$$

darstellen. Aus der ursprünglichen Definition der Wahrscheinlichkeit folgt nun sofort der *Additionssatz* (Satz vom Entweder-oder, Satz über die totale Wahrscheinlichkeit)

$$p(E) = p(EF) + p(E\overline{F})$$
$$p(E) = p(EF_1) + p(EF_2) + \cdots + p(EF_n),$$

d. h. der Satz: die Wahrscheinlichkeit, dass von mehreren *einander ausschliessenden* Ereignissen eines eintrete, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Werden zwei Ereignisse E, F zu einander in Beziehung gesetzt, so bilden die vier Combinationen

$$EF, \; E\overline{F}, \; \overline{E}F, \; \overline{E}\overline{F}$$

die Glieder einer vollständigen Disjunction, und es seien

$$\alpha, \; \beta, \; \gamma, \; \delta$$

die Anzahlen der ihnen günstigen gleichberechtigten Fälle. Man hat dann

$$p(EF):p(E\bar{F}):p(\bar{E}F):p(\bar{E}\bar{F}):1 =$$
$$= \alpha:\beta:\gamma:\delta:(\alpha+\beta+\gamma+\delta),$$
$$p(E) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},\quad p(F) = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$
$$p_F(E) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma},\qquad p_E(F) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

folglich

$$p(EF) = p(E)\cdot p_E(F) = p(F)\cdot p_F(E),$$

welche Formel den *Multiplicationssatz* (Satz vom Sowohl-als auch) ausspricht: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse zusammen eintreten, ist das Product aus der Wahrscheinlichkeit des ersten in die *relative* Wahrscheinlichkeit des zweiten, genommen unter der Voraussetzung, dass das erste verwirklicht sei.[1])

Hieran würde sich die scharfe Definition der *Abhängigkeit* und *Unabhängigkeit* von Ereignissen zu schliessen haben. Dass

---

1) Liebhabern eines consequent durchgeführten symbolischen Calcüls dürfte folgende Bezeichnungsweise willkommen sein. Schränken wir die Summendefinition $E+F$ auf den Fall einander *ausschliessender* Componenten ein und verstehen unter $N = E + \bar{E}$ die Nothwendigkeit, die Gewiſsheit, den Inbegriff zweier contradictorischer Gegentheile, also die Abwesenheit jeder speciellen und zweifelhaften Voraussetzung ($p(N) = 1$), so kann man die Wahrscheinlichkeiten als Ereigniss-*quotienten* schreiben, wobei der Nenner das *vorausgesetzte* Ereigniss, der Zähler das Product desselben mit demjenigen Ereigniss ist, dessen relative Wahrscheinlichkeit in Frage steht. Es wäre also

$$p_F(E) = \frac{EF}{F}$$

zu setzen, während

$$p(E) = \frac{EN}{N} = \frac{E}{N}$$

eine absolute Wahrscheinlichkeit bedeutet. Es gelten dann die Rechenvorschriften

$$\frac{E+F}{N} = \frac{E}{N} + \frac{F}{N},$$
$$\frac{EF}{N} = \frac{EF}{F}\cdot\frac{F}{N} = \frac{EF}{E}\cdot\frac{E}{N};$$

im Gegensatz zur letzten Formel darf man jedoch innerhalb *eines einzigen* Quotienten im Zähler und Nenner gemeinsame Factoren weder unterdrücken noch hinzufügen, vielmehr bedeutet die Erweiterung resp. Kürzung des Quotienten um den Factor F eben nichts anderes als die Hinzunahme resp. Preisgabe der Voraussetzung F.

eine solche nicht überflüssig ist, bezeugt der noch in neueren Darstellungen nicht ausgerottete Missbrauch, im Additionssatz statt von *einander ausschliessenden* von *unabhängigen* Ereignissen zu reden und dadurch nicht nur den Sprachgebrauch (der im Einanderausschliessen eine ganz besonders starke gegenseitige Verkettung statuirt) zu verletzen, sondern einen inneren Widerspruch mit der im Multiplicationssatz gemeinten Unabhängigkeit herbeizuführen: man mag es mit den Benennungen halten wie man will, jedenfalls ist es nicht gestattet, die in den beiden Formeln

$$p(E+F) = p(E) + p(F),$$
$$p(EF) = p(E) \cdot p(F)$$

vorausgesetzte gegenseitige Relation der Ereignisse beide Male mit *demselben* Worte zu bezeichnen. Die naturgemässe Definition der Abhängigkeit und Unabhängigkeit zweier Ereignisse wird lauten:

Das Ereigniss E heisst vom Ereigniss F *unabhängig* oder *abhängig*, je nachdem die beiden relativen Wahrscheinlichkeiten $p_F(E)$ und $p_{\bar{F}}(E)$ *gleich* oder *verschieden* sind.

Nach dem Poincaré'schen Schema ist

$$p_F(E) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, \quad p_{\bar{F}}(E) = \frac{\beta}{\beta+\delta},$$

demnach ist $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ das Kriterium der Unabhängigkeit, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ das der Abhängigkeit des Ereignisses E von F. Denkt man sich die beiden Ereignisse E und F vertauscht, so werden β und γ mit einander vertauscht und der Ausdruck $\alpha\delta - \beta\gamma$ bleibt ungeändert: daraus folgt, dass die Unabhängigkeit oder Abhängigkeit zweier Ereignisse immer *gegenseitig* ist, dass E und F *von einander* unabhängig oder abhängig genannt werden müssen. Das Einanderausschliessen ($\alpha = 0$) ist ein Specialfall der Abhängigkeit, vorausgesetzt, dass keines der beiden Ereignisse etwa absolut unmöglich ist, dass also weder β noch γ verschwinden kann. Sind beide Ereignisse unabhängig, so zeigt die Formel

$$\begin{aligned} p(E) &= p(EF) + p(E\bar{F}) \\ &= p(F)p_F(E) + p(\bar{F})p_{\bar{F}}(E) \\ &= [p(F) + p(\bar{F})]p_F(E) \\ &= p_F(E) = p_{\bar{F}}(E), \end{aligned}$$

dass die nur scheinbar relativen Wahrscheinlichkeiten $p_F(E)$ u. s. w. sich in Wirklichkeit wieder auf die absoluten reduciren, sodass der Multiplicationssatz die vereinfachte Form $p(EF) = p(E)p(F)$ annimmt.

Das hier definirte Abhängigkeitsverhältniss umfasst als Specialfall die eigentliche *Determination*, die logische, mathematische oder causale Abhängigkeit, die auf Grund einer Voraussetzung E die Folge F mit Nothwendigkeit herbeiführt, sodass in unserer Bezeichnung $p_E(F) = 1$, während umgekehrt der Grund aus der Folge, die Ursache aus der Wirkung nicht eindeutig bestimmbar zu sein braucht. Da nun solche einseitigen Abhängigkeiten, wenn auch oft nur scheinbar einseitig, sich der Beobachtung viel häufiger aufdrängen als die Fälle gegenseitiger, umkehrbar eindeutiger Determination, so zeigt der hiervon beeinflusste Sprachgebrauch ein unverkennbares Widerstreben gegen die oben festgestellte *gegenseitige Abhängigkeit* zweier Ereignisse, während er gegen die gegenseitige Unabhängigkeit nichts einzuwenden haben dürfte. Hierzu kommt noch die der Sache völlig fremde Einmischung der *Zeit,* vermöge deren man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so gut wie in den Naturwissenschaften immer das Antecedens als activ, bestimmend, das Succedens als leidend, bestimmt, abhängig vorzustellen gewohnt ist. Es ist bekannt, dass auch in der Philosophie der Naturwissenschaften Versuche zur Reform dieses einseitigen, zeitlich inficirten Ursachbegriffes vorliegen; in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es jedenfalls dringend nothwendig, vom Zeitverlauf vollständig abzusehen und auch die Abhängigkeit eines früheren Ereignisses von einem späteren zuzugeben. Wenn bei Kugelziehungen aus einer Urne die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden, so ist der zweite Zug vom ersten, in genau derselben Weise aber der erste vom zweiten abhängig; die Kugel, die bei dem einen Zuge ergriffen worden ist oder werden wird, ist für den anderen nicht mehr oder noch nicht verfügbar. Wird aus mehreren Urnen von verschiedener Füllung gezogen, so ist die Kugelziehung von der Wahl der Urne, aber auch umgekehrt diese von jener abhängig, indem z. B. die Ziehung einer weissen Kugel, gleichviel ob als geschehen oder nur als möglich gedacht, die Wahl einer nur mit schwarzen Kugeln gefüllten Urne ausschliesst.

Durch die Aneignung dieser, nur beim ersten Anblick etwas fremdartigen Auffassung des Abhängigkeitsverhältnisses dürfte

auch eine klarere Einsicht in die Bedeutung des sogenannten *BAYES'schen Princips* zu gewinnen sein. Die philosophische Kritik hat sich grossentheils mit besonderer Heftigkeit gegen dieses „Princip" gerichtet, als ob darin ein besonderer Uebergriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ein Vorstoss in fremdes, mit Hülfe neuer willkürlicher Axiome usurpirtes Gebiet zu erblicken sei; und in der That erwecken manche Darstellungen, wenn auch vielleicht nur durch die Anordnung des Stoffes, den Eindruck, als werde hier zu den anfänglichen Elementen des Systems der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine neue Voraussetzung hinzupostulirt. Die BAYES'sche Regel ist kein besonderes „Princip"; sie bleibt durchaus innerhalb des einmal gezogenen Gedankenkreises und gehört ins erste Capitel, dahin, wo die Grundbegriffe und Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt werden. Neu ist an ihr höchstens der terminus technicus „Ursache", dessen bekannte Definition in unserer Bezeichnung die ganz besonders einfache Form annimmt: C heisst Ursache von E, wenn $p_C(E)$ logisch existirt und einen bestimmten Werth hat (die gewöhnliche, der causalen Betrachtung gemässe Definition ist in dieser als specieller Fall enthalten, indem sie $p_C(E) = 1$ als Kriterium der Ursächlichkeit aufstellt). Man wird allerdings, um die Abweichung von dem gewöhnlichen Ursachbegriff nicht noch unnütz zu verschärfen, hinzufügen müssen, dass C ein *Inhaltsminimum* sein, d. h. keine entbehrlichen Bestimmungen enthalten soll; wenn also $p_{CD}(E) = p_C(E)$, was für jedes posito C von E unabhängige Ereigniss D gilt, so soll nicht der engere, specialisirte Thatbestand CD, sondern der weitere, von der überflüssigen Voraussetzung D befreite Thatbestand C als Ursache von E angesehen werden. Dass hiernach die BAYES'sche Regel nichts als eine Beziehung zwischen verschiedenen relativen und absoluten Wahrscheinlichkeiten bedeutet, geht aus folgendem Schema hervor, das den LAPLACE'schen Gedankengang in die Sprache der relativen Wahrscheinlichkeit überträgt: Sind $C_1 C_2 C_3 \ldots$ die Glieder einer vollständigen Disjunction, d. h. Ereignisse (Hypothesen, Ursachen), von denen eins und nur ein einziges eintreffen (zutreffen, wirken) muss, so ist *einerseits*

$$E = EC_1 + EC_2 + \cdots = \sum_i EC_i$$

und nach dem Additionssatze

$$p(E) = \sum_i p(EC_i) = \sum_i p(C_i) \cdot p_{C_i}(E),$$

andererseits nach dem Multiplicationssatze

$$p(EC_k) = p(E)p_E(C_k) = p(C_k) \cdot p_{C_k}(E),$$

folglich

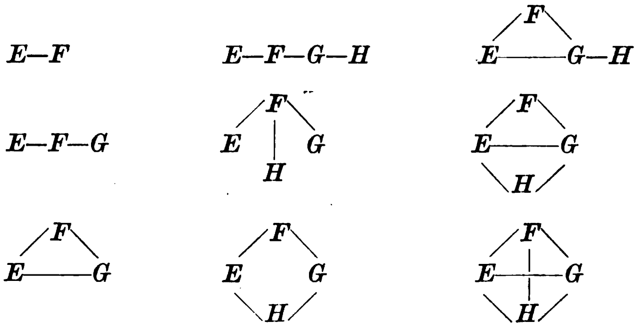
$$p_E(C_k) = p(C_k) \cdot p_{C_k}(E) : p(E)$$
$$= p(C_k) \cdot p_{C_k}(E) : \sum_i p(C_i)p_{C_i}(E).$$

Nun stelle man an der Beziehung zwischen den C_i und E die Ursächlichkeit in den Vordergrund, fasse also C_i als eine der möglichen Ursachen auf, die dem Ereignisse E die Wahrscheinlichkeit $p_i = p_{C_i}(E)$ ertheilt, nenne ferner $\omega_i = p(C_i)$ die *Wahrscheinlichkcit a priori* der Ursache C_i, so wird $p_E(C_k) = \omega_k p_k : \sum_i \omega_i p_i$ die *Wahrscheinlichkeit a posteriori* der Ursache C_k, ihre relative Wahrscheinlichkeit nämlich auf Grund des beobachteten Ereignisses E. Das ist das ganze BAYES'sche Princip, das also, wenn man die der Zeit- und Causalitätssphäre entliehenen Hüllen abzieht, nichts als eine elementare Folgerung aus den allerersten Grundbegriffen und durchaus keiner besonderen Kritik zu unterwerfen ist. Die Anwendungen der BAYES'schen Regel mögen grösstentheils sehr anfechtbarer Natur sein, aber das liegt nicht an ihr selbst, sondern an der meist völlig willkürlichen Verfügung über die unbekannten apriorischen Wahrscheinlichkeiten ω_i, oder allgemeiner gesprochen, an der ehedem sehr verbreiteten Neigung, auf das absolute Nichtwissen und den Mangel aller zahlenmässigen Data trotzdem mathematische Wahrscheinlichkeitsansätze zu gründen.

Es darf nicht versäumt werden, darauf hinzuweisen, dass die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit zweier Ereignisse natürlicherweise auf denjenigen Erkenntnissstand, dem die benutzten absoluten Wahrscheinlichkeiten entsprechen, bezogen ist und sich mit diesem Erkenntnissstande verändern kann; die Hinzunahme einer neuen Voraussetzung kann zwischen unabhängigen Ereignissen das Band der Abhängigkeit knüpfen oder umgekehrt zwischen abhängigen es zerreissen. In Formel: aus der Gleichheit oder Ungleichheit von $p_F(E)$ und $p_{\bar{F}}(E)$ ist kein Schluss auf das Verhalten von $p_{FG}(E)$ und $p_{\bar{F}G}(E)$ zu ziehen. Vielleicht ist statt dieser abstracten Bemerkung ein Beispiel erwünscht. Aus

einer Urne mit weissen und schwarzen Kugeln werde eine Kugel, sodann aus einem Kartenspiel eine Karte gezogen, und zwar, im Fall einer weissen Kugel, aus einem Kartenspiel I, das ein Piquetspiel (von 32 Karten) ist, im Fall einer schwarzen Kugel aus einem Spiel II, das ebensogut ein Piquet- wie ein Whistspiel (mit 52 Karten) sein kann. Nun sei etwa E das Ziehen einer weissen Kugel, F das Ziehen eines Königs, während G den Sachverhalt bezeichne, dass auch II ein Piquetspiel ist. Hier sind zunächst (ohne das Wissen um G) E und F von einander abhängig, würden es auch nach Adjunction der Hypothese $\overline{G}$ bleiben, werden dagegen durch Bekanntschaft mit der Thatsache G von einander unabhängig. — Aendert man dies Beispiel so ab, dass bezüglich beider Kartenspiele die obige Ungewissheit bestehen soll und G die Thatsache der Verschiedenheit beider Spiele bedeutet, so sind E und F von einander unabhängig, bleiben auch nach Vermehrung des Erkenntnissstandes um $\overline{G}$ von einander unabhängig, während jede der beiden Hypothesen G sie in gegenseitige Abhängigkeit setzt.

Da wir zuletzt drei Ereignisse in Betracht zogen, so wollen wir noch auf die möglichen Verkettungsweisen von mehr als zwei Ereignissen einen Blick werfen; in einem solchen Ereigniss-complex kann die Abhängigkeit zweier Elemente nach dem Vorbilde der Chemie durch einen Bindestrich bezeichnet werden. *Irreducibel* wird ein Complex heissen, wenn jedes Element mit jedem anderen unmittelbar oder wenigstens mittelbar verbunden ist; *reducible* Complexe (z. B. E—F G—H) entstehen durch unverbundene Nebeneinandersetzung irreducibler Gruppen und können daher unberücksichtigt bleiben. Die irreduciblen Typen von 2, 3, 4 Elementen sind



Wenn es praktisches Interesse hätte, so könnte man durch passend gebildete Beispiele die Frage zu beantworten suchen, ob alle diese Verkettungsformen wirklich vorkommen; bei drei Ereignissen ist es leicht, sowohl für die offene Kette E—F—G (zwei unabhängige Ereignisse EG, von denen ein drittes F abhängt) als auch für den geschlossenen Ring $\begin{smallmatrix} & F & \\ \diagup & & \diagdown \\ E & \text{———} & G \end{smallmatrix}$ Beispiele zu ersinnen. Ein besonderer Fall möge noch erwähnt werden. Es seien $E_1\, E_2 \cdots E_m$ Glieder einer vollständigen Disjunction, F ein ferneres Element; man bezeichne im Poincaré'schen Schema mit α_i und β_i die Zahl der gleichberechtigten Fälle E_iF und $E_i\bar{F}$, mit α und β die Summen $\sum\limits_i \alpha_i$, $\sum\limits_i \beta_i$, dann ist $\alpha\beta_i - \beta\alpha_i$ der Ausdruck, dessen Verschwinden oder Nichtverschwinden die Unabhängigkeit oder Abhängigkeit des Ereignisspaares E_iF entscheidet. Da die Summe aller dieser Ausdrücke verschwindet, so geht daraus hervor, dass jedenfalls F nicht nur von *einem einzigen* der E_i abhängig, von allen übrigen $m-1$ unabhängig sein kann; wohl aber könnte F von zweien, dreien oder mehreren unter den E_i abhängig, von den übrigen unabhängig sein. Soll also F von sämmtlichen E_i unabhängig sein, so bestehen zwischen den $2m$ Zahlen des Schemas $m-1$ Bedingungen. Wird, allgemeiner, statt der Alternative F, $\bar{F}$ ebenfalls eine vollständige Disjunction F_1, $F_2 \cdots F_n$ in Betracht gezogen, so nennen wir die Disjunctionen (E_i) und (F_k) von einander *unabhängig*, wenn jedes Gliederpaar E_iF_k unabhängig ist; die mn Zahlen des Poincaré'schen Schemas sind dann durch $(m-1)(n-1)$ Relationen verknüpft, sodass $m+n-1$ Grössen willkürlich bleiben — als Wahrscheinlichkeiten kommen aber nur deren $m+n-2$ Verhältnisse in Betracht, etwa die durch die beiden Relationen $\sum\limits_i p(E_i) = \sum\limits_k p(F_k) = 1$ verknüpften $m+n$ absoluten Wahrscheinlichkeiten $p(E_i)$, $p(F_k)$. Von hier aus ist der naturgemässe Uebergang zu dem zu finden, was man in der Fehlertheorie unter Unabhängigkeit versteht. Es sei E_i das Ereigniss, dass eine Grösse x den bestimmten Werth x_i annimmt, ebenso F_k das Ereigniss, dass y den Werth y_k annimmt; die Grössen x, y heissen dann von einander unabhängig, wenn die Disjunctionen (E_i), (F_k) von einander unabhängig, also für jedes Indexpaar E_i, F_k von einander unabhängig sind, während im Falle auch nur *eines* Paares abhängiger

Ereignisse $E_i F_k$ (dem sich aber, nach dem oben Gesagten, mindestens noch drei weitere Paare anreihen würden) x und y als von einander abhängig bezeichnet werden müssen. Dieser Abhängigkeitsbegriff schliesst die determinirte Abhängigkeit, die eindeutige Functionsbeziehung, als speciellen Fall ein, indem hier $p_{E_i}(F_i) = 1$, $p_{E_i}(F_k) = 0$ wird. — Geht man zu dem Falle über, dass die Werthmengen (x_i), (y_k) Continua sind, so treten an Stelle von $p(E_i)$, $p(F_k)$, $p(E_i F_k)$ die Wahrscheinlichkeiten $\varphi(x)dx$, $\psi(y)dy$, $f(xy)dxdy$, dass sich die Grössen x, y, oder beide, in den Intervallen $x \pm \frac{1}{2}dx$, $y \pm \frac{1}{2}dy$ befinden. Das Kriterium der Unabhängigkeit liefert am einfachsten der Multiplicationssatz $p(E_i F_k) = p(E_i)p(F_k)$, also in diesem Falle $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$: die Fehlerfunction des Grössenpaares muss das Product aus den Fehlerfunctionen der einzelnen Grössen sein.

Damit will ich diese Erörterung schliessen, die naturgemäss keine neuen Einzelresultate bringen konnte, vielleicht aber zu einer verschärften Auffassung gewisser fundamentaler Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Beitrag liefert. Die relative Wahrscheinlichkeit macht alle sonstigen „Arten“ der Wahrscheinlichkeit, subjective und objective, totale und partielle, Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori, entbehrlich, sie gestattet alle causalen und zeitlichen Hülfsvorstellungen auszuschalten und stellt die Wahrscheinlichkeitsrechnung als homogenes Anwendungsgebiet einer einzigen logischen Function dar: der Unterscheidung, ob irgend einer der gleichberechtigten Fälle eine bestimmte Voraussetzung (die je nach Umständen die Rolle unseres E oder F spielen kann) realisirt oder nicht.

2. Zur Bestimmung des Präcisionsmaasses.

Der Fehler x einer zu messenden Grösse befolge das Gauss'sche Gesetz mit dem Präcisionsmaasse h; bei l Messungen mögen sich die wahren Beobachtungsfehler $x_1 x_2 \cdots x_l$ ergeben haben, aus denen ein Schluss auf das unbekannte h gezogen werden soll. Eine Serie von approximativen Werthen H dieser Grösse ergiebt sich aus den *Potenzmitteln* der absoluten Fehler; Gauss[1]) hat die Genauigkeit dieser Serie von Bestimmungen untersucht und gefunden, dass bei Benutzung der α ten Fehlerpotenzen das Quadrat

1) Bestimmung der Genauigkeit von Beobachtungen. Werke IV, p. 109.

des mittleren Fehlers von H näherungsweise durch $(h^2 : 2l) \cdot F(\alpha)$ dargestellt wird, wobei

$$F(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2}\left[\frac{\Pi(\alpha - \frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2} - 1\right],$$

also für

$\alpha =$	1	2	3	4	5	6
$F(\alpha) =$	1,14	1,00	1,09	1,33	1,78	2,51.

Hiernach ist die Bestimmung aus dem arithmetischen Mittel der Fehler*quadrate* die günstigste. — Daneben ist eine zweite Serie zu erwähnen, von der Gauss nur einen einzigen, und bei weitem nicht den günstigsten Fall herausgegriffen hat; mir ist nicht bekannt, dass diese Lücke schon ausgefüllt worden wäre. Es sei x eine von allen x_λ verschiedene, sonst beliebig gewählte positive Zahl, und von den $l = m + n$ beobachteten Fehlern mögen m absolut kleiner, n grösser als x sein. Da

$$p = \Theta(hx) = \Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-tt}dt, \quad t = hx,$$

die Wahrscheinlichkeit war, dass bei Anstellung einer Beobachtung der Fehler kleiner als x ausfiel, so haben wir nach dem Bernoulli'schen Satze approximative Uebereinstimmung zwischen p und der relativen Häufigkeit $m : l$ zu erwarten, und zwar ist das Quadrat des mittleren Fehlers von $m : l$ bekanntlich $= p(1 - p) : l$. Bestimmen wir daher einen angenäherten Werth H des Präcisionsmaasses aus der Gleichung

$$\frac{m}{l} = \Theta(Hx),$$

so ist bei hinlänglich kleinem Betrage des Fehlers $H - h$

$$\frac{m}{l} = \Theta(t + \overline{H - h}x) = \Theta(t) + \frac{d\Theta(t)}{dt}(H - h)x + \cdots$$

$$= p + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-tt}(H - h)x$$

$$H - h = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{tt}}{x}\left(\frac{m}{l} - p\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}h\frac{e^{tt}}{t}\left(\frac{m}{l} - p\right).$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers von H ist also gleich $\frac{\pi}{4}h^2\frac{e^{2tt}}{t^2}$ mal dem Quadrat des mittleren Fehlers von $m : l$, d. h. gleich

$$h^2 \frac{\pi e^{2tt} p(1-p)}{4\, t^2 \quad l} = \frac{h^2}{2l} f(t),$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \Theta(t)[1 - \Theta(t)] \frac{e^{2tt}}{t^2}.$$

Hiermit ist die Genauigkeit dieser zweiten Serie, der Bestimmung des Präcisionsmaasses aus der *Fehlerhäufigkeit* innerhalb einer willkürlich gewählten Grenze, auf dieselbe Form gebracht wie die der ersten Serie aus den Potenzmitteln; der Factor $f(t)$ ist unmittelbar mit den $F(\alpha)$ vergleichbar. GAUSS berücksichtigt nur einen einzigen Fall, dass nämlich x den sogenannten wahrscheinlichen Fehler vertritt, d. h. ebensoviele Fehler der absoluten Grösse nach unter sich wie über sich hat; hier ist $p = \Theta(t) = \frac{1}{2}$, $t = 0{,}4769$, $f(t) = 2{,}72$, sodass diese Bestimmung an Genauigkeit zwischen das 6. und 7. Potenzmittel fiele. Aber man kann t, resp. p viel vorteilhafter wählen; die Function $f(t)$ hat ein Minimum zwischen $t = 1{,}0$ und $1{,}1$, etwa bei $t = 1{,}05$, wie folgende Zusammenstellung

t	1,00	1,05	1,10
$f(t)$	1,539	1,534	1,540
p	0,843	0,862	0,880

erkennen lässt. Um die günstigste Bestimmung zu haben, wird man also x so legen, dass etwa 86 % der Fehler unterhalb, etwa 14 % oberhalb x liegen; der mittlere Fehler des gefundenen H ist dann zwar $\sqrt{1{,}53} = 1{,}24$ mal so gross wie bei der Benutzung des zweiten Potenzmittels ($\sqrt{1{,}53 : 1{,}14} = 1{,}16$ mal so gross wie beim ersten), aber die Rechnung ist sicher sehr einfach. Dem Gedächtniss leicht einzuprägen ist die Regel für $t = hx = 1$: das Präcisionsmaass ist rund das Reciproke desjenigen Werthes, der von 16 % der beobachteten Fehler überschritten, von 84 % nicht erreicht wird, für welche Procentzahlen man einfacher $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$ setzen kann.

3. Ueber die Entwicklung von Fehlerfunctionen.

Die Rolle, die das GAUSS'sche Exponentialgesetz als Approximation und Anfangsglied der Reihenentwicklung von Fehlerfunctionen spielt, geht aus den zahlreichen bisherigen Darstellungen nicht in voller Klarheit hervor. Die Untersuchungen über das BERNOULLI'sche Theorem, die Entwicklungen von LAPLACE, BESSEL,

BRUNS u. v. A. lassen wohl keinen Zweifel über das *Was*, aber das *Warum* bleibt undurchsichtig; die geheimnissvolle Entstehung des GAUSS'schen Gesetzes aus dem Zusammenwirken zahlreicher Einzelfehler zu einem Gesammtfehler behält, so zu sagen, den Character eines überraschenden fait accompli. Nun ist es ja im allerstrengsten Sinne nicht zulässig, nach dem Warum einer bewiesenen mathematischen Wahrheit zu fragen, denn der Grund liegt eben im Beweise; aber nicht ohne Berechtigung spricht man vom Nerv des Beweises, von Einfachheit oder Complication, und will damit sagen, dass ein Beweis mehr oder weniger von den inneren Structurverhältnissen der Sache zum Vorschein bringen kann. In diesem Sinne glaube ich, dass die folgende kurze Darstellung und insbesondere der neueingeführte Begriff der *kanonischen Parameter* einen schärferen Einblick in die Stellung der GAUSS'schen Fehlerfunctionen unter ihresgleichen gestattet.

Eine Grösse x (die wir der Einfachheit wegen als Beobachtungsfehler denken, obwohl sie auch alles andere, z. B. den Gewinn in einem Zufallsspiele bedeuten kann) möge eine discrete oder continuirliche Reihe von Werthen mit gewissen Wahrscheinlichkeiten anzunehmen fähig sein. Es seien also entweder $x_1 x_2 x_3 \cdots$ die verschiedenen Werthe, die x mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 p_2 p_3 \cdots$ erlangen kann, oder es sei $\varphi(x)$ die *Fehlerfunction* des continuirlich veränderlichen Fehlers x, d. h. $\int_a^b \varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit, dass x im Intervalle (a, b) liege. Das praktische Bedürfniss kann sich auf diese beiden Fälle beschränken, obwohl theoretisch noch sehr viele andere möglich sind (z. B. könnte x eine Fehlerfunction besitzen und *daneben* noch *einzelner* Werthe mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit fähig sein, oder die Werthmenge (x_i) könnte, vom Standpunkt der Mengenlehre, allgemeineren Character tragen); es wird auch bezüglich der Fehlerfunction von vornherein Einschränkungen zulassen, etwa ausser der Integrabilität noch die Stetigkeit, wenigstens abtheilungsweise, und vor allem die Existenz der im Folgenden auftretenden bestimmten Integrale D. Uebrigens soll das Ensemble der Werthe p_i, x_i oder die Fehlerfunction $\varphi(x)$, um für beide Fälle einen Gattungsbegriff zu haben, auch als *Fehlergesetz* oder *Beobachtungsmodus* bezeichnet werden.

Das Zeichen D soll den mit Rücksicht auf die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Werthe gebildeten Durchschnittswerth (Mittelwerth, valeur moyenne oder valeur probable) irgendwelcher Function von x bedeuten, ist also durch

$$(1) \qquad Df(x) = \sum_i p_i f(x_i) \quad \text{oder} \quad Df(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$$

definirt, woraus, da x irgend einen der möglichen Werthe annehmen *muss*, $D1 = 1$ folgt. Kommen verschiedene Grössen $x, y, \cdots$ mit eigenen Fehlergesetzen, oder kommen „abhängige" (§ 1, p. 163) Grössenverbindungen mit gemeinsamem Fehlergesetz in Betracht, so soll die Operation der Durchschnittsbildung immer durch dasselbe Zeichen D angedeutet werden. Man habe etwa neben x noch eine Grösse y, die die Werthe $y_1 y_2 y_3 \cdots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $q_1 q_2 q_3 \cdots$ annehmen kann; während w_{ik} die Wahrscheinlichkeit bezeichne, dass sowohl x den Wert x_i, als auch y den Werth y_k annehme. Dann ist, beide Grössen zusammen betrachtet,

$$Df(x, y) = \sum_{ik} w_{ik} f(x_i, y_k),$$

$$Df(x) = \sum_{ik} w_{ik} f(x_i) = \sum_i p_i f(x_i),$$

$$Dg(y) = \sum_{ik} w_{ik} g(y_k) = \sum_k q_k g(y_k),$$

sodass es für eine Function der einen Grösse allein keinen Unterschied macht, ob man auch noch die andere hinzudenkt oder von ihr absieht. Scharf zu unterscheiden ist zwischen dem *Product aus den Durchschnittswerthen* und dem *Durchschnittswerth aus dem Product*; beide

$$Df(x) \cdot Dg(y) = \sum_{ik} p_i q_k f(x_i) g(y_k),$$

$$Df(x) g(y) = \sum_{ik} w_{ik} f(x_i) g(y_k)$$

sind jedoch in dem wichtigen Fall identisch, dass beide Fehler von einander *unabhängig* sind, also $w_{ik} = p_i q_k$ ist. Das Gesagte überträgt sich ohne Aenderung auf den Fall stetig veränderlicher Fehler und auf Verbindungen von mehr als zwei abhängigen oder unabhängigen Fehlern.

Es möge nun eine beliebige Anzahl *unabhängiger* Grössen als Einzel- oder Partialfehler, ihre Summe als Gesammt- oder Totalfehler bezeichnet werden. Die Aufgabe, *die Fehlerfunction des Totalfehlers aus denen der Partialfehler zu ermitteln,* führt bekanntlich auf Relationen aus der Theorie der Fourier'schen Integrale; eine im Gauss'schen Nachlass (VIII, p. 88) gefundene Umkehrbeziehung zwischen zwei Functionen kann als die Grundlage alles Weiteren angesehen werden. Es sei nämlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ixu} dx = \sqrt{2\pi}\,\psi(u),$$

so ist umgekehrt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{-ixu} du = \sqrt{2\pi}\,\varphi(x).$$

Wir wollen dies Formelpaar, die Fourier-Gauss'sche Umkehrrelation, einfach an die Spitze stellen, ohne auf ihren Beweis und Gültigkeitsbereich einzugehen. Da $\psi(u)$ möglicherweise keine reelle Function ist (ausser wenn die Fehlerfunction $\varphi(x)$ *gerade* ist), so wollen wir statt dessen die Function

$$(2) \qquad \Phi(u) = \sqrt{2\pi}\,\psi(-iu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{xu} dx = De^{xu}$$

verwenden, aus der $\varphi(x)$ durch die Operation

$$(3) \qquad 2\pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(iu) e^{-ixu} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(-iu) e^{ixu} du$$

wiedergewonnen wird.

Nach dem, was oben über den Durchschnittswerth eines Products von Functionen *unabhängiger* Grössen gesagt wurde, verhalten sich bei der Addition von Partialfehlern die entsprechenden Functionen $\Phi(u)$ *multiplicativ*, denn für unabhängige x, y ist

$$(4) \qquad De^{(x+y)u} = De^{xu} \cdot De^{yu}.$$

Hierin liegt die Lösung der oben gestellten Aufgabe. Man bilde für jeden Partialfehler die Function $\Phi(u) = De^{xu}$, das Product aller dieser Functionen ist die entsprechende Function des Totalfehlers, aus der durch (3) die Fehlerfunction des Totalfehlers hervorgeht.

Beispiele sind leicht zu construiren. Man betrachte etwa als Elementarfehler den *Abrundungsfehler*, dessen Fehlerfunction, bei passender Einheitswahl, im Intervall $(-1, +1)$ den constanten Werth $\frac{1}{2}$ hat, ausserhalb dieses Intervalls verschwindet. Für die zugehörige Function $\Phi(u)$ folgt nach (2)

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{xu}dx = \frac{e^u - e^{-u}}{2u},$$

$$\Phi(iu) = \frac{\sin u}{u}$$

Aus dem Zusammenwirken von n unabhängigen solchen Abrundungsfehlern entspringt ein Totalfehler, für den $\Phi(iu) = (\sin u : u)^n$, dessen Fehlergesetz also ist

$$(5)\quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^n e^{-ixu}du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^n \cos xu\, du.$$

Diese Function $\varphi(x)$ (für $n = 1$ ein Dirichlet'scher Discontinuitätsfactor) ist eine nebst ihren Ableitungen bis incl. zur $(n-1)$ten stetige Function, die ausserhalb des Intervalls $(-n, +n)$ verschwindet und innerhalb desselben in den n Theilintervallen von der Länge 2 durch n verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt wird.

Ein zweites Beispiel zeigt, dass aus dem Zusammenwirken einer grossen Zahl von Partialfehlern keineswegs immer das Gauss'sche Gesetz resultiren muss. Man wähle als Fehlerfunction des Partialfehlers

$$(6)\qquad \varphi(x) = \tfrac{1}{2}e^{-[x]} = \tfrac{1}{2}e^{\pm x} \text{ für } x \lessgtr 0.$$

Hier wird

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x(1-u)}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x(1+u)}dx$$
$$= 1 : (1 - u^2)$$

Es sei nun $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots$ eine lineare Verbindung von Grössen x_λ, die sämmtlich diese Fehlerfunction (6) besitzen, oder x der Totalfehler aus den Partialfehlern $a_\lambda x_\lambda$. Für x wird dann die fragliche Function

$$\Phi(u) = 1 : (1 - a_1^2u^2)(1 - a_2^2u^2)\cdots$$

Man setze nun etwa $a_\lambda = 1 : (\lambda + \frac{1}{2})\pi$, also

$$(7) \qquad x = \frac{2}{\pi}\left(x_1 + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{5} + \cdots\right),$$

so wird

$$\Phi(u) = 1 : \left[1 - \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{2u}{3\pi}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{2u}{5\pi}\right)^2\right]\cdots$$

$$= \sec u = 2 : \left(e^{iu} + e^{-iu}\right)$$

und das Fehlergesetz

$$(8) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2e^{iux}du}{e^u + e^{-u}} = 1 : \left(e^{\frac{\pi}{2}x} + e^{-\frac{\pi}{2}x}\right)$$

Wir haben hier einige Fälle betrachtet, die für den Totalfehler geschlossene Formen von $\Phi(u)$ und $\varphi(x)$ ergaben. In der Regel aber lassen sich für diese Functionen nur Reihenentwicklungen ansetzen, und damit beginnt der Begriff der *kanonischen Parameter* und das Gauss'sche Gesetz als Approximation eine Rolle zu spielen.

Wir denken uns den natürlichen Logarithmus von $\Phi(u)$ in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe entwickelbar, die wegen $\Phi(0) = D1 = 1$ kein constantes Glied hat:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \lg\Phi(u) &= \lg De^{xu} = \sum_\alpha \frac{u^\alpha}{\alpha!}M_\alpha \\ &= M_1 u + \frac{M_2}{2!}u^2 + \frac{M_3}{3!}u^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Diese Voraussetzung braucht keineswegs für jedes beliebige Fehlergesetz zuzutreffen; eine jedenfalls dazu nothwendige Bedingung ist, dass die sämmtlichen *Durchschnittswerthe der Fehlerpotenzen* endlich bleiben. Aus diesen nämlich setzen sich die Coefficienten M_α folgendermaassen zusammen, wenn Dx^α mit D_α bezeichnet wird:

$$(10) \qquad \begin{cases} M_1 = D_1 \\ M_2 = D_2 - D_1^2, \\ M_3 = D_3 - 3D_2D_1 + 2D_1^3, \\ M_4 = D_4 - 4D_3D_1 - 3D_2^2 + 12D_2D_1^2 - 6D_1^4 \end{cases}$$

u. s. w. M_2 ist das Quadrat des „*mittleren Fehlers*“ bei unserem Fehlergesetz. Um eine Vereinfachung zu erzielen, kann man den

Nullpunkt auf der Fehlerscala nachträglich um die Strecke D_1 verschieben, sodass für die neue Variable $x - D_1$ der erste Potenzmittelwerth verschwindet. Nach dieser Abtrennung des „systematischen" Fehlers D_1 vom „zufälligen" $x - D_1$ würde also $D_1 = 0$ zu setzen sein, und man hat etwas übersichtlicher

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} M_1 = 0, \quad M_2 = D_2, \quad M_3 = D_3, \\ M_4 = D_4 - 3D_2^2, \\ M_5 = D_5 - 10 D_3 D_2, \\ M_6 = D_6 - 15 D_4 D_2 - 10 D_3^2 + 30 D_2^3 \end{cases}$$

u. s. w. Diese Coefficienten M_α sollen die *kanonischen Parameter* des Fehlergesetzes heissen; ihre Wichtigkeit beruht

A) auf ihrem *additiven* Verhalten bei Entstehung eines Totalfehlers aus *unabhängigen* Einzelfehlern. Dies folgt unmittelbar aus dem multiplicativen Verhalten der Function $\Phi(u)$. Für jeden Index α ist also der α-te kanonische Parameter (M_α) des Totalfehlers die Summe der α-ten kanonischen Parameter der Elementarfehler. Ist ferner M_α ein kanonischer Parameter von x, so ist $a^\alpha \cdot M_\alpha$ der entsprechende für ax, weil M_α homogen von der α-ten Dimension des Fehlers ist; darnach ist für eine lineare Function unabhängiger Fehler $x, y, \cdots$

$$M_\alpha(ax + by + \cdots) = a^\alpha M_\alpha(x) + b^\alpha M_\alpha(y) + \cdots.$$

B) darauf, dass beim Gauss'schen Gesetz alle kanonischen Parameter bis auf den zweiten verschwinden. In der That ist für $\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2x^2)$[1])

$$\Phi(u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-h^2x^2 + ux)dx = \exp\left(\frac{u^2}{4h^2}\right),$$

die rechte Seite von (9) reducirt sich also auf $u^2 : 4h^2$ und es sind alle $M_\alpha = 0$ bis auf $M_2 = 1 : 2h^2$.

Hieraus folgt sofort die *Gruppeneigenschaft* des Gauss'schen Gesetzes, d. h. seine Eigenschaft, für den Totalfehler zu gelten, wenn es für die Partialfehler gilt. Denn wenn sich Partialfehler, die dem Gauss'schen Gesetz unterworfen sind, summiren, so verschwinden, wegen des additiven Verhaltens, auch für den Total-

---

1) exp z bedeutet e^z.

fehler alle kanonischen Parameter bis auf den zweiten, woraus für $\Phi(u)$ wieder die Form $exp(u^2 : 4h^2)$ und nach (3)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\frac{u^2}{4h^2} + ixu\right) du = \frac{h}{\sqrt{\pi}} exp(-h^2x^2)$$

folgt. Beiläufig bemerkt, hat es keine Schwierigkeit, sofort noch andere Fehlergesetze mit dieser Gruppeneigenschaft anzugeben; man braucht nur $\lg \Phi(u)$ einem endlichen Aggregat verschiedener Potenzen von u, jede mit einem willkürlichen Coefficienten behaftet, gleichzusetzen und daraus nach (3) die entsprechende Fehlerfunction abzuleiten, die aber im Allgemeinen ein complicirtes transcendentes Integral wird.

Auf genau denselben beiden Gründen, dem additiven Verhalten und dem Verschwinden der kanonischen Parameter beim Gauss'schen Gesetz, beruht nun auch die approximative Gültigkeit des Gauss'schen Gesetzes für einen Totalfehler, der aus zahlreichen Partialfehlern von nicht allzuverschiedener Grössenordnung hervorgeht. Die Einzelfehler seien $x_1 x_2 \cdots x_n$, der Gesammtfehler

$$sx = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

wobei wir einen Factor s hinzufügen, um ein Gauss'sches Gesetz mit endlichem Präcisionsmaass zu erhalten. Die kanonischen Parameter für x sollen M_α heissen, die *arithmetischen Mittel* der kanonischen Parameter der Einzelfehler mit P_α bezeichnet werden, sodass nach (11)

$$nP_2 = \sum_\lambda Dx_\lambda^2, \quad nP_3 = \sum_\lambda Dx_\lambda^3, \quad nP_4 = \sum_\lambda [Dx_\lambda^4 - 3(Dx_\lambda^2)^2], \cdots$$

u. s. w. Dann gilt wegen des additiven Verhaltens

$$s^2 M_2 = nP_2, \quad s^3 M_3 = nP_3, \quad s^4 M_4 = nP_4, \cdots$$

Wir wollen nun, entsprechend einem Gauss'schen Gesetz vom Präcisionsmaass $h = 1$, $M_2 = \frac{1}{2}$ setzen, woraus $s = \sqrt{2nP_2}$ folgt. Es werden dann M_3, M_4, M_α von den Ordnungen

$$P_3 : \sqrt{nP_2^3}, \quad P_4 : \sqrt{n^2P_2^4}, \quad P_\alpha : \sqrt{n^{\alpha-2}P_2^\alpha}.$$

Dass diese Ordnungen für $\lim n = \infty$ *verschwinden*, ist die genauere Formulirung der oben angedeuteten Bedingung, dass die Partialfehler von nicht allzuverschiedener Grössenordnung sein

sollen. Ist dies der Fall, so sind die kanonischen Parameter M_α vom dritten ab *klein* gegen den endlichen zweiten, und das Gauss'sche Gesetz, das ihr Verschwinden verlangt, wird also als erste Annäherung (streng für $\lim n = \infty$) gelten.

Dagegen ist klar, dass diese Annäherung versagen wird, wenn die Elementarfehler von sehr verschiedener Grössenordnung sind. Um nicht sofort an den extremen Fall zu denken, dass ein einziger Partialfehler alle übrigen so stark überwiegt, dass das Gesetz des Totalfehlers sich wesentlich nach diesem einen richtet, will ich das oben gegebene Beispiel (S. 170) noch einmal vom Standpunkt der kanonischen Parameter aus betrachten. Ist $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 \cdots$ der Totalfehler mit den kanonischen Parametern M_α, während alle x_λ dasselbe Fehlergesetz mit den kanonischen Parametern P_α befolgen, so ist

$$M_2 = P_2 \sum_\lambda a_\lambda^2, \quad M_3 = P_3 \sum_\lambda a_\lambda^3, \quad M_4 = P_4 \sum_\lambda a_\lambda^4, \cdots$$

Setzt man nun etwa die der Formel (7) oder auch der folgenden

$$x = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \cdots$$

entsprechenden Werthe von a_λ ein, so werden die Potenzsummen $\sum_\lambda a_\lambda^s$ reine Zahlen von gleicher Grössenordnung und $M_3, M_4, \ldots$ sind gegenüber M_2 nicht zu vernachlässigen; das Gauss'sche Gesetz gilt hier nur, wenn es schon für die Einzelfehler galt.

Es wäre nun noch, unter der Voraussetzung der Kleinheit von $M_3, M_4, \ldots$ gegen $M_2 = \frac{1}{2}$, die Fehlerfunction $\varphi(x)$ in eine Reihe zu entwickeln, deren erstes Glied offenbar die Exponentialfunction $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-xx}$ sein wird. Man hat nach (3) und (9)

$$2\pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left[ixu + \sum_\alpha \frac{(-1)^\alpha (iu)^\alpha}{\alpha!} M_\alpha\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-\frac{u^2}{4} + ixu\right) \exp\left[\sum_3^\infty{}_\alpha \frac{(-1)^\alpha (iu)^\alpha}{\alpha!} M_\alpha\right].$$

Die zweite Exponentialfunction giebt, in eine Reihe entwickelt,

$$1 - \frac{M_3}{3!}(iu)^3 + \frac{M_4}{4!}(iu)^4 - \frac{M_5}{5!}(iu)^5 + \frac{M_6 + 10 M_3^2}{6!}(iu)^6 - \cdots$$

Integriren wir gliedweise, so treten Integrale von der Form auf

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \cdot (iu)^\alpha \exp\left(-\frac{u^2}{4} + ixu\right) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-\frac{u^2}{4} + ixu\right)$$

$$= \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(2\sqrt{\pi}e^{-xx}).$$

Für die Differentialquotienten von e^{-xx} möge das Zeichen

$$\frac{d^\alpha(e^{-xx})}{dx^\alpha} = e^{-xx}s_\alpha(x) \tag{12}$$

eingeführt werden; $s_\alpha(x)$ ist eine ganze, entweder gerade oder ungerade, Function vom α-ten Grade. Die ersten lauten:

$$\left\{\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_1 &= -2x, \\ s_2 &= 4x^2 - 2, \\ s_3 &= -8x^3 + 12x, \\ s_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ s_5 &= -32x^5 + 160x^3 - 120x, \\ s_6 &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \end{aligned}\right. \tag{13}$$

u. s. w. Hiermit ergiebt sich

$$\varphi(x) = \frac{e^{-xx}}{\sqrt{\pi}}\Big[1 - \frac{M_3}{3!}s_3(x) + \frac{M_4}{4!}s_4(x) - \frac{M_5}{5!}s_5(x) + \frac{M_6 + 10M_3^2}{6!}s_6(x) - \cdots\Big] \tag{14}$$

als Fehlerfunction eines Fehlers x, dessen kanonische Parameter vom dritten ab klein gegen den zweiten $M_2 = \frac{1}{2}$ sind. Dies ist die von BRUNS (Astr. Nachr. 3429) aufgestellte Reihenentwicklung; die dortigen Functionen R_α sind bis auf Zahlenfactoren mit unseren s_α identisch. Vermöge einer Eigenschaft der Functionen $s_\alpha(x)$, die sie mit $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$, mit den Kugelfunctionen u. a. gemeinsam haben, lassen sich übrigens, einmal die Möglichkeit einer Reihe von der Form (14) vorausgesetzt, die Coefficienten dieser Reihe genau wie die einer FOURIER'schen Reihe durch bestimmte Integrale darstellen. Nach dem TAYLOR'schen Verfahren ist

$$\exp - (x + u)^2 = \sum_\alpha \frac{d^\alpha e^{-xx}}{dx^\alpha} \frac{u^\alpha}{\alpha!}$$

oder mit (12)

$$\exp(-u^2 - 2ux) = \sum_\alpha s_\alpha(x) \frac{u^\alpha}{\alpha!}.$$

Dieselbe Reihe werde mit Vertauschung von u mit v angesetzt, beide multiplicirt, sodann mit $e^{-xx}dx$ multiplicirt und nach x zwischen $\pm\infty$ integrirt. Das giebt

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{u^\alpha v^\beta}{\alpha!\,\beta!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xx} s_\alpha(x) s_\beta(x) dx$$

$$= \int \exp(-u^2 - v^2 - 2xu - 2xv - x^2) dx$$

$$= \int \exp - (x + u + v)^2 e^{2uv} dx = \sqrt{\pi} e^{2uv}.$$

Da die rechte Seite nur vom Product $u \cdot v$ abhängt, so ergiebt sich

$$(15) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xx} s_\alpha(x) s_\beta(x) dx = 0$$

für $\alpha \neq \beta$, ferner durch Entwicklung der rechten Seite nach Potenzen von $u \cdot v$

$$(16) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xx} s_\alpha(x)^2 dx = \sqrt{\pi} 2^\alpha \alpha!$$

Nimmt man nun a priori an, dass eine (Fehler-) Function $\varphi(x)$ nach den Ableitungen von e^{-xx} entwickelbar sei, so erhält man durch Multiplication mit $s_\alpha(x)$ und Integration vermöge (15) und (16) den Coefficienten gerade dieses Gliedes und findet die Reihe

$$(17) \qquad \varphi(x) = \frac{e^{-xx}}{\sqrt{\pi}} \sum_\alpha \frac{s_\alpha(x)}{2^\alpha \alpha!} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) s_\alpha(x) dx$$

$$= \frac{e^{-xx}}{\sqrt{\pi}} \sum_\alpha \frac{s_\alpha(x)}{2^\alpha \alpha!} D s_\alpha(x).$$

Die Form der Coefficienten weicht scheinbar von der in (14) ab, insofern die $Ds_\alpha(x)$ von den Potenzmittelwerthen D_α

nur linear abhängen, während die M_α auch ihre höheren Potenzen enthalten; diese Abweichung verschwindet natürlich, sobald die in (14) vorausgesetzten speciellen Werthe $D_1 = 0$, $D_2 = \frac{1}{2}$ (die durch passende Wahl des Nullpunktes und der Einheit auf der Fehlerscala erzielt worden sind) überall eingesetzt werden.

Die Schwierigkeiten der *Convergenzfrage* bei der Reihe (17) hat Bruns a. a. O. angedeutet; sie hängt zweifellos aufs Engste mit den Gültigkeitsbedingungen der Fourier-Gauss'schen Umkehrrelation (2) (3) zusammen. Es ist nämlich in Betracht zu ziehen, dass eine Function $\Phi(u) = De^{xu}$ auch für *discrete* Fehler (die eine endliche Zahl von Werthen mit endlicher Wahrscheinlichkeit annehmen) existirt; giebt man aber andererseits zu, dass durch die Function $\Phi(u)$ resp. durch die Reihe der kanonischen Parameter oder Potenzmittelwerthe ein Fehlergesetz eindeutig bestimmt sei (was allerdings wohl nicht ohne weitere beschränkende Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Werthmenge (x) und der eventuellen Fehlerfunction $\varphi(x)$ zutreffen wird), so kann, auf die Function $\Phi(u)$ eines discreten Fehlers angewandt, der Ansatz (3) offenbar keine Bedeutung haben und die Reihe (14) *nicht convergiren*; sonst gäbe es ja zwei Fehlergesetze, ein discretes und ein continuirliches, die zu derselben Function $\Phi(u)$ oder demselben Systeme M_α führten. Gerade auf solche Fälle aber, wo eigentlich ein discreter Fehler, jedoch mit einer sehr grossen und sehr dicht vertheilten Werthmenge vorliegt, wird die Approximation (14) praktisch anwendbar sein, falls die oben präcisirte Voraussetzung über die Grössenordnung der $M_3, M_4, \cdots$ zutrifft; dahin gehören der Bernoulli'sche Satz und seine Poisson'sche Verallgemeinerung, die Bessel'sche Ableitung des Gauss'schen Gesetzes aus dem Zusammenwirken zahlreicher Elementarfehler mit beliebigem, auch discretem Fehlergesetz — kurz die meisten Specialfälle des „Gesetzes der grossen Zahlen", in denen die Gauss'sche Exponentialfunction als erste Annäherung gilt. Bei wirklichen Anwendungen wird also (14) in der Regel zum Typus der semiconvergenten, d. h. streng genommen *divergenten* Reihen gehören, von denen zur praktischen Berechnung wenige Anfangsglieder genügen.

Es sei noch bemerkt, dass der Begriff der *kanonischen Parameter* sich von einzelnen Grössen x auf Complexe *abhängiger* Grössen $xyz \cdots$, oder wie man zu sagen pflegt, von linearen auf ebene, räumliche, mehrdimensionale Fehler übertragen läſst.

Entsteht, um bei drei Dimensionen zu bleiben, der räumliche Fehler xyz aus der Addition der beiden *unabhängigen* Fehler $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$, so ist für willkürliche u, v, w

$$De^{xu+yv+zw} = De^{x_1 u+y_1 v+z_1 w} \cdot De^{x_2 u+y_2 v+z_2 w},$$

während wegen der Abhängigkeit von xyz untereinander nicht etwa $De^{xu+yv+zw} = De^{xu} \cdot De^{yv} \cdot De^{zw}$ ist; *kanonische Parameter* sind hier also die Coefficienten der nach steigenden Potenzen von u, v, w geordneten Entwicklung von lg $De^{xu+yv+zw}$, d. h. die Grössen

$$\begin{aligned}
&Dx,\\
&Dx^2 - (Dx)^2,\\
&Dyz - Dy \cdot Dz,\\
&Dx^3 - 3Dx^2 \cdot Dx + 2(Dx)^3,\\
&Dy^2z - 2Dyz \cdot Dy - Dy^2 \cdot Dz + 2(Dy)^2 Dz,\\
&Dxyz - DxDyz - DyDzx - DzDxy + 2DxDyDz
\end{aligned}$$

u. s. w. nebst ihren cyklischen Vertauschungen. Gilt das Gauss'sche Gesetz, d. h. ist $Ce^{-\Omega} dx dy dz$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt xyz ins unendlich kleine Parallelepiped $x \pm \frac{1}{2}dx$, $y \pm \frac{1}{2}dy$, $z \pm \frac{1}{2}dz$ zu liegen komme, wo bei passender Wahl des Anfangspunktes Ω eine definit positive quadratische Form der x, y, z ist, so verschwinden auch hier alle kanonischen Parameter bis auf die zweiter Ordnung (die sechs Grössen Dx^2, Dy^2, Dz^2, Dyz, Dzx, Dxy, von denen durch passende Achsenwahl die letzten drei zum Verschwinden gebracht werden können). Aus dem Zusammenwirken vieler unabhängiger Partialfehler von nicht zu verschiedener Grössenordnung entspringt auch hier für den Totalfehler ein System kanonischer Parameter, die von der dritten Ordnung an mit wachsender Anzahl der Partialfehler unbegrenzt abnehmen und daher als erste Approximation das Gauss'sche Gesetz erzeugen.

Druckfertig erklärt 15. VI. 1901.]

INHALT.

	Seite
Martin Krause, Ueber Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunctionen	105
Wilibald Reichardt, Ueber Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mittels hyperelliptischer Funktionen integrirbar sind	124
Paul Stäckel, Ueber das Dirichlet'sche Integral	147
Felix Hausdorff, Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	152

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

L Soc 172.6.1

01

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

IV.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1901.

Einzelpreis 2 Mark 80 Pfg.

20 1901

SITZUNG VOM 3. JUNI 1901.

Vorträge hielten:

Herr Ad. Mayer, o. M.: Zur Theorie der gleitenden Reibung.

Herr W. His, o. M.: Beobachtungen zur Geschichte der Nasen- und Gaumenbildung bei menschlichen Embryonen. (Für die Abhandlungen Bd. XXVII.)

Herr Friedr. Engel, o. M.: Vorlegung einer Arbeit des Herrn G. Kowalewski: Ueber Systeme von Pfaff'schen Gleichungen.

Herr O. Hölder, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn H. Liebmann: Ueber die Verbiegung von Rotationsflächen.

Gerhard Kowalewski: *Ueber Systeme von Pfaff'schen Gleichungen.*

In dieser Arbeit wird zunächst eine kurze Darstellung derjenigen Untersuchungen gegeben, die Herr Engel[1]) in den Jahren 1889 und 1890 über Pfaff'sche Systeme angestellt hat. Sodann werden alle seine Resultate auf einem neuen Wege abgeleitet, der dem von Herrn Engel eingeschlagenen sozusagen dualistisch gegenübersteht. Dabei wird nur die Kenntniss der bilinearen Covariante eines Pfaff'schen Ausdrucks vorausgesetzt. Ich möchte aber ausdrücklich bemerken, dass deshalb mein Verfahren zur Ableitung jener Resultate keineswegs für einfacher zu halten ist als das von Herrn Engel. In der That bildet auch bei ihm nur *eine* Thatsache, nämlich die Invarianteneigenschaft des Klammerausdrucks von zwei infinitesimalen Transformationen, die Grundlage von allem. Besonders gilt dies von der zweiten der citirten Arbeiten.

Die speciellen Untersuchungen, die hier angestellt werden sollen, beziehen sich auf Pfaff'sche Systeme, mit denen unbeschränkt integrable Systeme invariant verknüpft sind. In einer früheren Arbeit[2]) habe ich gezeigt, dass es in sechs Veränderlichen zu jedem

1) Diese Berichte, 1889, S. 157—176, und 1890, S. 192—207.

2) Diese Berichte, 1899, S. 265 ff.

nicht dreigliedrigen PFAFF'schen System ein covariantes unbeschränkt integrables System giebt. Hier wird nun für eine grosse Klasse von PFAFF'schen Systemen (mit irgend einer Anzahl von Veränderlichen) die Existenz covarianter unbeschränkt integrabler Systeme nachgewiesen, ferner für den Fall von acht Veränderlichen das Vorhandensein solcher covarianten Systeme bei allen nicht dreigliedrigen PFAFF'schen Systemen. Endlich wird noch untersucht, ob ein dreigliedriges System mit acht Veränderlichen eine primitive Transformationsgruppe gestatten kann, und es ergiebt sich der bemerkenswerte Satz, dass in acht Veränderlichen keine primitive Transformationsgruppe existirt, die ein PFAFF'sches System invariant lässt.

I.

Engel's allgemeine Sätze über Pfaff'sche Systeme.

Wendet man auf eine infinitesimale Transformation

$$Xf = \xi_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

irgend eine Punkttransformation an, so werden die ξ ebenso transformirt wie die Differentiale dx. Aus dieser Bemerkung folgert Herr ENGEL, dass mit einem PFAFF'schen System

$$(1) \quad D_j = dx_{q+j} - \sum_1^q {}_k\, a_{kj}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_k = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-q)$$

die Schaar aller infinitesimalen Transformationen „invariant verknüpft" ist, welche die Gleichungen

$$\xi_{q+j} - \sum a_{kj} \cdot \xi_k = 0$$

erfüllen. Setzt man

$$X_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_j a_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_{q+j}},$$

so ist die allgemeinste infinitesimale Transformation dieser Art die folgende:

$$(2) \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) X_1 f + \ldots + \varphi_q X_q f.$$

Das System der linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(1') \qquad X_1 f = 0, \ldots, X_q f = 0$$

ist nach dem obigen ebenfalls mit (1) invariant verknüpft, und man hat beide Systeme geradezu als äquivalent[1]) anzusehen. In der That ordnen nach Lie's Auffassung beide jedem Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ ein und dasselbe ebene Bündel q^{ter} Stufe von Linienelementen zu. (1) stellt dieses Bündel in den Coordinaten $dx_1, \ldots, dx_n$ und (1′) dasselbe Bündel in den dualistischen Coordinaten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ dar.[2])

Ausser dem erwähnten Zusammenhang zwischen (1) und (1′) und zwischen (1) und den infinitesimalen Transformationen (2) kommt bei Engel's Untersuchungen nur noch die Invarianteneigenschaft des Klammerausdrucks von zwei infinitesimalen Transformationen in Betracht. Diese Eigenschaft hat Lie sehr viel benutzt, z. B. in der Theorie der Ähnlichkeit zweier Transformationsgruppen. In seinen Vorlesungen pflegte er ihre Wichtigkeit sehr stark zu betonen. Merkwürdiger Weise ist er aber nicht darauf gekommen, sie bei einem System von linearen partiellen Differentialgleichungen in vollem Umfange auszunutzen. Dieser äusserst fruchtbare Gedanke gehört Herrn Engel.

Mit den angegebenen Hilfsmitteln lassen sich die beiden Sätze beweisen, zu welchen Herr Engel in der ersten der oben citirten Arbeiten gelangt. Man kann sie in folgender Weise aussprechen:

Satz 1: *Diejenigen infinitesimalen Transformationen von der Form* (2), *welche das System* (1), *oder*, was auf dasselbe hinauskommt, *das System* (1′) *invariant lassen*, *liefern*, *gleich Null gesetzt, ein mit* (1) *invariant verknüpftes vollständiges System.*

Satz 2: *Mit* (1) *ist invariant verknüpft das System*

$$(1'') \qquad X_k f = 0, \quad (X_k X_l) = 0. \qquad (k, l = 1, \ldots, q)$$

Der zweite Satz lässt sich, wie Herr Engel bemerkt hat, noch verallgemeinern.

---

1) Wir werden deshalb oft nur mit einem der beiden Systeme operiren, ohne das andere zu erwähnen.

2) Die $\frac{\partial f}{\partial x}$ hat man als die Coordinaten der $(n - 2)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$ zu betrachten. Sie sind zusammen mit den x die Coordinaten eines Elementes 1. Ordnung des R_n, während die dx zusammen mit den x ein Linienelement des R_n bestimmen.

Ausser (1″) sind nämlich auch die Systeme

$$(1''')\quad X_k f=0,\ (X_k X_l)=0,\ (X_k(X_l X_m))=0,$$

$$(1^{IV})\quad X_k f=0,\ (X_k X_l)=0,\ (X_k(X_l X_m))=0,\ (X_k(X_l(X_m X_n)))=0$$

u. s. f. mit (1) invariant verknüpft, wobei k, l, m, n, ... unabhängig voneinander die Werthe 1, ..., q zu durchlaufen haben.

Von jedem[1] der Systeme (1″), (1‴), ... kann man unter Umständen noch zu weiteren mit (1) covarianten Systemen gelangen, indem man dasselbe Verfahren anwendet, welches von (1′) zu (1″), (1‴), ... führte, und mit den neuen Systemen kann man es dann ebenso machen. Bei voller Ausnutzung dieser Methode erhält man eine endliche Anzahl von Systemen, die mit (1) invariant verknüpft sind.

Hiermit sind aber die von Herrn ENGEL angegebenen Hilfsmittel zur Bildung covarianter Systeme noch keineswegs erschöpft, auch nicht einmal die, welche er in seiner ersten Arbeit mittheilt. In der That kann man z. B. auf jedes der bereits erhaltenen Systeme den ersten Satz anwenden und gewinnt dadurch unter Umständen eine ganze Reihe von vollständigen Systemen, die mit (1) invariant verknüpft sind. Ferner bilden alle Gleichungen, die einer Anzahl von unseren Systemen gemeinsam sind, wieder ein covariantes System, und man kann auch dadurch, dass man mehrere Systeme zu einem einzigen vereinigt, neue covariante Systeme zu bilden versuchen. Erhält man auf diese Weise wirklich neue Systeme, so bietet sich wieder die Möglichkeit, die beiden ENGEL'schen Sätze anzuwenden u. s. f. Endlich kann man noch folgenden Satz benutzen, der die oben erwähnte Verallgemeinerung des zweiten ENGEL'schen Satzes als Specialfall enthält und unmittelbar aus den ENGEL'schen Principien folgt:

Satz 2′: *Zwei Systeme*

$$(3)\qquad X_\varrho f=0 \quad (\varrho=1,\ldots,r) \quad \text{und} \quad Y_\sigma f=0 \quad (\sigma=1,\ldots,s),$$

---

1) Wir denken uns die Reihe (1′), (1″), ..., nur soweit fortgesetzt, dass die Gliederzahl der Systeme kleiner bleibt als die Zahl der Veränderlichen. Die Reihe hört dann auf entweder, weil der nächste Schritt zu einem n-gliedrigen System führen würde, oder, weil das letzte System der Reihe die infinitesimalen Transformationen (2) gestattet. In diesem Falle würde es übrigens ein mit (1) covariantes vollständiges System geben.

die auch identisch sein können, haben als simultane Covariante das System

(4) $X_\varrho f = 0, \quad Y_\sigma f = 0, \quad (X_\varrho Y_\sigma) = 0.$ $(\varrho = 1, \ldots, r; \; \sigma = 1, \ldots, s)$

Durch Anwendung dieses Satzes auf irgend zwei mit (1) covariante Systeme kann man unter Umständen ein neues derartiges System finden.

Es[1]) kann natürlich auch vorkommen, dass (4) mit dem System

(5) $$X_\varrho f = 0, \quad Y_\sigma f = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r; \; \sigma = 1, \ldots, s)$$

zusammenfällt. Wenn dies der Fall ist, wollen wir die beiden Systeme (3) als *associirt* bezeichnen. Jedes vollständige System ist dann zu sich selbst associirt. Ueber solche associirten Systeme gilt der Satz, dass auch jede Covariante des einen zu jeder des anderen Systems associirt ist, wenn man nur die covarianten Systeme in Betracht zieht, welche der zweite Engel'sche Satz liefert. Um dies gleich ganz allgemein zu beweisen[2]), wollen wir annehmen, die beiden Systeme

$$Y_\sigma f = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, s) \quad \text{und} \quad Z_\tau f = 0 \quad (\tau = 1, \ldots, t)$$

seien zu

$$X_\varrho f = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

associirt. Dann bestehen, wenn wir eine von Herrn Engel eingeführte Schreibweise benutzen, die folgenden Relationen

$$(X_\varrho Y_\sigma) \equiv 0 \qquad (\text{modd.}\ Xf,\ Yf),$$
$$(X_\varrho Z_\tau) \equiv 0 \qquad (\text{modd.}\ Xf,\ Zf).$$

Nun liefert aber die Jacobi'sche Identität

$$(X_\varrho(Y_\sigma Z_\tau)) + (Y_\sigma(Z_\tau X_\varrho)) + (Z_\tau(X_\varrho Y_\sigma)) = 0$$

sofort

$$(X_\varrho(Y_\sigma Z_\tau)) \equiv 0. \qquad (\text{modd.}\ Xf;\ Yf,\ Zf,\ (YZ))$$

Damit ist gezeigt, dass die beiden Systeme $X_\varrho f = 0$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ und $Y_\sigma f = 0$, $Z_\tau f = 0$, $(Y_\sigma Z_\tau) = 0$ $(\sigma = 1, \ldots, s; \; \tau = 1, \ldots, t)$ associirt sind.

Wenn zwei associirte Systeme

$$X_\varrho f = 0 \quad (\varrho = 1, \ldots, r) \quad \text{und} \quad Y_\sigma f = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, s)$$

---

1) Die hier folgende Betrachtung findet sich in den Engel'schen Arbeiten nicht.

2) Wir benutzen hier, dass der Satz (2') die allgemeinste Fassung des zweiten Engel'schen Satzes ist.

zusammengenommen ein weniger als n-gliedriges System bilden, und wenn sie überdies Gleichungen gemeinsam haben, so giebt es ein vollständiges System, welches eine simultane Covariante von beiden ist. Ist nämlich $Zf=0$ eine in beiden Systemen vorkommende Gleichung, so hat man

$$(ZX_\varrho)\equiv 0, \quad (ZY_\sigma)\equiv 0. \qquad (\text{modd. } Xf,\ Yf)$$

Daraus geht hervor, dass der erste ENGEL'sche Satz, angewandt auf das System (5) thatsächlich ein vollständiges System liefert, da wir ja schon eine Gleichung dieses Systems kennen, nämlich $Zf=0$. Weiter unten werden wir Gelegenheit finden, diese Bemerkungen über associirte Systeme zu benutzen.

Aus der zweiten ENGEL'schen Arbeit sei nur ein Satz hervorgehoben, auf den auch Herr ENGEL besonderen Werth legt. In der That lassen sich aus diesem Satze alle andern als Folgerungen gewinnen. Man kann ihn in folgender Weise formuliren:

Satz 3: *Ist $Xf=0$, $Yf=0$ ein in (1′) enthaltenes zweigliedriges System, so ist das System*

$$(6) \qquad X_k f=0, \quad (XY)=0 \qquad (k=1,\dots,q)$$

eine simultane Covariante jenes zweigliedrigen Systems und des Systems (1′).

Bezeichnet man mit $(dx_1,\dots,dx_n)$ und $(\delta x_1,\dots,\delta x_n)$ die Fortschreitungsstrecken, welche Xf und Yf dem Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ zuordnen, so kann man (6) auch folgendermassen schreiben:

$$(6_1) \qquad \begin{cases} X_1 f=0, \dots\dots, X_q f=0, \\ \sum_1^{n-q} j \dfrac{\partial f}{\partial x_{q+j}} \cdot \sum_{i,k}^{1,\dots,q} (X_i a_{kj} - X_k a_{ij})\, dx_i \delta x_k = 0. \end{cases}$$

Herr ENGEL giebt auch eine geometrische Interpretation dieses Satzes. Das System (1′) ordnet jedem Punkte (x) ein ebenes Bündel q-ter Stufe von Linienelementen[1]) zu. Innerhalb dieses Bündels bestimmt $Xf=0$, $Yf=0$ ein ebenes Büschel von Linienelementen, und diesem Büschel entspricht nach dem obigen Satze in invarianter Weise das PFAFF'sche Bündel $(q+1)$-ter Stufe, welches das System (6) dem Punkte (x) zuordnet. Eine

---

1) Ein solches Bündel nennen wir hier kurz ein PFAFF'sches Bündel. Alle diese Bündel bezeichnen wir als die PFAFF'schen Bündel des Systems (1) oder auch (1′).

Ausnahme machen diejenigen Büschel, für die das System (6_1) aufhört $(q+1)$-gliedrig zu sein, für die also die Gleichungen

$$(7) \qquad \sum_{i,\,k}^{1,\ldots,q} (X_i a_{kj} - X_k a_{ij})\, dx_i \delta x_k = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-q)$$

bestehen. Diese Büschel wollen wir als die *Nullbüschel*[1]) des Pfaff'schen Bündels q-ter Stufe bezeichnen. Sie sind natürlich mit dem letzteren invariant verknüpft.

Sucht man in jedem Pfaff'schen Bündel des Systems (1) die Linienelemente, welche nur in Nullbüscheln enthalten sind, so gelangt man zu dem covarianten System des Satzes 1. Dasjenige des Satzes 2 findet man, indem man alle Bündel $(q+1)$-ter Stufe, die nach Satz 3 den ebenen Büscheln jedes Pfaff'schen Bündels des Systems (1) entsprechen, zu einem ebenen Bündel vereinigt.

Die Systeme (6) und (1″) lassen sich übrigens auch folgendermassen charakterisiren:

Das System (6) ist das kleinste (1′) umfassende System, in dessen Pfaff'schen Bündeln das System $Xf = 0$, $Yf = 0$ Nullbüschel bestimmt.

Das System (1″) ist das kleinste (1′) umfassende System, in dessen Pfaff'schen Bündeln alle ebenen Büschel der Paffp'schen Bündel von (1′) Nullbüschel sind.

Die Covarianz der Systeme liegt dann auf der Hand.

Betrachtet man eine in (1′) enthaltene Gleichung, so ist mit ihr und mit (1′) invariant verknüpft das kleinste (1′) umfassende System, in dessen Pfaff'schen Bündeln jene Gleichung zusammen mit jeder andern Gleichung von (1′) Nullbüschel bestimmt. Alle in (1′) enthaltenen Gleichungen, bei denen die Gliederzahl dieses covarianten Systems unterhalb einer gewissen Grenze bleibt, bilden eine mit (1′) invariant verknüpfte Schaar und liefern unter Umständen ein covariantes Pfaff'sches System.[2])

Im nächsten Abschnitt werden wir noch eine andere Anwendung des Engel'schen Satzes 3 kennen lernen.

---

1) Für einen speciellen Fall habe ich diese Bezeichnung eingeführt in meiner Arbeit „Elementvereine und Streifenelemente im R_{n+1}“. Diese Ber. 1900, S. 91 ff.

2) Diese Betrachtung findet sich in analytischer Einkleidung in der zweiten Engel'schen Arbeit.

II.

Andere Ableitung der Engel'schen Resultate.

Man kann, wie hier gezeigt werden soll, alle Resultate des Herrn ENGEL aus dem bekannten Satze über die bilineare Covariante eines PFAFF'schen Ausdrucks ableiten. Während Herr ENGEL (besonders in der zweiten Arbeit) vorwiegend mit den infinitesimalen Transformationen (2) operirt, werden wir uns darauf stützen, dass mit dem PFAFF'schen System (1) der Inbegriff aller PFAFF'schen Ausdrücke von der Form

$$D = \omega_1(x_1, \ldots, x_n) D_1 + \cdots + \omega_{n-q} D_{n-q}$$

invariant verknüpft ist. Aus diesem Grunde konnten wir oben behaupten, dass die ENGEL'schen Betrachtungen und die unsrigen sich dualistisch gegenüberstehen.

Bezeichnet man mit $\varDelta$ das, was aus D wird, wenn man an Stelle von $dx_1, \ldots, dx_n$ bezüglich $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ einsetzt, so ist die bilineare Covariante von D bekanntlich der Ausdruck

$$d\varDelta - \delta D.$$ $(d\delta = \delta d)$

Ausführlich geschrieben lautet dieser Ausdruck

$$\sum_1^{n-q} {}_j (\varDelta_j d\omega_j - D_j \delta\omega_j) + \sum_1^{n-q} {}_j \omega_j (d\varDelta_j - \delta D_j).$$

Sind nun $(dx_1, \ldots, dx_n)$ und $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ Lösungssysteme[1]) von (1), so reducirt sich die bilineare Covariante von D auf[2])

$$\sum_j \omega_j (d\varDelta_j - \delta D_j),$$

einen Ausdruck, der sich ebenso aus den $d\varDelta_j - \delta D_j$ zusammensetzt, wie D aus den D_j. Aus der Grundeigenschaft der bilinearen Covariante eines PFAFF'schen Ausdrucks und aus der selbstverständlichen Thatsache, dass bei einer Punkttransformation jedes

---

1) Ein System von n Grössen, welche an Stelle von $dx_1 \ldots, dx_n$ eingesetzt, die Gleichungen (1) erfüllen, nennen wir ein Lösungssystem von (1). Wenn wir solche Lösungssysteme wie Systeme von Differentialen bezeichnen (und ihre Elemente gelegentlich auch Differentiale nennen), so *soll damit nur angedeutet sein, dass sie wie die Differentiale* $dx_1, \ldots, dx_n$ *transformirt werden.*

2) Auch hier ist immer $d\delta = \delta d$ zu setzen.

Lösungssystem von (1) in ein Lösungssystem des transformirten PFAFF'schen Systems übergeht, ergiebt sich, dass $\sum \omega_j (d\Delta_j - \delta D_j)$ *eine simultane Covariante des Systems* (1), *der beiden Lösungssysteme* $(dx_1, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \ldots \delta x_n)$ *und des* PFAFF'*schen Ausdrucks* D *ist.*

Diejenigen PFAFF'schen Ausdrücke D, deren bilineare Covariante für alle möglichen Paare von Lösungssystemen unseres PFAFF'schen Systems (1) verschwindet, bilden nach dem soeben gesagten eine mit (1) invariant verknüpfte Schaar. Setzt man nun in

$$d\Delta_j - \delta D_j = -\sum_1^q {}^k (da_{kj}\delta x_k - \delta a_{kj} dx_k)$$

für $dx_{l+1}, \ldots, dx_n$ und $\delta x_{l+1}, \ldots, \delta x_n$ ihre Ausdrücke durch die übrigen Differentiale ein, so wird

$$\begin{aligned} d\Delta_j - \delta D_j &= -\sum_{i,k}^{1,\ldots,q} (X_i a_{kj} \cdot dx_i \delta x_k - X_i a_{kj} \cdot \delta x_i dx_k) \\ &= -\sum_{i,k} (X_i a_{kj} - X_k a_{ij})\, dx_i \delta x_k \end{aligned}$$

und daher

$$(8) \qquad d\Delta - \delta D = -\sum_1^{n-q} {}^j \sum_{i,k}^{1,\ldots,q} \omega_j (X_i a_{kj} - X_k a_{ij})\, dx_i \delta x_k\,.$$

Da die Differentiale, welche hier noch vorkommen, keiner Bedingung unterworfen sind, so müssen die Gleichungen

$$(9) \qquad \sum_j \omega_j (X_i a_{kj} - X_k a_{ij}) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, q)$$

bestehen, wenn die bilineare Covariante von D für alle Paare von Lösungssystemen von (1) verschwinden soll. Setzt man die durch (9) definirten PFAFF'schen Ausdrücke gleich Null, so erhält man ein mit (1) covariantes PFAFF'sches System, und man überzeugt sich leicht, dass das äquivalente System von linearen partiellen Differentialgleichungen gerade das System (1″) des Satzes 2 ist.

Nun eine andere Ueberlegung! Es kann Lösungssysteme $(dx_1, \ldots, dx_n)$ von (1) geben, die zusammen mit *jedem* andern Lösungssystem die bilinearen Covarianten aller Ausdrücke D zum Verschwinden bringen, und es ist klar, dass diese Lösungssysteme $(dx_1, \ldots, dx_n)$ bei allen Punkttransformationen die angegebene

Eigenschaft bewahren werden. Auf Grund der Formel (8) müssen sie den Gleichungen

$$\sum_i^{1,\ldots,q} (X_i a_{kj} - X_k a_{ij}) dx_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q; j = 1, \ldots, n-q)$$

genügen, und wir können also behaupten, dass mit (1) das PFAFF'sche System

$$(10) \quad D_j = 0, \quad \sum_i^{1,\ldots,q} (X_i a_{kj} - X_k a_{ij}) dx_i = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-q; k = 1, \ldots, q)$$

invariant verknüpft ist. Das ist aber der ENGEL'sche Satz 1, und zwar in der Fassung, wie ihn Herr ENGEL in seiner ersten Arbeit ausspricht. Er gewinnt ihn dort, indem er die infinitesimalen Transformationen (2) auf das System (1) ausführt und beweist auch, dass (10) unbeschränkt integrabel ist.

Der Satz 3 ergiebt sich auf folgende Weise: Betrachtet man zwei Lösungssysteme von (1), $(dx_1, \cdots, dx_n)$ und $(\delta x_1, \cdots, \delta x_n)$, so ist mit (1) und mit ihnen der Inbegriff aller Ausdrücke D invariant verknüpft, deren bilineare Covariante für jene Lösungssysteme verschwindet. Stellt man an D diese Forderung, so muss nach (8)

$$(11) \qquad \sum_j \omega_j \sum_{i,k} (X_i a_{kj} - X_k a_{ij}) dx_i \delta x_k = 0$$

sein. Man sieht zunächst, dass nur das durch die beiden Lösungssysteme bestimmte Büschel[1]) in Betracht kommt. Ist dasselbe so beschaffen, dass nicht gleichzeitig die Gleichungen

$$(7) \qquad \sum_{i,k} (X_i a_{kj} - X_k a_{ij}) dx_i \delta x_k = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n-q)$$

bestehen, dann hat die Gleichung (11) gerade $n - q - 1$ unabhängige Lösungssysteme $\omega_1, \cdots, \omega_{n-q}$. Werden also die durch (11) definirten PFAFF'schen Ausdrücke D gleich Null gesetzt, so erhält man ein $(n - q - 1)$-gliedriges PFAFF'sches System, welches in (1) enthalten ist und offenbar eine simultane Covariante des Systems (1) und des durch die beiden Lösungssysteme $(dx_1, \cdots, dx_n)$, $(\delta x_1, \cdots, \delta x_n)$ bestimmten Büschels[1]) darstellt. Wenn die Glei-

1) So nennen wir kurz alle Lösungssysteme, die sich aus zwei solchen durch lineare Combination ergeben.

chungen (7) erfüllt sind, so verschwindet die bilineare Covariante *jedes* Ausdrucks D, und zwei solche Lösungssysteme ordnen jedem Punkte ein *Nullbüschel*[1]) des vermöge (1) ihm entsprechenden Pfaff'schen Bündels zu. Sonst ist das durch zwei Lösungssysteme von (1) einem Punkte zugeordnete Büschel von Linienelementen ein Nullbüschel erst in dem Pfaff'schen Bündel $(q+1)$-ter Stufe, welches das $(n-q-1)$-gliedrige covariante System jenem Punkte entsprechen lässt.

Wir wollen die (etwa vorhandenen) Ausdrücke D, deren bilineare Covariante für alle Paare von Lösungssystemen von (1) verschwindet, d. h. also die durch die Gleichungen (9) definirten Ausdrücke D, für einen Augenblick als *Nullausdrücke* bezeichnen. Zwei Ausdrücke D, deren Differenz ein Nullausdruck ist, mögen *congruent* heissen. Dann ist unmittelbar aus der Formel (8) zu entnehmen, dass die bilinearen Covarianten von zwei Ausdrücken D dann und nur dann für alle Paare von Lösungssystemen des Systems (1) übereinstimmen, wenn die beiden Ausdrücke congruent sind. Der Ausdruck D ist also durch die Bilinearform (8) bis auf einen additiven Nullausdruck bestimmt. Ferner ist aus der Formel (8) zu ersehen, dass die bilinearen Covarianten von D und von ωD, wo ω eine Function der x ist, sich, wenn man sie für zwei Lösungssysteme von (1) bildet, auch nur um den Factor ω unterscheiden. Daraus folgt, dass diejenigen Paare (oder Büschel) von Lösungssystemen des Systems (1), welche die bilineare Covariante eines Ausdrucks D zum Verschwinden bringen, diesen Ausdruck bis auf einen Factor und einen additiven Nullausdruck bestimmen.[2]) Wir wollen nun annehmen, dass es $n-q-r$ Nullausdrücke giebt

$$D_0^{(1)}, \dots, D_0^{(n-q-r)},$$

aus welchen sich alle andern linear ableiten lassen. Wenn dann $(x_1, \cdots, x_n)$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so stellen alle Gleichungen von der Form (11) in dem zu diesem Punkte gehörigen Pfaff'schen Bündel des Systems (1) lineare Complexe dar[3]),

---

1) Vgl. Seite 185.

2) Hierbei benutzen wir den Satz, dass die Geraden eines linearen Complexes $\sum' a_{ik}\xi_i\eta_k = 0$ (in irgend einem linearen Raume) die schiefe Bilinearform auf der linken Seite bis auf einen Factor bestimmen.

3) Die Rolle der Geraden spielen die ebenen Büschel von Linienelementen.

die eine r-gliedrige lineare Schaar bilden (d. h. es giebt gerade r unabhängige unter ihnen). Diese ∞^{r-1} linearen Complexe nennen wir kurz die linearen Complexe des Pfaff'schen Bündels.[1]) Jeder solche Complex ist vollkommen bestimmt durch den Inbegriff aller Büschel von Linienelementen, die seine Gleichung erfüllen und die wir seine Complexbüschel nennen wollen. Aus den zuletzt angestellten Betrachtungen ergiebt sich nun der folgende Satz:

Satz 4. Zwischen den Pfaff'schen Bündeln $(q+r-1)$-*ter Stufe, welche die* $(n-q-r+1)$-*gliedrigen Systeme*

$$D_0^{(1)} = 0, \cdots, D_0^{(n-q-r)} = 0, D = 0$$

einem Punkte allgemeiner Lage zuordnen, und den linearen Complexen (11) *des diesem Punkte vermöge* (1) *entsprechenden Pfaff'schen Bündels besteht eine eineindeutige Beziehung, die bei allen Punkttransformationen erhalten bleibt.*[2])

Es ist leicht zu erkennen, dass man das einem Complex entsprechende Pfaff'sche Bündel findet, wenn man auf alle Complexbüschel den Satz 3 des Herrn Engel anwendet. Die dadurch erhaltenen Pfaff'schen Bündel $(q+1)$-ter Stufe bestimmen das Bündel $(q+r-1)$-ter Stufe des Satzes 4 als das kleinste ebene Bündel, in welchem sie alle enthalten sind.

Bei einer Punkttransformation bewahrt jeder Complex (11) seinen projectiven Charakter, d. h. den Rang seiner Determinante. Diejenigen (zu einem Punkt von allgemeiner Lage gehörigen) Complexe, welche eine stärkere Ausartung haben als ein allgemein gewählter Complex der Schaar, werden also diese Eigenschaft behalten. Ist nun z. B. innerhalb der r-gliedrigen Schaar *eine* r'-gliedrige lineare Unterschaar dadurch ausgezeichnet, dass ihre Complexe stärker ausgeartet sind als die nicht zu der Unterschaar gehörigen, so liefert der Satz 4 ein $(n-q-r+r')$-gliedriges Pfaff'sches System, welches mit (1) invariant verknüpft ist. Giebt es eine *endliche* Anzahl von Unterschaaren, deren Complexe stärker ausgeartet sind als die in einer gewissen Umgebung einer solchen Unterschaar befindlichen Complexe, so gewinnt man eine ganze

---

1) Diejenigen (etwa vorhandenen) Büschel von Linienelementen, welche allen diesen Complexen angehören, sind offenbar die Nullbüschel des Pfaff'schen Bündels.

2) Dieser Satz ist bisher nicht aufgestellt worden, folgt aber auch aus dem Engel'schen Satze 3 und umgekehrt.

Anzahl mit (1) covarianter Systeme, indem man in jedem Punkte $(x_1, \cdots, x_n)$ von allgemeiner Lage auf die Complexe einer bestimmten Unterschaar den Satz 4 anwendet und die so erhaltenen Pfaff'schen Bündel jedesmal zu einem grösseren ebenen Bündel vereinigt. Der Satz 4 bietet also Gelegenheit aus liniengeometrischen Sätzen covariante Pfaff'sche Systeme abzuleiten.

Wir werden im folgenden immer mit Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen operiren und werden ganz davon absehen, dass wir früher ein solches System (1′) immer in aufgelöster Form geschrieben haben. Ferner werden wir ein Linienelement des Pfaff'schen Bündels, welches ein System

$$X_1 f = 0, \cdots, X_q f = 0$$

einem Punkte zuordnet, durch die homogenen Coordinaten $(\lambda_1 : \cdots : \lambda_q)$ charakterisiren, wenn

$$\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_q X_q f$$

eine infinitesimale Transformation ist, die den Punkt gerade in der Richtung jenes Linienelements fortführt. Wir werden dann vielfach davon Gebrauch machen, dass die λ sich linear transformiren, wenn man an Stelle der Xf lineare Combinationen

$$X_i^* f = \alpha_{1i} X_1 f + \cdots + \alpha_{qi} X_q f \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

einführt, wobei die α Functionen der x sind, für welche die Determinante $|\alpha_{ik}|$ nicht verschwindet. Offenbar treten dann an die Stelle der λ neue Grössen λ^*, die mit ihnen in folgender Weise zusammenhängen:

$$\lambda_k = \alpha_{k1} \lambda_1^* + \cdots + \alpha_{kq} \lambda_q^* .$$

Wir werden diesen Umstand besonders dazu benutzen, um die Gleichungen der linearen Complexe, die zu dem Pfaff'schen Bündel eines Punktes von allgemeiner Lage gehören, auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

III.

Pfaff'sche Systeme vom Charakter 2 mit covarianten unbeschränkt integrablen Systemen.

Wir betrachten in diesem Abschnitt $(n - q)$-gliedrige Pfaff'sche Systeme in n Veränderlichen, bei welchen die Engel'sche Covariante (1″) $q + 2$ unabhängige Gleichungen enthält. Solche

Systeme nennen wir mit Herrn E. von WEBER[1]) PFAFF'sche Systeme vom *Charakter* 2. — Ist allgemein das ENGEL'sche System (1″) $(q + r)$-gliedrig, so ist r der Charakter des Systems (1). — Wenn wir mit dem System (1′) operiren, so bestehen also modd. $X_1 f, \cdots, X_q f$ Relationen von folgender Form[2]):

$$(X_i X_k) \equiv \varphi_{ik}(x_1, \cdots, x_n)\, Yf + \psi_{ik}(x_1, \cdots, x_n) Zf \qquad (i, k = 1, \cdots, q).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\lambda X = \sum \lambda_i X_i f, \qquad \mu X = \sum \mu_i X_i f,$$

so ist modd. $X_1 f, \cdots, X_q f$

$$(\lambda X, \mu X) \equiv \sum_{i,k}^{1, \cdots, q} (\varphi_{ik} \lambda_i \mu_k Yf + \psi_{ik} \lambda_i \mu_k Zf).$$

Die Schaar von Complexen, von welcher der Satz 4 handelt, ist hier

$$(12) \qquad \alpha \sum \varphi_{ik} \lambda_i \mu_k + \beta \sum \psi_{ik} \lambda_i \mu_k = 0.$$

Es ist möglich, dass für einen Punkt $(x_1, \cdots, x_n)$ von allgemeiner Lage, diese Complexe alle in gleicher Weise ausgeartet sind, dass also die Determinante

$$| \alpha \varphi_{ik} + \beta \psi_{ik} |$$

für alle Werthsysteme $\alpha, \beta \, (\neq 0, 0)$ denselben Rang $(< q)$ hat. Wir wollen hier aber annehmen, dass dies nicht der Fall ist. Dann giebt es offenbar eine endliche Anzahl von Complexen, welche stärker ausarten als ein allgemein gewählter Complex der Schaar. Jeder solche Complex ist mit dem PFAFF'schen Bündel, welches das System (1′) dem Punkte $(x_1, \cdots, x_n)$ zuordnet, invariant verknüpft.[3]) Wir können ohne Beschränkung annehmen, ein solcher Complex sei

$$(13) \qquad \sum \psi_{ik} \lambda_i \mu_k = 0.$$

---

1) Liniengeometrie und PFAFF'sche Systeme. Diese Berichte 1900, S. 180 f.

2) Zwischen Yf und Zf besteht keine Relation $\beta Yf + \gamma Zf \equiv 0$, und in der aus den φ, ψ gebildeten Matrix verschwinden nicht alle zweireihigen Determinanten.

3) Ganz unzweifelhaft ist dies, wenn man nur infinitesimale Transformationen in Betracht zieht.

Dann ist der Rang von $|\psi_{ik}|$ höchstens gleich $q-2$ im Falle eines geraden q und höchstens gleich $q-3$ im Falle eines ungeraden q. Die durch die Gleichungen

$$\sum_i \psi_{ik}\lambda_i = 0 \qquad (k=1,\cdots,q)$$

bestimmten infinitesimalen Transformationen λX sind mit (1′) invariant verknüpft, da sie dem Punkte $(x_1,\cdots,x_n)$ gerade die Fortschreitungsstrecken zuordnen, welche den singulären Linienelementen[1]) des Complexes (13) entsprechen. Es ist offenbar erlaubt, anzunehmen, dass alle diese λX sich aus

$$X_1 f,\cdots, X_r f \qquad (2\leq r\leq q-2)$$

linear ableiten lassen. Nach diesen Festsetzungen ist nun

$$(X_\varrho X_i) \equiv \varphi_{\varrho i} Yf \qquad (\varrho=1,\cdots,r;\ i=1,\cdots,q),$$

und aus Satz 2′ können wir entnehmen, dass mit (1′) das System

$$(14) \qquad X_1 f=0,\cdots, X_q f=0,\ Yf=0$$

invariant verknüpft ist, da dies ja von

$$X_1 f=0,\cdots, X_r f=0$$

gilt.

Bestände für alle möglichen Zahlenpaare ϱ, σ aus der Reihe $1,\cdots, r$ die Gleichung

$$\varphi_{\varrho\sigma}=0,$$

so würde aus der JACOBI'schen Identität

$$((X_\varrho X_\sigma)X_i)+((X_\sigma X_i)X_\varrho)+((X_i X_\varrho)X_\sigma)=0$$

folgen

$$(15) \qquad \varphi_{\sigma i}(YX_\varrho)-\varphi_{\varrho i}(YX_\sigma)\equiv 0 \qquad (\text{modd. } Xf,\ Yf,\ Zf).$$

Wir wollen nun von der Möglichkeit absehen, dass schon der ENGEL'sche Satz 1, angewandt auf das System (1′), ein covariantes vollständiges System liefert, und nur zeigen, dass auch sonst ein solches System existirt. Wir müssen dann annehmen, dass in der Matrix $\begin{vmatrix} \cdot\cdot\ \varphi_{\varrho i}\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot\ \varphi_{\sigma i}\ \cdot\cdot \end{vmatrix}$ nicht alle zweireihigen Determi-

---

1) Singulär nennen wir alle Linienelemente des PFAFF'schen Bündels, welche nur Complexbüscheln des Complexes (13) angehören. Sie sind mit dem Bündel invariant verknüpft.

nanten verschwinden. Sonst liessen sich nämlich $\lambda, \mu\ (\neq 0, 0)$ so bestimmen, dass für $i = 1, \cdots, q$

$$\lambda \varphi_{\varrho i} + \mu \varphi_{\sigma i} = 0$$

wäre, und für dieselben Werthe von i hätte man

$$(\lambda X_\varrho + \mu X_\sigma, X_i) \equiv 0 \qquad \text{(modd. } Xf),$$

d. h. der ENGEL'sche Satz I würde ein covariantes vollständiges System liefern. Es folgt daher, wenn wir von dieser Möglichkeit absehen, aus der Relation (15)

$$(YX_1) \equiv \cdots \equiv (YX_r) \equiv 0 \qquad \text{(modd. } Xf,\ Yf,\ Zf)$$

oder

$$(YX_\varrho) \equiv \chi_\varrho(x_1, \cdots, x_n)\, Zf \qquad \text{(modd. } Xf, Yf)$$

für $\varrho = 1, \cdots, r$. Diejenigen infinitesimalen Transformationen

$$\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f,$$

für welche

$$\lambda_1 \chi_1 + \cdots + \lambda_r \chi_r = 0$$

ist[1]), würden also das System (14) invariant lassen, d. h. der ENGEL'sche Satz I würde, angewandt auf dieses System, ein vollständiges System liefern, das dann auch mit (1') invariant verknüpft wäre.

Nunmehr wollen wir annehmen, dass die $\varphi_{\varrho\sigma}\ (\varrho, \sigma = 1, \cdots, r)$ nicht sämmtlich verschwinden, und dass etwa (worin keine Beschränkung der Allgemeinheit liegt) $\varphi_{12} = 1$ ist.

Führt man an Stelle von $X_i f\ (i > 2)$

$$X_i' f = X_i f + \varphi_{2i} X_1 f - \varphi_{1i} X_2 f$$

ein, so wird $(X_1 X_i') \equiv (X_2 X_i') \equiv 0$ (modd. Xf). Wir wollen daher von vorneherein annehmen, es sei für $i > 2$

$$(X_1 X_i) \equiv (X_2 X_i) \equiv 0 \qquad \text{(modd. } Xf).$$

Wäre nun $r > 2$ und ϱ eine Zahl aus der Reihe $3, \cdots, r$, so würde aus der Identität

$$((X_1 X_2) X_\varrho) + ((X_2 X_\varrho) X_1) + ((X_\varrho X_1) X_2) = 0$$

folgen, dass für $\varrho = 3, \cdots, r$

$$(YX_\varrho) \equiv 0 \qquad \text{(modd. } Xf,\ Yf)$$

1) Wegen $r > 2$ giebt es wenigstens eine solche infinitesimale Transformation.

ist. Diese infinitesimalen Transformationen $X_\varrho f$ würden also das System (14) invariant lassen, und das bedeutet wieder, dass der Engel'sche Satz 1, angewandt auf dieses System, ein mit (1') covariantes vollständiges System liefert.

Wir haben jetzt nur noch den Fall zu untersuchen, wo für jeden Complex der Schaar (12), der eine stärkere Ausartung hat als ein allgemein gewählter Complex dieser Schaar, $r = 2$ ist. Das bedeutet aber, dass die Zahl q gerade sein muss, dass ferner die Determinante der Schaar (12) für einen Punkt von allgemeiner Lage nicht identisch verschwindet, und dass ihre Quadratwurzel lauter verschiedene Linearfactoren besitzt, weil wir sonst auf einen schon erledigten Fall kämen. Wir können annehmen[1])

$$|\alpha\varphi_{ik} + \beta\psi_{ik}| = (\alpha + \beta\psi_1)^2 \cdot \cdots (\alpha + \beta\psi_{q'})^2. \qquad (2q' = q)$$

Die ψ_k sind hier Functionen der x, die für einen Punkt von allgemeiner Lage sämmtlich voneinander verschieden sind. Nach Weierstrass ist für einen solchen Punkt die Formenschaar

$$\alpha \sum' \varphi_{ik}\lambda_i\mu_k + \beta \sum' \psi_{ik}\lambda_i\mu_k$$

mit der Schaar

$$\alpha \sum_1^{q'}{}_k (\lambda_{2k-1}\mu_{2k} - \mu_{2k-1}\lambda_{2k}) + \beta \sum_1^{q'}{}_k \psi_k(\lambda_{2k-1}\mu_{2k} - \mu_{2k-1}\lambda_{2k})$$

äquivalent, d. h. es giebt eine lineare Transformation der λ und eine andere der μ, welche jede Form der ersten in die entsprechende Form der zweiten Schaar überführen. Nach einem wichtigen Satze von Frobenius[2]) ist es aber immer möglich, die erste Schaar in die zweite auch durch *cogrediente* Transformation der λ und μ überzuführen. Von diesem Satze Gebrauch machend nehmen wir an, es sei durch Einführung linearer Combinationen der Xf an Stelle der alten Xf (was nach einer früher gemachten Bemerkung auf eine cogrediente Transformation der λ und der μ hinauskommt) bereits bewirkt, dass

---

1) Zu diesem Zweck braucht man nur zu bewirken, dass für einen Punkt allgemeiner Lage $|\varphi_{ik}| = 1$ ist. Das lässt sich aber durch passende Wahl von Yf erreichen.

2) Vgl. seine Arbeit „Über die cogrediente Transformation der bilinearen Formen". Ber. der Berliner Akad. d. Wiss. 1896. S. 1 ff. (Den betr. Satz hatte Herr Frobenius schon 1879 aufgestellt.)

$$\sum \varphi_{ik}\lambda_i\mu_k = \sum^k (\lambda_{2k-1}\mu_{2k} - \mu_{2k-1}\lambda_{2k}),$$
$$\sum \psi_{ik}\lambda_i\mu_k = \sum^k \psi_k(\lambda_{2k-1}\mu_{2k} - \mu_{2k-1}\lambda_{2k})$$

ist. Wir haben nun in der Schaar (12) q' ausgeartete Complexe entsprechend den Werthsystemen $\alpha = \psi_k$, $\beta = -1$. Die singulären Linienelemente eines solchen Complexes werden durch das System

$$X_{2k-1}f = 0, \; X_{2k}f = 0$$

bestimmt. Jedes dieser Systeme ist mit (1′) invariant verknüpft, und (1′) zerfällt also in q' zweigliedrige Systeme. Wir werden jetzt noch zeigen, dass es immer ein mit (1′) invariant verknüpftes vollständiges System giebt, wenn $q' > 2$ ist, also $q > 4$.

Zwischen den Xf bestehen modd. Xf die Relationen

$$(X_1 X_2) \equiv Yf + \psi_1 Zf,$$
$$(X_3 X_4) \equiv Yf + \psi_2 Zf,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(X_{2k-1} X_{2k}) \equiv Yf + \psi_k Zf,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(X_{q-1} X_q) \equiv Yf + \psi_{q'} Zf,$$

und sonst ist immer $(X_i X_k) \equiv 0$. Die Identität

$$((X_{2k-1} X_{2k}) X_1) + ((X_{2k} X_1) X_{2k-1}) + ((X_1 X_{2k-1}) X_{2k}) = 0$$

liefert für $k > 1$

$$(YX_1) + \psi_k(ZX_1) \equiv 0 \qquad (\text{modd. } Xf,\ Yf,\ Zf)$$

oder

$$(Y + \psi_1 Z, X_1) + (\psi_k - \psi_1)(ZX_1) \equiv 0 \qquad (\text{modd. } Xf,\ Yf,\ Zf).$$

Ist nun $q' > 2$, so hat man wenigstens zwei solche Relationen, aus denen dann wegen der Ungleichheit der ψ folgt

$$(Y + \psi_1 Z, X_1) \equiv 0 \qquad (\text{modd. } Xf,\ Yf,\ Zf).$$

Ebenso findet man, dass

$$(Y + \psi_1 Z, X_2) \equiv 0$$

ist. Diese beiden Relationen lassen sich auch so schreiben

$$(Y + \psi_1 Z, X_1) \equiv \chi_1 Zf,\ (Y + \psi_1 Z, X_2) \equiv \chi_2 Zf \quad (\text{modd. } Xf,\ Yf + \psi_1 Zf),$$

und dann folgt sofort, dass das mit (1′) nach Satz 2′ invariant verknüpfte System

$$(16) \qquad X_1 f = 0, \cdots, X_q f = 0,\ Yf + \psi_1 Zf = 0$$

entweder die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$ gestattet oder (wenn $\chi_1, \chi_2 \neq 0, 0$) die infinitesimale Transformation $\chi_2 X_1 f - \chi_1 X_2 f$. Auf alle Fälle würde man also bei Anwendung des Engel'schen Satzes 1 auf das System (16) ein mit (1') covariantes vollständiges System finden.

Nennen wir mit Herrn E. von Weber[1]) q die *Stufe* des Pfaff'schen Systems (1), so können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 5. *Sind bei einem Pfaff'schen System vom Charakter* 2 *die zu einem Pfaff'schen Bündel* (allgemeiner Lage) *gehörigen linearen Complexe nicht alle in gleicher Weise ausgeartet, so giebt es ein covariantes unbeschränkt integrables System, oder das Pfaff'sche System zerfällt in zwei covariante Systeme zweiter Stufe vom Charakter* 1, *die zu einander associirt sind.*

Wir wollen noch einige Bemerkungen über den Ausnahmefall machen, wo das System (1') viergliedrig ist und in die beiden zweigliedrigen Systeme

$$X_1 f = 0,\ X_2 f = 0 \quad \text{und} \quad X_3 f = 0,\ X_4 f = 0$$

zerfällt. Wir setzen jetzt

$$(X_1 X_2) = Yf, \quad (X_3 X_4) = Zf,$$

während wie früher

$$(X_1 X_3) \equiv (X_1 X_4) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_2 X_4) \equiv 0 \quad (\text{modd. } Xf)$$

ist. Die letzten Relationen besagen, dass die beiden zweigliedrigen Systeme associirt sind. Das mit (1') covariante System

$$(17) \quad X_1 f = 0, \ldots, X_4 f = 0,\ Yf = 0,\ (X_1 Y) = 0,\ (X_2 Y) = 0$$

muss 7-gliedrig sein. Wäre nämlich

$$(X_1 Y) \equiv \alpha_1 Vf, \quad (X_2 Y) \equiv \alpha_2 Vf \quad (\text{modd. } Xf,\ Yf),$$

so würden entweder die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$ oder wenigstens (wenn $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0, 0$) $\alpha_2 X_1 f - \alpha_1 X_2 f$ das covariante System

$$X_1 f = 0, \ldots, \quad X_4 f = 0, \quad Yf = 0$$

invariant lassen, und bei Anwendung des Engel'schen Satzes 1 auf dieses System würde man also ein mit (1') covariantes

---

1) Vgl. die oben citirte Arbeit.

vollständiges System finden.[1]) Ebenso erkennt man[2]), daſs das covariante System

$$(18)\quad X_1f=0,\ldots, X_4f=0,\; Yf=0,\; Zf=0,\; (X_1Y)=0,\; (X_2Y)=0$$

8-gliedrig sein muss. Wenden wir jetzt auf die Systeme $X_1f=0$, $X_2f=0$, $Yf=0$ und (17) den Satz 2′ an, so muss sich ein covariantes System ergeben, welches mindestens 9-gliedrig ist. Es kommen offenbar nur die Klammerausdrücke in Betracht, welche sich aus einer der infinitesimalen Transformationen X_1f, X_2f, Yf und einer der beiden folgenden: (X_1Y), (X_2Y) bilden lassen.[2]) Wäre nun modd. Xf, Yf, (XY)

$$\begin{aligned}&(X_1(X_1Y))\equiv\alpha_1 Vf, \quad (Y(X_1Y))\equiv\beta_1 Vf,\\&(X_2(X_1Y))=(X_1(X_2Y))\equiv\alpha_2 Vf,\\&(X_2(X_2Y))\equiv\alpha_3 Vf, \quad (Y(X_2Y))\equiv\beta_2 Vf,\end{aligned}$$

so würde die infinitesimale Transformation

$$\lambda X_1f+\mu X_2f+\nu Yf$$

das System (17) invariant lassen, sobald

$$\begin{aligned}\alpha_1\lambda+\alpha_2\mu+\beta_1\nu&=0,\\ \alpha_2\lambda+\alpha_3\mu+\beta_2\nu&=0\end{aligned}$$

wäre, d. h. der ENGEL'sche Satz 1 würde, angewandt auf das System (17), ein mit (1′) covariantes vollständiges System liefern. Endlich kann man jetzt noch zeigen, dass das System

$$\begin{cases}X_1f=0, & X_2f=0, \quad Yf=0, \quad (X_1Y)=0, \quad (X_2Y)=0,\\ X_3f=0, & X_4f=0, \quad Zf=0, \quad (X_3Z)=0, \quad (X_4Z)=0\end{cases}$$

10-gliedrig ist. Es entsteht, indem man den Satz 2′ auf die Systeme $X_3f=0$, $X_4f=0$ und (18) anwendet, oder auch, indem man von dem 4-gliedrigen System $X_1f=0,\ldots, X_4f=0$ die ENGEL'sche Covariante (1‴) bildet.[2]) Wäre nun

$$(X_3Z)\equiv\alpha_3 Vf, \quad (X_4Z)\equiv\alpha_4 Vf \quad (\text{modd. } Xf,\, Yf,\, Zf,\, (XY)),$$

so würde, wenn nicht X_3f und X_4f beide das System (18) invariant lassen, sicher $\alpha_4X_3f-\alpha_3X_4f$ dies thun. Jedenfalls würde

---

1) Alle unsere vollständigen Systeme sind $(<n)$-gliedrig.

2) Hierbei kommen unsere früheren Bemerkungen über associirte Systeme in Betracht, besonders die, dass gewisse Covarianten ebenfalls associirt sind. Vgl. S. 183.

also die Anwendung des Engel'schen Satzes 1 auf das System (18) ein mit (1') covariantes vollständiges System liefern.

Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, dass *ein Pfaff'sches System vierter Stufe vom Charakter 2 immer ein covariantes vollständiges System besitzt, solange die Zahl der Veränderlichen kleiner als 10 ist.* Würden nämlich (das müssen wir noch hinzufügen) alle Complexe der Schaar (12) für einen Punkt von allgemeiner Lage ausgeartet sein, so gäbe es ein Linienelement, welches für sie alle singulär ist. Dann käme man also zu einer mit (1') covarianten linearen partiellen Differentialgleichung.

IV.

Pfaff'sche Systeme sechster Stufe vom Charakter 2 und Systeme vierter Stufe vom Charakter 4.

Wir beweisen zunächst einen sehr naheliegenden allgemeinen Satz, der uns lediglich als Hilfsmittel dienen soll.

Satz 6. *Wenn die zu einem q-gliedrigen System*

$$(1') \qquad X_1 f = 0, \ldots, X_q f = 0$$

gehörigen Engel'schen Covarianten

$$(1'') \qquad X_i f = 0, \quad (X_i X_k) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, q)$$

und

$$(1''') \qquad X_i f = 0, \quad (X_i X_k) = 0, \quad (X_i (X_k X_l)) = 0 \qquad (i, k, l = 1, \ldots, q)$$

bezüglich $q + r$ und $q + r + s$ unabhängige Gleichungen enthalten $(r, s > 0)$, so existirt ein covariantes vollständiges System, sobald $r \cdot s < q$ ist.

Wir können nämlich schreiben

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_\varrho \, \varphi_{ik}^{(\varrho)} \, Y_\varrho f \qquad (\text{modd. } Xf),$$

$$(X_i Y_\varrho) \equiv \sum_1^s {}_\sigma \, \psi_{i\varrho}^{(\sigma)} Z_\sigma f \qquad (\text{modd. } Xf, Yf),$$

und die infinitesimale Transformation $\lambda X = \sum_1^q {}_i \, \lambda_i X_i$ lässt das System

$$X_i f = 0, \quad (X_i X_k) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, q)$$

invariant, sobald für $\varrho = 1, \ldots, r$

$$(\lambda X, Y_\varrho) \equiv \sum_{i,\sigma} \lambda_i \psi_{i\varrho}^{(\sigma)} Z_\sigma f \equiv 0 \qquad (\text{modd. } Xf, Yf)$$

ist. Das ist der Fall, wenn die $r \cdot s$ Gleichungen

$$\sum_i \lambda_i \psi_{i\varrho}^{(\sigma)} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r; \sigma = 1, \ldots, s)$$

bestehen. Diese haben aber, wenn $r \cdot s < q$ ist, sicherlich ein Lösungssystem.

Auf Grund des Satzes 5 hat für $q > 4$ ein PFAFF'sches System vom Charakter 2 immer ein covariantes unbeschränkt integrables System, wenn die zu einem PFAFF'schen Bündel allgemeiner Lage gehörigen ∞^1 linearen Complexe nicht alle in gleicher Weise ausgeartet sind. Ebenso würde aus der Existenz solcher Linienelemente, die für alle Complexe singulär sind, auf ein covariantes unbeschränkt integrables System geschlossen werden können[1]) (nach dem ENGEL'schen Satze 1). Würden nun im Falle $q = 6$ die Determinanten aller Complexe den Rang 2 haben, so entspräche jedem von ihnen ein ebenes Bündel vierter Stufe von singulären Linienelementen, und da zwei solche Bündel (die ja dem PFAFF'schen Bündel, welches von sechster Stufe ist, angehören) sicher Linienelemente gemein haben, so gäbe es Linienelemente, welche für zwei Complexe und somit für die ganze Schaar singulär wären. Es bleibt uns also nur übrig anzunehmen, dass *die Determinanten aller Complexe den Rang* 4 haben.

Wir brauchen zur Erledigung dieses Falles einen liniengeometrischen Satz, den wir hier mit möglichst einfachen Hilfsmitteln ableiten wollen.[2])

Wir betrachten eine Schaar von linearen Complexen im R_5

$$uA + vB = u \sum_{i,k}^{1,\ldots,6} a_{ik} \lambda_i \mu_k + v \sum_{i,k}^{1,\ldots,6} b_{ik} \lambda_i \mu_k = 0$$

$$(a_{ik} + a_{ki} = b_{ik} + b_{ki} = 0),$$

wobei $(\lambda_1 : \cdots : \lambda_6)$ und $(\mu_1 : \cdots : \mu_6)$ homogene Punktcoordinaten sind, und nehmen an, dass für alle Werthepaare $u, v \; (\neq 0, 0)$ die

1) Vgl. die Ausführungen auf Seite 185.

2) Der Satz lässt sich auch aus KRONECKER's allgemeiner Theorie der singulären Formenschaaren entnehmen.

Determinante $|ua_{ik} + vb_{ik}|$ den Rang 4 hat.[1]) Zu jedem Complex der Schaar gehört eine singuläre Gerade (d. h. eine Gerade mit lauter singulären Punkten), und wir schliessen es aus, dass je zwei singuläre Geraden sich schneiden. (Sonst gäbe es nämlich einen Punkt, der für alle Complexe der Schaar singulär wäre, und dieser Umstand würde bei unseren Pfaff'schen Systemen auf ein covariantes unbeschränkt integrables System schliessen lassen.) Durch eine projective Transformation können wir erreichen, dass die singulären Geraden von $A = 0$ und $B = 0$ bezüglich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ sind, so dass also

$$A = \sum_{i,k}^{1,2,3,4}{}' a_{ik}\lambda_i\mu_k, \quad B = \sum_{i,k}^{1,2,5,6}{}' b_{ik}\lambda_i\mu_k$$

ist, wenn wir die alten Bezeichnungen beibehalten. Man überzeugt sich nun leicht, dass $a_{34} = b_{56} = 0$ sein muss, damit die Determinante $|ua_{ik} + vb_{ik}|$ immer den Rang 4 hat. Ferner muss aus demselben Grunde sowohl $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$ als auch $\begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{vmatrix}$ von Null verschieden sein. Wir können also durch die Transformation

$$\lambda_1' = \lambda_1, \quad \lambda_2' = \lambda_2, \quad \lambda_3' = a_{13}\lambda_3 + a_{14}\lambda_4, \quad \lambda_4' = a_{23}\lambda_3 + a_{24}\lambda_4,$$
$$\lambda_5' = a_{15}\lambda_5 + a_{16}\lambda_6, \quad \lambda_6' = a_{25}\lambda_5 + a_{26}\lambda_6$$

(während die μ cogredient transformirt werden) erreichen, dass

$$A = \lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1 + \lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2 + a_{12}(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1),$$
$$B = \lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + \lambda_2\mu_6 - \lambda_6\mu_2 + b_{12}(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$$

wird. Wenn wir jetzt noch $\lambda_3 + a_{12}\lambda_2$ als neues λ_3, $\lambda_5 + b_{12}\lambda_2$ als neues λ_5 einführen (ebenso $\mu_3 + a_{12}\mu_2$, $\mu_5 + b_{12}\mu_2$ als neues μ_3 bezw. μ_5), so kommt

$$A = \lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1 + \lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2,$$
$$B = \lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + \lambda_2\mu_6 - \lambda_6\mu_2.$$

---

1) Herr E. von Weber, der sich in seiner letzten Arbeit über Pfaff'sche Systeme mit der Liniengeometrie des R_5 beschäftigt, hat diesen Fall nicht erledigt, da er sich die Untersuchung über die Reducirbarkeit der entsprechenden Klasse von Pfaff'schen Systemen sechster Stufe noch vorbehält.

Die singuläre Gerade von $uA + vB = 0$ wird jetzt dargestellt durch

$$u\lambda_3 + v\lambda_5 = 0, \quad u\lambda_1 = 0, \quad u\lambda_2 = 0,$$
$$u\lambda_4 + v\lambda_6 = 0, \quad v\lambda_1 = 0, \quad v\lambda_2 = 0,$$

d. h.

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad u\lambda_3 + v\lambda_5 = 0, \quad u\lambda_4 + v\lambda_6 = 0.$$

Die singulären Geraden aller Complexe bilden also die eine Schaar von geradlinigen Erzeugenden der Fläche 2. Grades $\lambda_3\lambda_6 - \lambda_4\lambda_5 = 0$ *in dem* R_3, *der durch* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *dargestellt wird.* Dieser R_3 ist mit der Schaar von Complexen gegenüber allen projectiven Transformationen invariant verknüpft.

Wenn wir nach dieser Hilfsbetrachtung zu den PFAFF'schen Systemen sechster Stufe vom Charakter 2 zurückkehren, so können wir jetzt von vorneherein annehmen, dass modd. Xf

$$(\lambda X, \mu X) \equiv (\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1 + \lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2)\, Yf$$
$$+ (\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + \lambda_2\mu_6 - \lambda_6\mu_2)\, Zf$$

ist, wobei wir wie früher

$$\lambda X = \sum_1^6{}^i \lambda_i X_i f, \quad \mu X = \sum_1^6{}^i \mu_i X_i f$$

gesetzt haben.

Es geht ferner aus unserer liniengeometrischen Betrachtung hervor, dass das System

$$X_3 f = 0, \quad X_4 f = 0, \quad X_5 f = 0, \quad X_6 f = 0$$

mit dem sechsgliedrigen, welches wir betrachten, invariant verknüpft ist. Da $(X_i X_k) \equiv 0$ (modd. Xf) ist, sobald i, $k > 2$, so ist auch die ENGEL'sche Covariante (1'') des Satzes 2, gebildet für das viergliedrige System, in dem sechsgliedrigen enthalten. Diese Covariante ist also, wenn das System kein vollständiges sein soll, entweder 5-gliedrig oder 6-gliedrig. Im ersten Falle würde sie sich so schreiben lassen

$$X_3 f = 0, \ldots, X_6 f = 0, \quad \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f = 0,$$

und die ENGEL'sche Covariante (1''') würde offenbar höchstens 8-gliedrig sein können. Die Zahlen r, s des Satzes 6 wären also höchstens gleich 1 und gleich 3, und es wäre $r \cdot s < q$, so dass es nach jenem Satz ein covariantes vollständiges System geben müsste.

In dem noch übrig bleibenden Falle wäre unser sechsgliedriges System offenbar die Engel'sche Covariante (1″) des viergliedrigen Systems

$$X_3 f = 0, \ldots, X_6 f = 0,$$

und die Engel'sche Covariante (1‴) dieses Systems wäre genau 8-gliedrig. Unsere Bemerkungen über Pfaff'sche Systeme vierter Stufe vom Charakter 2 haben aber gezeigt, dass die Covariante (1‴) eines solchen Systems gerade 10-gliedrig sein muss, wenn es kein covariantes unbeschränkt integrables System geben soll (vgl. S. 198). Wir können daher den Satz aufstellen:

Satz 7. *Jedes Pfaff'sche System sechster Stufe vom Charakter 2 hat ein covariantes unbeschränkt integrables System.*

Wir wollen jetzt noch kurz Pfaff'sche Systeme vierter Stufe vom Charakter 4 betrachten. In jedem Pfaff'schen Bündel (allgemeiner Lage) hat man in diesem Falle eine viergliedrige Schaar von linearen Complexen, und wir können uns hier auf bekannte Sätze der Liniengeometrie des gewöhnlichen Raumes stützen. Zu jeder viergliedrigen Schaar von Complexen giebt es eine zweigliedrige (conjugirte) Schaar derart, dass jeder Complex der einen Schaar mit jedem der anderen Schaar in Involution liegt. In unserem Falle müssen wir offenbar annehmen, dass diese zweigliedrige Schaar nicht aus lauter speciellen Complexen besteht. Sonst würden wir eine mit unserem System covariante lineare partielle Differentialgleichung haben.[1]) Enthält die zweigliedrige Schaar nur *einen* speciellen Complex, so kann man sie nach einer passenden projectiven Transformation folgendermassen schreiben, wenn $(\lambda_1 : \cdots : \lambda_4)$ und $(\mu_1 : \cdots : \mu_4)$ homogene Punktcoordinaten im R_3 bedeuten:

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 0, \quad \lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1 + \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2 = 0.$$

Die conjugirte Schaar enthält dann die Complexe

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 0, \quad \lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1 = 0, \quad \lambda_4\mu_2 - \lambda_2\mu_4 = 0,$$
$$\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1 + \lambda_3\mu_2 - \lambda_2\mu_3 = 0.$$

Der Complex $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 0$ ist bei allen projectiven Transformationen mit den beiden Schaaren von Complexen invariant

1) Die Axen der speciellen Complexe bilden nämlich ein ebenes Büschel, und dem Scheitel dieses Büschels entspräche ein Linienelement, welches mit dem Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ invariant verknüpft ist.

verknüpft. Dasselbe gilt von seiner Axe $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ausserdem besteht noch zwischen den durch die Axe hindurchgehenden Ebenen und den auf ihr liegenden Punkten eine projective Beziehung.[1])

Wäre nun bei einem viergliedrigen System $X_1 f = 0, \ldots, X_4 f = 0$

$$(\lambda X, \mu X) \equiv (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) Y_1 f + (\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1) Y_2 f$$
$$+ (\lambda_4 \mu_2 - \lambda_2 \mu_4) Y_3 f + (\lambda_1 \mu_4 - \lambda_4 \mu_1 + \lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3) Y_4 f \quad (\text{modd. } Xf),$$

so würde das zweigliedrige System

$$X_3 f = 0, \quad X_4 f = 0,$$

welches der Axe des Complexes $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0$ entspricht, mit dem viergliedrigen System invariant verknüpft sein. Wenn dieses zweigliedrige System nicht schon selbst ein vollständiges ist, so ist das System

$$X_3 f = 0, \quad X_4 f = 0, \quad (X_3 X_4) = 0$$

dreigliedrig und in dem viergliedrigen enthalten. Es gäbe also (wegen der oben erwähnten projectiven Beziehung zwischen den Punkten und Ebenen der Axe des Complexes $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0$) eine covariante lineare partielle Differentialgleichung von der Form $\alpha_3 X_3 f + \alpha_4 X_4 f = 0$.

Wenn die zweigliedrige Schaar von Complexen zwei verschiedene specielle Complexe enthält, so können wir ihre Gleichungen auf die Form

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0, \quad \lambda_3 \mu_4 - \lambda_4 \mu_3 = 0$$

bringen, und diese beiden speciellen Complexe wären mit der viergliedrigen Schaar invariant verknüpft, mithin auch ihre Axen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Die viergliedrige Schaar würde übrigens die folgenden Complexe enthalten

$$\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1 = 0, \ \lambda_4 \mu_2 - \lambda_2 \mu_4 = 0, \ \lambda_1 \mu_4 - \lambda_4 \mu_1 = 0, \ \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 = 0.$$

Hätten wir nun bei unserem viergliedrigen System $X_1 f = 0, \ldots, X_4 f = 0$

$$(\lambda X, \mu X) \equiv (\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1) Y_1 f + (\lambda_4 \mu_2 - \lambda_2 \mu_4) Y_2 f$$
$$+ (\lambda_1 \mu_4 - \lambda_4 \mu_1) Y_3 f + (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) Y_4 f \quad (\text{modd. } Xf),$$

1) Jedem solchen Punkt entspricht die Ebene $\mu_4 \lambda_1 + \mu_3 \lambda_2 = 0$ (die λ als laufende Coordinaten betrachtet), welche ihm die Complexe der zweigliedrigen Schaar zuordnen.

so wären mit ihm die beiden zweigliedrigen Systeme

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0 \quad \text{und} \quad X_3 f = 0, \quad X_4 f = 0$$

invariant verknüpft. Wäre nun z. B. das erstere kein vollständiges System, so hätten die beiden Systeme

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad (X_1 X_2) = 0$$

und

$$X_3 f = 0, \quad X_4 f = 0$$

wegen $(X_1 X_2) \equiv 0$ (modd. Xf) *eine* lineare partielle Differentialgleichung gemeinsam, die mit dem viergliedrigen System invariant verknüpft wäre. Es gilt also der folgende Satz:

Satz 8. *Jedes* PFAFF'*sche System vierter Stufe vom Charakter* 4 *hat ein covariantes unbeschränkt integrables System.*

V.

Pfaff'sche Systeme in acht Veränderlichen.

Wir wollen jetzt die PFAFF'schen Systeme in acht Veränderlichen daraufhin untersuchen, ob sie covariante unbeschränkt integrable Systeme besitzen.

Eine PFAFF'sche Gleichung in einer geraden Zahl von Veränderlichen besitzt immer ein covariantes unbeschränkt integrables System. Ueberhaupt gilt, wie man unter Benutzung des ENGEL'schen Satzes I erkennt, folgendes:

Jedes PFAFF'*sche System q-ter Stufe vom Charakter* I *besitzt ein covariantes unbeschränkt integrables System, sobald q eine ungerade Zahl ist.*

In der That gelten für ein solches System Relationen von folgender Form

$$(X_i X_k) \equiv \varphi_{ik} Yf \qquad \text{(modd. } Xf\text{)},$$

und die infinitesimale Transformation λX lässt das System invariant, wenn die q Gleichungen

$$\sum_i^{1,\ldots,q} \lambda_i \varphi_{ik} = 0$$

bestehen. Da diese für ein ungerades q eine verschwindende Determinante haben, so giebt es immer solche infinitesimalen Transformationen, d. h. der ENGEL'sche Satz I liefert ein covariantes vollständiges System.

Es ist leicht zu erkennen, dass auch bei einem System von zwei PFAFF'schen Gleichungen in acht Veränderlichen stets ein covariantes unbeschränkt integrables System existirt. Ist das PFAFF'sche System vom Charakter 1, so folgt dies schon daraus, dass es dann eine covariante PFAFF'sche Gleichung giebt. Der andere Fall, wo das System den Charakter 2 hat, erledigt sich durch unseren Satz 7.

Ein viergliedriges PFAFF'sches System in acht Veränderlichen muss jedenfalls, wenn es kein covariantes unbeschränkt integrables System geben soll, so beschaffen sein, dass die Reihe der ENGEL'schen Covarianten (1''), (1'''), ... zu einem 8-gliedrigen System führt.[1]) Andererseits ist aber der Satz 6 zu beachten.

Wir behalten unter Berücksichtigung dieses Satzes nur zwei Möglichkeiten: Entweder ist schon die Covariante (1'') achtgliedrig, oder die Covariante (1'') ist sechsgliedrig und erst (1''') achtgliedrig. Im ersten Falle haben wir aber wegen Satz 8 ein covariantes unbeschränkt integrables System und im zweiten Falle wegen des covarianten sechsgliedrigen Systems (1''). Ein viergliedriges PFAFF'sches System in acht Veränderlichen hat also unter allen Umständen ein covariantes unbeschränkt integrables System.

Ein dreigliedriges PFAFF'sches System muss, wenn es kein covariantes unbeschränkt integrables System geben soll, den Charakter 3 haben. Ist also

$$X_1 f = 0, \ldots, X_5 f = 0$$

das äquivalente System von linearen partiellen Differentialgleichungen, so muss eine Relation von folgender Form bestehen:

$$(19) \quad (\lambda X, \mu X) = \sum_{i,k}^{1,\ldots,5} (\varphi_{ik}\lambda_i\mu_k Yf + \psi_{ik}\lambda_i\mu_k Zf + \chi_{ik}\lambda_i\mu_k Vf). \quad (\text{modd. } Xf)$$

Es kommt nun auf die liniengeometrische Untersuchung der Schaar von Complexen

$$(20) \qquad \alpha \sum \varphi_{ik}\lambda_i\mu_k + \beta \sum \psi_{ik}\lambda_i\mu_k + \gamma \sum \chi_{ik}\lambda_i\mu_k = 0$$

an. Dabei müssen wir ausschliessen, dass für einen Punkt $(x_1, \cdots, x_8)$ von allgemeiner Lage[2]) diese Complexe ein singuläres Linien-

---

1) Vgl. die Anmerkung auf Seite 182.

2) Für einen solchen Punkt, den wir uns bestimmt gewählt denken, gelten die folgenden Betrachtungen. Dabei sind dann also die φ, ψ, χ als constant anzusehen.

element gemein haben. Sonst würde nämlich schon der ENGEL'sche Satz 1 ein covariantes vollständiges System liefern. Aus diesem Grunde darf nun, wie man leicht erkennt, der Rang der Determinante

$$|\alpha\varphi_{ik} + \beta\psi_{ik} + \gamma\chi_{ik}|$$

nicht immer gleich 2 sein. Er kann also nur für gewisse Werthsysteme $\alpha, \beta, \gamma (\neq 0, 0, 0)$ gleich 2 und muss im allgemeinen gleich 4 sein. Ich beschränke mich der Kürze wegen darauf, nur die Resultate der liniengeometrischen Untersuchungen anzugeben, die hier in Betracht kommen. Herr CASTELNUOVO[1]) hat die Liniengeometrie des R_4 eingehend behandelt, und die hier auszusprechenden Sätze müssen aus seinen mir leider nicht zugänglichen Ergebnissen zu entnehmen sein.

Diese Sätze lassen sich in folgender Weise formuliren:

a) *Wenn es keinen Punkt giebt, der für alle linearen Complexe einer dreigliedrigen linearen Schaar im R_4 singulär ist, so sind nicht alle Complexe speciell.*[2]) *Giebt es überhaupt specielle Complexe in der Schaar, so sind sie entweder isolirt* (und ihre Anzahl ist dann gleich 1 oder 2 oder 3), *oder es giebt eine zweigliedrige lineare Schaar specieller Complexe und ausserdem gar keinen oder nur noch einen speciellen Complex.*

b) *Eine dreigliedrige lineare Schaar linearer Complexe im R_4, von denen keiner speciell ist, lässt sich durch eine projective Transformation in jede andere derartige Schaar überführen.*

Würde es unter den linearen Complexen (20) specielle geben, so könnten wir auf Grund von a) aus unserem Satze 4 auf die Existenz mindestens eines covarianten Systems sechster oder siebenter Stufe schliessen und könnten dann nach den bisherigen Ergebnissen sicher sein, dass auch ein covariantes unbeschränkt integrables System existirt. Uebrigens fallen gewisse von den in Satz a) aufgezählten Möglichkeiten von vorneherein auch ohne den Satz 4 fort. Gäbe es z. B. mehr als einen isolirten speciellen Complex in der Schaar (20), so hätten zwei solche Complexe *ein* singuläres Linienelement gemein, und mit dem Punkte $(x_1, \cdots, x_8)$ wäre ein Linienelement invariant verknüpft. Wir hätten also eine covariante lineare partielle Differentialgleichung.

---

1) Atti del Reale Istituto Veneto. 1891. S. 855—901.

2) *Speciell* nennen wir hier einen Complex, dessen Determinante den Rang 2 hat.

Wir haben jetzt nur noch den Fall zu betrachten, wo die Schaar (20) keinen speciellen Complex enthält. Eine solche Schaar von Complexen, in die wir nach Satz b) durch projective Transformation jede andere derartige Schaar überführen können, gewinnt man, wenn man ausdrückt, dass die dritte Ueberschiebung von zwei binären biquadratischen Formen

$$\lambda_1 x_1^4 + 4\lambda_2 x_1^3 x_2 + 6\lambda_3 x_1^2 x_2^2 + 4\lambda_4 x_1 x_2^3 + \lambda_5 x_2^4,$$

$$\mu_1 x_1^4 + 4\mu_2 x_1^3 x_2 + 6\mu_3 x_1^2 x_2^2 + 4\mu_4 x_1 x_2^3 + \mu_5 x_2^4$$

verschwindet. Man erhält dann

$$A = \lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1 + 3(\lambda_3\mu_2 - \lambda_2\mu_3) = 0,$$

$$B = \lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + 2(\lambda_4\mu_2 - \lambda_2\mu_4) = 0,$$

$$C = \lambda_2\mu_5 - \lambda_5\mu_2 + 3(\lambda_4\mu_3 - \lambda_3\mu_4) = 0,$$

und diese drei Complexe bestimmen eine Schaar von der verlangten Beschaffenheit. Wir können also dadurch, dass wir an Stelle der Xf lineare Combinationen derselben als neue Xf einführen und etwas Aehnliches mit den Yf, Zf, Vf machen, bewirken, dass die Relation (19) folgende einfache Gestalt annimmt[1]):

$$(19') \quad (\lambda X, \mu X) \equiv 2(\lambda_4\mu_1 - \lambda_1\mu_4 + 3(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2))\, Yf$$
$$+ 2(\lambda_5\mu_1 - \lambda_1\mu_5 + 2(\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2))\, Zf$$
$$+ 2(\lambda_5\mu_2 - \lambda_2\mu_5 + 3(\lambda_3\mu_4 - \lambda_4\mu_3))\, Vf. \qquad (\text{modd. } Xf)$$

Es bleibt uns noch übrig, die PFAFF'schen Systeme dritter und zweiter Stufe in 8 Veränderlichen zu betrachten. Ist

$$X_1 f = 0, \; X_2 f = 0, \; X_3 f = 0$$

das äquivalente System eines PFAFF'schen Systems dritter Stufe, so darf die ENGEL'sche Covariante (1″) des Satzes 2 nicht sechsgliedrig sein und auch nicht viergliedrig. In beiden Fällen hätten wir ein covariantes vollständiges System.[2]) Die Covariante muss also fünfgliedrig sein, d. h. man hat

$$(X_i X_k) \equiv \varphi_i Yf + \psi_i Zf \qquad (\text{modd. } Xf),$$

---

1) Die hinzugefügten Zahlenfactoren sollen die späteren Rechnungen vereinfachen.

2) In dem letzten Falle schon nach dem allgemeinen zu Anfang dieses Abschnittes bewiesenen Satze.

wenn i, k, l eine gerade Permutation von 1, 2, 3 ist, oder

$$(\lambda X, \mu X) \equiv \sum^{i} (\lambda_i \mu_k - \lambda_k \mu_i)(\varphi_l Yf + \psi_l Zf).$$

Die Complexe

$$\sum (\alpha\varphi_l + \beta\psi_l)(\lambda_i \mu_k - \lambda_k \mu_i) = 0$$

haben alle den Rang 2, jeder hat also ein singuläres Linienelement, und zwar wird dasselbe durch

$$\alpha \sum \varphi_i X_i f + \beta \sum \psi_i X_i f$$

dem Punkte $(x_1, \cdots, x_8)$ zugeordnet. Man erkennt auf diese Weise, dass das *zweigliedrige* System

$$\sum \varphi_i X_i f = 0, \quad \sum \psi_i X_i f = 0$$

mit dem dreigliedrigen invariant verknüpft ist, und offenbar ist

$$(\varphi X, \psi X) \equiv 0,$$

so dass also (wenn wir ausschliessen, dass das System $\varphi X = 0$, $\psi X = 0$ ein vollständiges ist,) das dreigliedrige System nichts anderes als die Engel'sche Covariante (1″) des zweigliedrigen darstellt. Umgekehrt hat jedes Pfaff'sche System zweiter Stufe eine solche Covariante, wenn es nicht unbeschränkt integrabel ist. Wir können daher beide Fälle zusammen behandeln.

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0$$

sei das zweigliedrige System und

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad X_3 f = (X_1 X_2) = 0$$

das dreigliedrige. Wir können dann setzen

$$(X_1 X_3) = X_4 f, \quad (X_2 X_3) = X_5 f.$$

Das covariante fünfgliedrige System

$$X_1 f = 0, \cdots, X_5 f = 0$$

hat nun, wie wir zeigen werden, immer ein covariantes vollständiges System. Die Engel'sche Covariante (1^{IV}) unseres zweigliedrigen Systems lautet[1])

$$X_1 f = 0, \cdots, X_5 f = 0, (X_1 X_4) = 0, (X_1 X_5) = (X_2 X_4) = 0, (X_2 X_5) = 0.$$

---

1) Aus der Jacobi'schen Identität für $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ folgt unter Berücksichtigung von $(X_1 X_2) = X_3 f$ sofort $(X_1 X_5) = (X_2 X_4)$.

Sie muss nach unseren Ergebnissen über die mehr als fünfgliedrigen Systeme[1]) achtgliedrig sein. Sonst gäbe es schon ein covariantes vollständiges System. Wir können daher setzen

$$(X_1 X_4) = Yf, \; (X_1 X_5) = (X_2 X_4) = Zf, \; (X_2 X_5) = Vf.$$

Die Determinante des Complexes (20) lautet also:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} & f_{35} \\ -\alpha & -\beta & f_{43} & 0 & f_{45} \\ -\beta & -\gamma & f_{53} & f_{54} & 0 \end{vmatrix},$$

wenn wir zur Abkürzung $f_{ik} = \alpha\varphi_{ik} + \beta\psi_{ik} + \gamma\chi_{ik}$ setzen.

Wenn die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & f_{34} \\ \beta & \gamma & f_{35} \end{vmatrix}$$

verschwinden, so ist der Complex offenbar speciell. Es ist aber immer möglich, $\varrho, \sigma \; (\neq 0, 0)$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$\varrho\alpha + \sigma\beta = 0, \quad \varrho\beta + \sigma\gamma = 0, \quad \varrho f_{34} + \sigma f_{35} = 0$$

sich auf weniger als drei reduciren. Dann haben sie aber ein von 0, 0, 0 verschiedenes Lösungssystem α, β, γ, und wir erkennen, dass es unter den Complexen der Schaar (20) specielle gibt. Dann existirt aber, wie wir oben gesehen haben, immer ein covariantes unbeschränkt integrables System. Wir haben also den folgenden Satz gewonnen:

Satz 9. *In 8 Veränderlichen hat jedes nicht dreigliedrige PFAFF'sche System ein covariantes unbeschränkt integrables System.*

VI.

Im R_8 gibt es kein Pfaff'sches System mit primitiver Transformationsgruppe.

Um dies zu beweisen, brauchen wir nur die dreigliedrigen Systeme zu betrachten. Wir denken uns das äquivalente System von linearen partiellen Differentialgleichungen so eingerichtet, dass

---

1) Das fünfgliedrige System darf nicht $X_1 f$, $X_2 f$ gestatten.

die Relation (19′) besteht. Wir können ferner annehmen, dass der Anfangspunkt $(0, \cdots, 0)$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, und dass sich für ihn $X_i f$ auf $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ reducirt $(i = 1, \cdots, 5)$, während sich Yf, Zf, Vf bezüglich auf $\frac{\partial f}{\partial y_1}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2}$, $\frac{\partial f}{\partial y_3}$ reduciren.[1])

Wir können leicht ein sehr einfach aussehendes Pfaff'sches System hinschreiben, welches in dem zum Anfangspunkte gehörigen Pfaff'schen Bündel dieselben linearen Complexe bestimmt, wie das von uns betrachtete System. Es lautet:

$$dy_1 + x_1 dx_4 - x_4 dx_1 + 3(x_3 dx_2 - x_2 dx_3) = 0,$$
$$dy_2 + x_1 dx_5 - x_5 dx_1 + 2(x_4 dx_2 - x_2 dx_4) = 0,$$
$$dy_3 + x_2 dx_5 - x_5 dx_2 + 3(x_4 dx_3 - x_3 dx_4) = 0.$$

Das äquivalente System von linearen partiellen Differentialgleichungen ist:

$$(21)\quad \begin{cases} \overline{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_5 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \\ \overline{X}_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2} - 3x_3 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 2x_4 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_5 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0, \\ \overline{X}_3 f = \frac{\partial f}{\partial x_3} + 3x_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 3x_4 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0, \\ \overline{X}_4 f = \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + 2x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 3x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0, \\ \overline{X}_5 f = \frac{\partial f}{\partial x_5} - x_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0, \end{cases}$$

und man hat in der That, wie gewünscht wurde, modd. $\overline{X}f$

$$(\lambda \overline{X}, \mu \overline{X}) \equiv 2(\lambda_4 \mu_1 - \lambda_1 \mu_4 + 3(\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2)) \frac{\partial f}{\partial y_1}$$
$$+ 2(\lambda_5 \mu_1 - \lambda_1 \mu_5 + 2(\lambda_2 \mu_4 - \lambda_4 \mu_2)) \frac{\partial f}{\partial y_2}$$
$$+ 2(\lambda_5 \mu_2 - \lambda_2 \mu_5 + 3(\lambda_3 \mu_4 - \lambda_4 \mu_3)) \frac{\partial f}{\partial y_3}.$$

Wir führen jetzt die Entwickelung nach Gewichten ein, und zwar ertheilen wir den x das Gewicht 1, den y das Gewicht 2, ferner soll $\frac{\partial f}{\partial x}$ das Gewicht -1, $\frac{\partial f}{\partial y}$ das Gewicht -2 haben, und das

1) Wir bezeichnen die 8 Veränderlichen mit $x_1, \cdots, x_5$; y_1, y_2, y_3.

Gewicht eines Produktes aus Factoren x, y, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ soll gleich der Summe der Gewichte dieser Factoren sein. Eine infinitesimale Transformation soll isobar heissen, wenn sie eine isobare ganze Function der x, y, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist. Dabei ist eine isobare ganze Function ein Aggregat von Gliedern gleichen Gewichts. Jede reguläre infinitesimale Transformation lässt sich in eine Reihe von isobaren infinitesimalen Transformationen mit zunehmendem Gewicht entwickeln. Das Glied niedrigsten Gewichts nennen wir das Anfangsglied. Das Anfangsglied des Klammerausdrucks von zwei infinitesimalen Transformationen ist dann der Klammerausdruck der beiden Anfangsglieder und nur, wenn dieser verschwindet, von einem höheren Gewicht. Das Gewicht des Klammerausdrucks von zwei isobaren infinitesimalen Transformationen ist gleich der Summe ihrer Gewichte.[1])

Wir können nun das Anfangsglied von $X_i f$ folgendermassen schreiben

$$\overline{X}_i f + \sum_1^3 {}_j \, \alpha_{ix}^{(j)} \frac{\partial f}{\partial y_j},$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\alpha_{ix}^{(j)} = \alpha_{i1}^{(j)} x_1 + \cdots + \alpha_{i5}^{(j)} x_5$$

setzen. Der Klammerausdruck $(X_i X_k)$ hat dann das Anfangsglied

$$(\overline{X}_i \overline{X}_k) + \sum_1^3 {}_j (\alpha_{ki}^{(j)} - \alpha_{ik}^{(j)}) \frac{\partial f}{\partial y_j},$$

oder dieser Ausdruck verschwindet. Andrerseits erkennt man aber leicht, dass $(\overline{X}_i \overline{X}_k)$ das Anfangsglied von $(X_i X_k)$ ist, wenn dessen Gewicht nicht grösser als -2 ist. Es muss also unter allen Umständen $\alpha_{ki}^{(j)} = \alpha_{ik}^{(j)}$ sein, d. h. die $\alpha_{ix}^{(j)}$ sind die partiellen Ableitungen der Function

$$\beta_j = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k}^{1,\dots,5} \alpha_{ik}^{(j)} x_i x_k,$$

und zwar ist

$$\alpha_{ix}^{(j)} = \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}.$$

---

1) Vgl. hierzu die ausführlicheren Betrachtungen in meiner Arbeit „Ueber PFAFF'sche Systeme mit primitiver Transformationsgruppe". Diese Ber. 1899, S. 271 ff.

Führen wir nun an Stelle von y_j ein $y'_j = y_j - \beta_j$, so wird das Anfangsglied von $X_i f$ einfach $\overline{X}_i f$, wenn wir die Striche bei den y nachher fortlassen. Unser fünfgliedriges System lässt sich also in folgender Weise schreiben:

$$X_i f = \overline{X}_i f + \cdots \qquad (i = 1, \cdots, 5),$$

wo die Punkte Glieder von grösserem Gewicht als 1 andeuten. Jetzt ist leicht zu erkennen, dass jede infinitesimale Transformation, welche das System $Xf = 0$ in sich überführt, als Anfangsglied eine isobare infinitesimale Transformation haben muss, die ihrerseits das „*verkürzte System*" $\overline{X}f = 0$ invariant lässt. Wir brauchen also, um wenigstens die Anfangsglieder aller infinitesimalen Transformationen von $Xf = 0$ kennen zu lernen, nur die isobaren infinitesimalen Transformationen zu suchen, die das System (21) in sich überführen. Uebrigens zerfällt jede infinitesimale Transformation, welche das System (21) invariant lässt, in isobare Summanden, von denen dasselbe gilt.

Das System (21) gestattet nur eine zwölfgliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformationen hier, nach dem Gewicht geordnet, folgen:

$$(-2)\begin{cases} q_1, \\ q_2, \\ q_3, \end{cases}$$

$$(-1)\begin{cases} p_1 - x_4 q_1 - x_5 q_2, \\ p_2 + 3x_3 q_1 + 2x_4 q_2 - x_5 q_3, \\ p_3 - 3x_2 q_1 + 3x_4 q_3, \\ p_4 + x_1 q_1 - 2x_2 q_2 - 3x_3 q_3, \\ p_5 + x_1 q_2 + x_2 q_3, \end{cases}$$

$$(0)\begin{cases} x_1 p_2 + 2x_2 p_3 + 3x_3 p_4 + 4x_4 p_5 + 2y_1 q_2 + y_2 q_3, \\ 4x_2 p_1 + 3x_3 p_2 + 2x_4 p_3 + x_5 p_4 + y_2 q_1 + 2y_3 q_2, \\ 2(x_1 p_1 - x_5 p_5) + x_2 p_2 - x_4 p_4 + y_1 q_1 - y_3 q_3, \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + 2(y_1 q_1 + y_2 q_2 + y_3 q_3). \end{cases}$$

Soll das System $Xf = 0$ eine transitive Transformationsgruppe gestatten, so muss diese 8 infinitesimale Transformationen von den Gewichten -2 und -1 enthalten, deren Anfangsglieder hier angegeben sind.

Soll die Gruppe keine lineare partielle Differentialgleichung invariant lassen, so muss sie mindestens drei infinitesimale Transformationen vom Gewicht 0 enthalten, deren Anfangsglieder die drei ersten unter (0) angegebenen Ausdrücke sind. Enthielte sie nur drei infinitesimale Transformationen vom Gewicht Null, so würde sie offenbar auch nur drei infinitesimale Transformationen 1. Ordnung nach Lie's Terminologie enthalten. Sie würde dann nach Festhaltung des Anfangspunktes dessen Linienelemente durch eine nicht integrable dreigliedrige projective Gruppe transformiren, die eine ebene Mannigfaltigkeit fünfter Stufe (nämlich das Pfaff'sche Bündel, welches zu dem Anfangspunkt gehört) invariant lässt. Nach einem allgemeinen Satze von Study[1]) bleiben aber bei einer solchen projectiven Gruppe eine Anzahl zueinander windschiefer ebener Mannigfaltigkeiten invariant, deren Stufenzahlen die Summe 8 haben. Es gäbe also sicher eine invariante ebene Mannigfaltigkeit von niedrigerer als vierter Stufe. Das würde aber bedeuten, dass die Gruppe auch ein Pfaff'sches System invariant lässt, welches nicht dreigliedrig ist. Dann wäre die Gruppe jedenfalls imprimitiv (nach Satz 9).

Ist die Gruppe, welche das System $Xf = 0$ invariant lässt, zwölfgliedrig, so kann man leicht zeigen, dass sie mit der oben angegebenen Gruppe ähnlich ist. Diese ist aber wieder imprimitiv. Es gilt also der Satz:

Satz 10. *In acht Veränderlichen gibt es keine primitive Gruppe von Punkttransformationen, die ein Pfaff'sches System invariant lässt.*

---

1) Lie-Engel, Theorie der Trf.-gr. III. S. 785.

Druckfertig erklärt 6. VII. 1901.]

Heinrich Liebmann: *Ueber die Verbiegung von Rotationsflächen.*

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich, wie verschiedene frühere Abhandlungen[1]), mit dem Problem der *Verbiegung zusammenhängender Flächenstücke.* Es sollen dabei die früher gefunden Ergebnisse ergänzt und erweitert werden.

1. Die *Ergänzung* bezieht sich auf die Untersuchung der Tragweite der früheren Beweise. Der Schluss von den infinitesimalen auf die endlichen Verbiegungen, welcher in „*V*“ und „*U*“ fehlt, während er in „*R*“ § 5 angedeutet ist, soll nämlich jetzt genau durchgeführt werden (§ 2).

Bei diesem Schluss ist die einige Voraussetzung, dass die infinitesimale Verbiegung eine infinitesimale Bewegung ist; er gilt also für alle Fälle, wo man nachgewiesen hat, dass diese Voraussetzung erfüllt ist.

2. Die *Erweiterung* besteht darin, dass nicht (wie in „*V*“, „*U*“ und „*R*“) geschlossene Flächenstücke betrachtet werden, sondern gewisse, von zwei Parallelkreisen begrenzte *Zonen von Rotationsflächen.*[2]) Diese Zonen sollen folgende Eigenschaften haben: Im Innern einer Zone soll das Krümmungsmaass der Fläche positiv sein, und es sollen die beiden die Zone begrenzen-

---

1) Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Math. Annalen 53 (1899). (Im Folgenden citirt mit „*V*“). — Neuer Beweis des Satzes, dass eine geschlossene convexe Fläche sich nicht verbiegen lässt. Math. Annalen 54. 1901. („*U*“). — Ueber die Verbiegung der geschlossenen Ringfläche. Nachr. der Kgl. G. d. W. zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse 1901 („*R*“).

2) Uebrigens ist die Verbiegung eines bestimmten ungeschlossenen Flächenstückes, nämlich der Halbkugel, bereits untersucht. — Vgl. die Arbeit: Ein Satz über endliche einfach zusammenhängende Flächenstücke negativer Krümmung. Berichte der K. S. G. d. W. zu Leipzig. Math.-Phys. Klasse 1900. p. 28 ff.

den Parallelkreise die Eigenschaft haben, dass die Flächennormalen längs derselben der Rotationsaxe der Fläche parallel sind. (Vgl. den Meridianschnitt der Fläche in Fig. 2). Die Radien der beiden begrenzenden Parallelkreise können beliebige Werthe haben, z. B. auch gleich Null sein. Die Zone lässt sich auch kurz so charakterisiren: Bildet man sie durch parallele Normalen auf eine Kugel ab, dann soll dieses Bild die Kugel einfach und vollständig bedecken.

Die Methode, welche angewendet wird, ist im Wesentlichen dieselbe wie in „*R*“, doch gestattet die *Einführung von trigonometrischen Reihen* eine grosse Vereinfachung. Die Einführung der Grössen K und Q („*R*“, § 3), deren Differentialgleichung im allgemeinen Falle eine sehr umständliche Form hätte, lässt sich

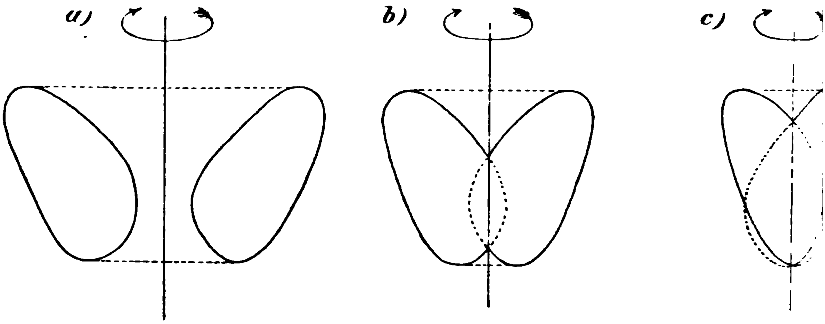


Fig. 1.

vermeiden, und statt der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung brauchen wir hier nur gewöhnliche (lineare) Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Siehe § 4).

3. Nachdem von solchen Zonen gezeigt ist, dass sie sich nicht verbiegen lassen, folgt weiter, dass jede Rotationsfläche, die eine derartige Zone enthält, sich nicht verbiegen lässt. Zu diesen Flächen gehört der *Kreisring* (die frühere Beschränkung („*R*“ § 2, 2), dass derselbe sich nicht durchdringen darf, fällt fort) und ferner eine ganze Reihe von Flächen, welche durch *Rotation von Ovalen* entstehen: Die in der Ebene des Ovales gelegene Axe möge entweder das Oval nicht treffen, oder in zwei Punkten, welche die Eigenschaft haben, dass die inneren Normalen des Ovales, welche zu diesen Punkten gehören, nicht auf verschiedenen Seiten der Axe liegen (Fig. 1, a—c).

Wir gelangen nun auch leicht zu einer geschlossenen Fläche, die in allen Punkten positives Krümmungsmaass hat, ausgenommen zwei Punkte, und von der wir jetzt nachweisen können, dass sie sich als geschlossene Fläche nicht verbiegen lässt. Ein symmetrisches Oval, dass nur in den Endpunkten seiner Axe zwei Flachpunkte hat, erzeugt durch Rotation um diese Axe eine Fläche, auf die sich der Satz unmittelbar anwenden lässt. (Vgl. dagegen „*R*" § 1, Anm. 1.)

§ 2. Reguläre endliche Verbiegungen und infinitesimale Verbiegungen.

1. *Reguläre (endliche) Verbiegungen.* Die folgende Untersuchung bezieht sich auf eine gewisse Klasse von Verbiegungen eines zusammenhängenden Flächenstücks, die wir *reguläre Verbiegungen* nennen wollen. Dieselben werden in folgender Weise definirt.

Definition: Es seien $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ die Coordinaten eines Punktes des Flächenstückes in seiner Anfangslage. Dann sollen die Coordinaten desselben Punktes in der Endlage sich darstellen lassen durch Entwickelungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= X(u, v, t_1) = x(u, v) + \xi_1(u, v)t_1 + \xi_2(u, v)t_1^2 + \cdots \\ (1)\quad y_1 &= Y(u, v, t_1) = y(u, v) + \eta_1(u, v)t_1 + \eta_2(u, v)t_1^2 + \cdots \\ z_1 &= Z(u, v, t_1) = z(u, v) + \zeta_1(u, v)t_1 + \zeta_2(u, v)t_1^2 + \cdots \end{aligned}$$

Dabei sollen diese Entwickelungen auch noch convergieren, wenn man an Stelle der Constanten t_1 die der Bedingung

$$(2)\qquad 0 \leqq |t| \leqq |t_1|$$

unterworfene Variable t einsetzt. Endlich sollen nicht nur die Gleichungen (1), sondern auch die Gleichungen

$$(1')\qquad \begin{aligned} x' &= X(u, v, t), \\ y' &= Y(u, v, t), \\ z' &= Z(u, v, t) \end{aligned}$$

eine isometrische Fläche darstellen, d. h. eine Fläche, welche gleiches Bogenmaass hat, wie die gegebene Fläche. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, dann wollen wir die durch die Gleichungen (1) definirte Transformation eine reguläre Verbiegung nennen.

Die letzte Forderung ist *analytisch* so zu formuliren: Es sollen die Gleichungen bestehen:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)^2-\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\}=0,\\ &\frac{\partial x'}{\partial u}\cdot\frac{\partial x'}{\partial v}+\frac{\partial y'}{\partial u}\cdot\frac{\partial y'}{\partial v}+\frac{\partial z'}{\partial u}\cdot\frac{\partial z'}{\partial v}-\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right\}=0,\\ &\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial v}\right)^2-\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right\}=0. \end{aligned}$$

Die *geometrische* Bedeutung derselben ist folgende: Es soll nicht nur die Fläche in ihrem Anfangszustand (F_0) gleiches Bogenmaass haben wie die Fläche im Endzustand (F_1), sie soll sich auch durch eine Reihe von Zwischenzuständen (F_t), die zu F_0 in derselben Beziehung stehen, wie F_1 zu F_0, vom Zustand F_0 in den Zustand F_1 überführen lassen.

2. *Die Bewegung als reguläre Verbiegung.* Ein (triviales) Beispiel einer regulären Verbiegung ist die Bewegung. Nimmt man an, dass die Flächen F_0 und F_1 einander congruent sind, so lassen sie sich durch eine *Bewegung*, am einfachsten eine *Schraubung*, mit einander zur Deckung bringen. Die Gleichungen einer solchen Schraubung haben nach *Lie*[1]) folgende Form:

$$(1'')\quad \begin{aligned} x_1 &= x+\bar{\xi}\cdot t_1+V(\bar{\xi})\frac{t_1^2}{1\cdot 2}+\cdots+V^{(n-1)}(\bar{\xi})\cdot\frac{t_1^n}{n!}+\cdots,\\ y_1 &= y+\bar{\eta}\cdot t_1+V(\bar{\eta})\frac{t_1^2}{1\cdot 2}+\cdots+V^{(n-1)}(\bar{\eta})\cdot\frac{t_1^n}{n!}+\cdots,\\ z_1 &= z+\bar{\zeta}\cdot t_1+V(\bar{\zeta})\frac{t_1^2}{1\cdot 2}+\cdots+V^{(n-1)}(\bar{\zeta})\cdot\frac{t_1^n}{n!}+\cdots. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \beta z-\gamma y+a,\\ \bar{\eta} &= \gamma x-\alpha z+b,\\ \bar{\zeta} &= \alpha y-\beta x+c, \end{aligned}$$

und es bedeutet $V^{(k)}(f)$ die k-malige Wiederholung der Operation:

$$V(f)=\bar{\xi}\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{\eta}\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{\zeta}\frac{\partial f}{\partial z}\,.\,.$$

In diesem speciellen Falle stellen die Gleichungen (1″) gewiss eine reguläre Verbiegung dar, denn *erstens* bekommt man lauter *congruente* Flächen, die also gleiches Bogenmaass haben,

1) Lie-Scheffers, Continuirliche Gruppen. (Leipzig 1893) p. 103.

und *zweitens* convergiren diese Reihenentwickelungen, wenn man für t_1 irgend eine endliche Grösse einsetzt.

Weil nun die Gleichungen (1'') einfach eine Bewegung definiren, so folgt, dass die Gleichung

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

erfüllt ist. Setzt man links die Potenzreihen (1'') ein und ordnet nach Potenzen von t_1, so verschwinden die Coefficienten *aller* Potenzen von t_1 einzeln identisch. Nimmt man statt dessen eine Reihenentwickelung, die mit (1'') bis auf Glieder n-ter Ordnung übereinstimmt, und ordnet nun in dem Ausdruck

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$$

wieder nach Potenzen von t_1, so werden die Coefficienten der Glieder erster bis n-ter Ordnung einschliesslich verschwinden.

3. *Die infinitesimalen Verbiegungen.* Setzt man in den Gleichungen (3) die aus (1') und (1) sich ergebenden Reihenentwickelungen der Grössen x', y', z' ein, und bedenkt man ferner, dass das Bestehen der Gleichungen (3) gefordert wird, unabhängig davon, welchen Werth die Variable t hat, so gelangt man zu einer Reihe von Gleichungen, indem man erst den Coefficienten von t, dann den von t^2 u. s. w. gleich Null setzt. Die Glieder erster Ordnung — wir wollen für ξ_1, η_1, ζ_1 einfach ξ, η, ζ schreiben — müssen die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}=0,$$

$$(3')\quad \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial v}=0.$$

Hieran knüpfen wir folgende Definition:

Erfüllen die Funktionen ξ, η, ζ die Gleichungen (3') dann wollen wir sagen:

Die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon\xi, \\ y_1 &= y + \varepsilon\eta, \\ z_1 &= z + \varepsilon\zeta, \end{aligned}$$

definiren eine infinitesimale Verbiegung der gegebenen Fläche.[1])

1) L. Bianchi, Differentialgeometrie. Uebersetzt von Lukat. (Leipzig 1899). p. 286 ff.

Eine infinitesimale Verbiegung ist durchaus nicht etwa selbst eine Verbiegung, ebensowenig, wie eine gerade Linie identisch ist mit einer Curve, welche sie in einem Punkte berührt. Wenn man trotzdem von einer infinitesimalen „Verbiegung“ spricht, so geschieht dies in demselben Sinne, wie man etwa sagt: „In der Umgebung des Berührungspunktes fällt die Curve in erster Annäherung mit ihrer Tangente zusammen.“

Von den Gleichungen

$$(4'') \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon(\beta z - \gamma y + a), \\ y_1 &= y + \varepsilon(\gamma x - \alpha z + b), \\ z_1 &= z + \varepsilon(\alpha y - \beta x + c), \end{aligned}$$

wollen wir sagen: „Sie definiren eine infinitesimale Bewegung“. Setzt man in ihnen $\varepsilon = t_1$, so werden die Formeln (1'') die „dazu gehörige endliche Bewegung“ definiren.

4. *Infinitesimale und endliche Verbiegungen.* Für gewisse Flächenstücke (z. B. Ovaloide, vgl. „V“ und „U“ oder die Ringfläche, oder die in § 1, 2 definirten Zonen, s. unten § 5) lässt sich zeigen, dass die infinitesimale Verbiegung eine infinitesimale Bewegung sein muss. Was lässt sich daraus weiter folgern?

Wir behaupten, dass unter dieser Annahme sich die endliche reguläre Verbiegung (1) folgendermaassen darstellen lässt:

$$(1''') \qquad \begin{aligned} x' &= x + \bar{\xi}\cdot t + V(\bar{\xi})\cdot\frac{t^2}{1\cdot 2}\cdots + V^{(n-1)}(\bar{\xi})\frac{t^n}{n!} + \cdots \\ &\quad + \bar{\xi}_1 t^2 + V_1(\bar{\xi}_1)\frac{t^4}{2!} + \cdots + \bar{\xi}_2 t^3 + V_2(\bar{\xi}_2)\frac{t^6}{2!} + \cdots + \cdots \\ y' &= y + \bar{\eta}\cdot t + V(\bar{\eta})\cdot\frac{t^2}{1\cdot 2}\cdots + V^{(n-1)}(\bar{\eta})\frac{t^n}{n!} + \cdots \\ &\quad + \bar{\eta}_1 t^2 + V_1(\bar{\eta}_1)\frac{t^4}{2!} + \cdots + \bar{\eta}_2 t^3 + V_2(\bar{\eta}_2)\frac{t^6}{1\cdot 2} + \cdots + \cdots \\ z' &= z + \bar{\zeta}\cdot t + V(\bar{\zeta})\cdot\frac{t^2}{1\cdot 2}\cdots + V^{(n-1)}(\bar{\zeta})\frac{t^n}{n!} + \cdots \\ &\quad + \bar{\zeta}_1 t^2 + V_1(\bar{\zeta}_1)\frac{t^4}{2!} + \cdots + \bar{\zeta}_2 t^3 + V_2(\bar{\zeta}_2)\frac{t^6}{1\cdot 2} + \cdots + \cdots \end{aligned}$$

Dabei sind folgende Abkürzungen gebraucht:

Es ist gesetzt:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_k &= \beta_k z_k - \gamma_k y_k + a_k, \\ \bar{\eta}_k &= \gamma_k x_k - \alpha_k z_k + b_k, \\ \bar{\zeta}_k &= \alpha_k y_k - \beta_k x_k + c_k; \end{aligned}$$

und hierin

$$x_{i+1} = x_i + \bar{\xi}_i t^i + V_i(\bar{\xi}_i)\frac{t^{2i}}{1\cdot 2} + \cdots,$$

$$y_{i+1} = y_i + \bar{\eta}_i t^i + V_i(\bar{\eta}_i)\frac{t^{2i}}{1\cdot 2} + \cdots,$$

$$z_{i+1} = z_i + \bar{\zeta}_i t^i + V_i(\bar{\zeta}_i)\frac{t^{2i}}{1\cdot 2} + \cdots;$$

endlich bedeutet

$$V_i^{(m)}(f)$$

die m-malige Ausführung des Differentiationsprocesses:

$$V_i(f) = \bar{\xi}_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \bar{\eta}_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \bar{\zeta}_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot -$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich durch Schluss von n auf $n+1$. Wir gehen also von der Annahme aus, dass die Reihenentwickelung (1′) mit (1‴) bis auf die Glieder n-ter Ordnung inclusive übereinstimmt, wir nehmen ferner an, dass die Glieder $(n+1)$-ter Ordnung in (1′) sich von denen in (1‴) nur dadurch unterscheiden, dass noch die Ausdrücke

$$\bar{\zeta}_n(x, y, z), \ \bar{\eta}_n(x, y, z), \ \bar{\xi}_n(x, y, z)$$

hinzukommen.

Beachten wir zunächst, dass für die Reihenentwickelungen (1‴), wenn man sie bis zu den Gliedern $(n+1)$-ter Ordnung berücksichtigt, die Gleichungen bestehen:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2, \quad \text{u. s. w.}$$

und dass die Coefficienten von $t, t^2, \cdot\cdot t^{n+1}$ in allen diesen Gleichungen verschwinden (§ 2, 2), so bekommen wir das einfache Resultat:

Es ist (bis auf Grössen $n+2$-ter Ordnung)

$$(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$
$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2t^{n+1}(dx d\bar{\xi}_n + dy d\bar{\eta}_n + dz d\bar{\zeta}_n).$$

Da nun aber die Verbiegung *regulär* sein soll, so muss

$$dx \cdot d\bar{\xi}_n + dy \cdot d\bar{\eta} + dz \cdot d\bar{\zeta}_n = 0$$

sein, oder es ergiebt sich

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial\bar\xi_n}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial\bar\eta_n}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial\bar\zeta_n}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial\bar\xi_n}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial\bar\eta_n}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial\bar\zeta_n}{\partial v}$$

$$+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial\bar\xi_n}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial\bar\eta_n}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial\bar\zeta_n}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial\bar\xi_n}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial\bar\eta_n}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial\bar\zeta_n}{\partial v}=0.$$

Dann haben aber — da die infinitesimale Verbiegung der Voraussetzung nach eine infinitesimale Bewegung ist — die Grössen $\bar\xi_n$, $\bar\eta_n$, $\bar\zeta_n$ die Form

$$\bar\xi_n=\beta_n z-\gamma_n y+a_n,$$
$$\bar\eta_n=\gamma_n x-\alpha_n z+b_n,$$
$$\bar\zeta_n=\alpha_n y-\beta_n x+c_n,$$

oder — bis auf Grössen erster Ordnung in t (ausgeschlossen)

$$\xi_n=\beta_n z_n-\gamma_n y_n+a_n,$$
$$\eta_n=\gamma_n x_n-\alpha_n z_n+b_n,$$
$$\zeta_n=\alpha_n y_n-\beta_n x_n+c_n.$$

Hieraus folgt nun die Richtigkeit der Formeln (1‴); denn es ist (für $n=0$)

$$\xi=\beta z-\gamma y+a,$$
$$\eta=\gamma x-\alpha z+b,$$
$$\zeta=\alpha y-\beta x+c.$$

5. *Die Congruenz der Flächenstücke F_0 und F_1.* Das Resultat von Nr. 4 lässt sich so aussprechen: „Unter der Voraussetzung, dass die infinitesimale Verbiegung eine infinitesimale Bewegung ist, ergiebt sich, dass die endliche (reguläre) Verbiegung eine Ueberlagerung von unendlich vielen Schraubungen ist“. Denn die Transformation, welche x_k, y_k, z_k in x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1} überführt, ist eine Schraubung, und die Transformation welche x, y, z in x', y', z', überführt, ist also eine Ueberlagerung von unendlich vielen Schraubungen.

Man könnte hieraus direct folgern, dass die Flächen x', y', z' und x, y, z einander congruent sind, da die Reihenfolge einer *endlichen* Anzahl von Schraubungen äquivalent ist einer einzigen

Bewegung. Doch lässt sich dies direct begründen mit Benützung der Fundamentalgrössen.

Die in der Flächentheorie auftretenden Fundamentalgrössen:

$$E=\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial Y}{\partial u}\cdot\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2$$

sind Biegungsinvarianten; sie sind also unabhängig davon, welchen Werth der Parameter t in (1') hat.

Die Fundamentalgrössen:

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}\\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u}\\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$D'=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 Y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 Z}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u}\\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$D''=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u}\\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}$$

sind Differentialinvarianten bei Bewegungen und umgekehrt: Kann man zeigen, dass ausser den Grössen E, F, G auch D, D', D'' von dem Parameter t unabhängig sind, dann ist damit auch bewiesen, dass die verschiedenen Zustände, welche die Fläche bei Aenderung des Parameters t durchläuft, lauter congruente Flächen darstellen. [1])

1) Stahl und Kommerell, Flächentheorie. Leipzig 1893. p. 32.

Ferner sind die Fundamentalgrössen D, D', D'' analytische Functionen von u, v und t, die jedenfalls in einem gewissen Bereiche absolut convergente Reihen darstellen. Sie lassen sich nach Potenzen von t entwickeln, und man kann zeigen, dass für $t = 0$ alle ihre Differentialquotienten nach t verschwinden. Das ergiebt sich durch Substitution der Reihenentwickelungen (1'''):

Substituirt man zunächst an Stelle von X, Y, Z die Grössen

$$x_1 = x + \bar{\xi} \cdot t + V(\bar{\xi}) \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \cdots + V^{(n-1)}(\bar{\xi}) \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

$$y_1 = y + \bar{\eta} \cdot t + V(\bar{\eta}) \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \cdots + V^{(n-1)}(\bar{\eta}) \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

$$z_1 = z + \bar{\zeta} \cdot t + V(\bar{\zeta}) \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \cdots + V^{(n-1)}(\bar{\zeta}) \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

so verschwinden alle Differentialquotienten der Grössen: D, D', D'' nach t.

Substituirt man sodann

$$x_2 = x_1 + \bar{\xi}_1 t^2 + V_1(\bar{\xi}_1) \frac{t^4}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$y_2 = y_1 + \bar{\eta}_1 t^2 + V_1(\bar{\eta}_1) \frac{t^4}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$z_2 = z_1 + \bar{\zeta}_1 t^2 + V_1(\bar{\zeta}_1) \frac{t^4}{1 \cdot 2} + \cdots$$

dann bleiben auch wieder die Fundamentalgrössen ungeändert.

Durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens erkennt man, dass die Grössen D, D', D'' in der That von dem Parameter t unabhängig sind.

Also haben wir das Resultat gefunden:

Wenn die Gleichungen (1) *eine endliche reguläre Verbiegung definiren, und wenn ausserdem die Grössen* ξ, η, ζ, *welche die Gleichungen* (3') *erfüllen, sich in der Form*

$$\xi = \beta z - \gamma y + a,$$

$$\eta = \gamma x - \alpha z + b,$$

$$\zeta = \alpha y - \beta x + c$$

darstellen lassen, dann sind die Flächenstücke F_0 *und* F_1 *nothwendig einander congruent.*

Mit diesem Satze ist die in den früheren Beweisen noch gebliebene Lücke ausgefüllt, und zugleich die Grundlage für die folgende Untersuchung gewonnen.[1])

§ 3. Die infinitesimale Bewegung der Zone.

Wir wollen jetzt zunächst ein zur Behandluug unseres speciellen Problems geeignetes Coordinatensystem einführen, die Differentialgleichungen für die infinitesimale Verbiegung aufstellen, und endlich die Formeln entwickeln, welche in diesem Coordinatensystem eine infinitesimale Bewegung darstellen.

1. *Einführung eines neuen Coordinatensystems.* Wir gehen aus von folgendem rechtwinkligen Coordinatensystem: Die z-Axe möge mit der Axe der Zone zusammenfallen, die xy-Ebene möge die Ebene eines Parallelkreises sein. Von diesen rechtwinkligen Coordinaten gehen wir zuerst über zu Cylindercoordinaten, indem wir setzen:

$$x = \varrho \cos \varphi ,$$
$$y = \varrho \sin \varphi ;$$

dann aber zu einem neuen System: Ein Punkt, der auf einem Meridian (φ) der Zone liegt, soll bestimmt werden durch die Länge σ des Meridianstückes, gemessen von dem oberen die Zone begrenzenden Parallelkreis an. Allen Punkten, welche (in der Meridianebene des Punktes) auf der durch ihn gehenden Normale liegen, ertheilen wir ebenfalls den Werth σ zu, und bestimmen ihre Lage auf der Normale durch den Abstand u von der Zone. (Vgl. Fig. 2, welche einen Meridianschnitt darstellt.)

In diesem Coordinatensystem hat die Zone selbst die Gleichung

$$u = 0 .$$

Man kann die Fläche auch darstellen durch die simultanen Gleichungen:

$$z = z(\sigma)$$
$$r = r(\sigma) .$$

---

1) Es muss indessen zugegeben werden, dass ein Beweis, welcher über den Character der Verbiegung gar keine Voraussetzung macht, sondern direct an die Fläche F_1 anknüpft, befriedigender wäre. — Ein solcher Beweis ist aber bis jetzt erst bei der *Kugel* erbracht. („V.“ § 5. Vgl. auch D. Hilbert, Ueber Flächen von constanter Gauss'scher Krümmung p. 97 Transactions of the Americain Math. Soc. Vol 2. Nr. 1. Jan. 1901.)

Dabei bestehen die Gleichungen

(5) $$z'^2 + r'^2 = 1$$
und
(6) $$z'r'' - r'z'' = k$$

(unter k die Krümmung des Meridianes verstanden), aus denen noch folgt

(7) $$r'' = kz',$$
$$z'' = -kr'.$$

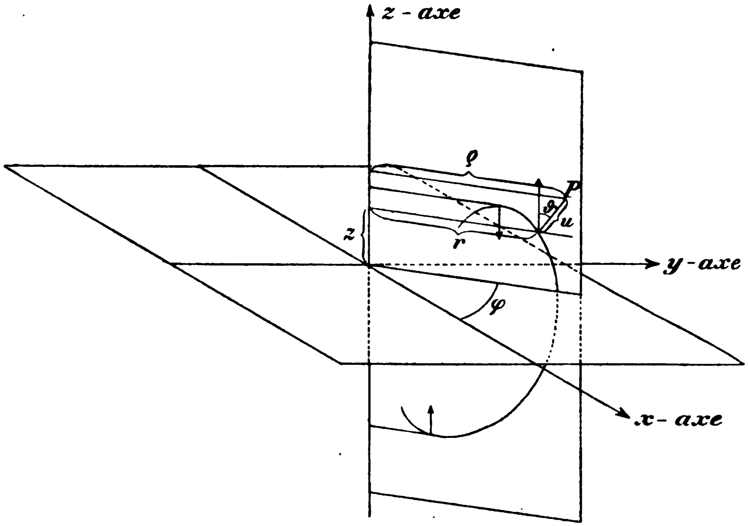


Fig. 2.

Im Innern der Zone ist ferner

(5′) $$z' < 0$$
und
(6′) $$k > 0$$
endlich ist am oberen Rande

(5″) $$z' = 0, \quad r' = +1$$
und am unteren
(5‴) $$z' = 0, \quad r' = -1.$$

Die Grössen z' und r' haben eine einfache geometrische Bedeutung, es ist nämlich

(5^IV) $$r' = \cos\vartheta, \quad z' = -\sin\vartheta,$$

unter ϑ den Neigungswinkel der Normale gegen die z-Axe verstanden.

Man kann nun auch die Cylindercoordinaten des Punktes P leicht berechnen: Sein Abstand von der xy-Ebene hat den Werth

$$z + u \cdot \cos\vartheta = z + u \cdot r',$$

sein Abstand von der Rotationsaxe ist

$$\varphi = r + u \cdot \sin\vartheta = r - u \cdot z'.$$

Die Krümmung der den Punkt P enthaltenden (in der Meridianebene gelegenen) Parallelcurve des Zonenmeridians ist

$$\frac{k}{1 + u \cdot k}.$$

Demnach ist das Quadrat des Bogenelements gegeben durch die Formel:

(8) $$ds^2 = (r - z'u)^2 d\varphi^2 + du^2 + (1 + uk)^2 d\sigma^2.$$

Für $u = 0$ erhält man das Quadrat des Bogenelements der Zone:

(9) $$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + d\sigma^2.$$

2. *Die infinitesimale Verbiegung der Zone.* Bei einer infinitesimalen Verbiegung treten an Stelle der Coordinaten φ, σ, 0 eines Punktes der Fläche die folgenden:

(4‴) $$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \varepsilon\Phi, \\ \sigma_1 &= \sigma + \varepsilon\theta, \\ u_1 &= \varepsilon U. \end{aligned}$$

Für ds^2 bekommen wir jetzt die Formel:

(9′) $$\begin{aligned} ds_1^2 = &(r + \varepsilon(r'\theta - z'U))^2 d(\varphi + \varepsilon\Phi)^2 \\ &+ \varepsilon^2 dU^2 + (1 + \varepsilon Uk)^2 d(\sigma + \varepsilon\theta)^2, \end{aligned}$$

oder (bis auf Grössen höherer Ordnung):

$$ds_1^2 = ds^2$$
$$+ 2\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} + U\cdot k\right) d\sigma^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + r^2\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right) d\sigma\, d\varphi + r\left(r'\theta - z'U + r\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) d\varphi^2\right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich, wenn man verlangt, dass die infinitesimale Transformation eine infinitesimale Verbiegung sein soll, die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + U \cdot k = 0,$$

(3″)
$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + r^2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0,$$

$$r'\theta - z'U + r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0.$$

Diese Gleichungen ersetzen bei der speciellen Wahl des Coordinatensystems die Gleichungen (3′).

Wenn θ, U und Φ diese Differentialgleichungen erfüllen, ferner auf der ganzen Zone sich regulär verhalten, dann definiren die Formeln (4‴) eine infinitesimale Verbiegung der Zone.

3. *Die infinitesimale Bewegung der Zone.* Bezeichnen wir den Zuwachs von r bei einer beliebigen infinitesimalen Transformation mit P, den von z mit ζ, so ist, wie man durch Zerlegung in Componenten erkennt (vgl. Fig. 3)

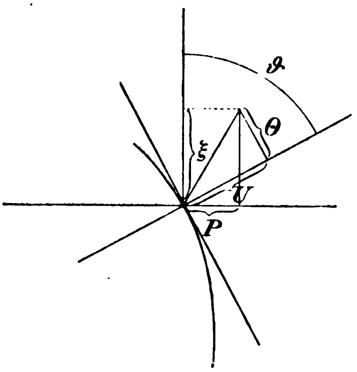


Fig. 3.

(10)
$$\begin{aligned} P &= \cos\vartheta \cdot \theta + \sin\vartheta \cdot U \\ &= r' \cdot \theta - z' \cdot U, \\ \zeta &= -\sin\vartheta \cdot \theta + \cos\vartheta \cdot U \\ &= z' \cdot \theta + r' \cdot U, \end{aligned}$$

Es ist ferner (für die Punkte der Fläche):

(11)
$$\begin{aligned} x + \varepsilon\xi &= (r + \varepsilon P)\cos(\varphi + \varepsilon\Phi) \\ &= r\cos\varphi + \varepsilon(P\cos\varphi - r\Phi\sin\varphi), \\ y + \varepsilon\eta &= r\sin\varphi + \varepsilon(P\sin\varphi + r\Phi\cos\varphi), \end{aligned}$$

und daher

(11′)
$$\begin{aligned} P &= r'(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi), \\ r\Phi &= -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi. \end{aligned}$$

Hieraus bekommt man endlich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \theta &= r' \cdot (\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi) + z' \cdot \zeta, \\ U &= -z' \cdot (\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi) + r' \cdot \zeta, \\ r\Phi &= -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi. \end{aligned}$$

Wenn die infinitesimale Transformation im Besonderen eine infinitesimale Bewegung ist, dann ist

$$\begin{aligned}\xi &= \beta z - \gamma y + a = \beta z - \gamma r \sin\varphi + a,\\ \eta &= \gamma x - \alpha z + b = \gamma r \cos\varphi - \alpha z + b,\\ \zeta &= \alpha y - \beta x + c = r(\alpha \sin\varphi - \beta\cos\varphi) + c;\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi &= z\cdot(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi) + a\cos\varphi + b\sin\varphi,\\ \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi &= \gamma r - z\cdot(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) - a\sin\varphi + b\cos\varphi.\end{aligned}$$

Bei einer infinitesimalen Bewegung haben also schliesslich θ, U und $r\Phi$ die folgenden Werthe:

$$(4^{IV})\qquad\begin{aligned}\theta &= r'\big(z(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi) + a\cos\varphi + b\sin\varphi\big)\\ &\quad + z'\big(r(\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi) + c\big),\\ U &= -z'\big(z(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi) + a\cos\varphi + b\sin\varphi\big)\\ &\quad + r'\big(r(\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi) + c\big),\\ r\Phi &= \gamma r - z(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) - a\sin\varphi + b\cos\varphi.\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt der Satz:

Haben die Grössen θ, U, $r\Phi$ die Werthe (4^{IV}), *dann stellen die Formeln* $(4''')$ *eine infinitesimale Bewegung der Zone dar.*

Aus den Formeln (4^{IV}) folgt nämlich mit Hülfe der Formeln (10) und (11)

$$\begin{aligned}\xi &= \beta z - \gamma y + a,\\ \eta &= \gamma x - \alpha z + b,\\ \zeta &= \alpha y - \beta x + c.\end{aligned}$$

§ 4. Die infinitesimale Verbiegung der Zone.

1. *Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen für Θ, Φ und $r\Phi$.* Die weitere Untersuchung hat an die Differentialgleichungen $(3'')$ anzuknüpfen. Wir wollen aus ihnen zuerst eine partielle Differentialgleichung für Θ allein, eine für Φ allein und endlich eine für die Grösse

$$\Psi = r\Phi$$

allein ableiten.

Eliminirt man U aus der ersten und dritten Gleichung (3″), so kommt:

$$r'k \cdot \Theta + z' \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + rk \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0,$$

oder

$$r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -r' \cdot \Theta - \frac{z'}{k} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} = 0$$

und weiter:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial \sigma} = -r\left(r'' \Theta + r' \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + \frac{z''k - k'z'}{k^2} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma}\right),$$
$$+ r'\left(r'\Theta + \frac{z'}{k} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma}\right)$$

oder mit Benutzung der Formeln (7):

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial \sigma} = \Theta(r'^2 - krz') + \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma}\left(\frac{r'z'}{k} + \frac{k'z'r'}{k^2}\right) - rz'\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sigma^2}.$$

Andrerseits hat man aus der letzten Gleichung (3″):

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt:

$$(12) \qquad k^2 \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} - krz' \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sigma^2} + z'(r'k + k'r)\frac{\partial \Theta}{\partial \sigma}$$
$$+ (r'^2 - krz')\Theta = 0.$$

Eine Differentialgleichung für Φ bekommt man auf folgendem Weg: Aus der letzten Gleichung (3′) folgt:

$$r' \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - z' \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + r \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Substituirt man hierin aus der zweiten Gleichung (3″):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = -r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma},$$

und aus der ersten und zweiten zusammen:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{k}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sigma \partial \varphi} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right),$$

so kommt:

$$(13) \qquad k \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - z'r \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - r'(2z' + rk)\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0.$$

Setzt man endlich:

$$\Phi = \frac{\Psi}{r}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} - \frac{r'}{r^2} \Psi,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \sigma^2} - \frac{2r'}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} - \left(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'^2}{r^3}\right) \Psi,$$

so erhält man mit Benützung von (7):

$$(14) \qquad k \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi} - z'r \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \sigma^2} - r'kr \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} + k \cdot \Psi = 0.$$

2. *Einführung von trigonometrischen Reihen.* Da die ganze Zone, ohne Unterbrechung des Zusammenhangs längs eines Parallelkreises verbogen werden soll, so werden Θ, Φ und U periodische Functionen von φ, die wir in Form von trigonometrischen Reihen darstellen können, deren Coefficienten Functionen von σ sind.

Wir setzen daher:

$$(15) \qquad \begin{aligned} \Theta &= a_\vartheta + \sum_1^\infty{}^n (a_{\vartheta n} \cos n\varphi + b_{\vartheta n} \sin n\varphi), \\ \Phi &= a_\varphi + \sum_1^\infty{}^n (a_{\varphi n} \cos n\varphi + b_{\varphi n} \sin n\varphi), \\ U &= a_u + \sum_1^\infty{}^n (a_{un} \cos n\varphi + b_{un} \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich mit Hülfe von (3″) zunächst die folgenden Differentialgleichungen für die Glieder nullter Ordnung:

$$(16) \qquad \begin{aligned} a'_\vartheta + a_u \cdot k &= 0, \\ r^2 a'\varphi &= 0, \\ r' a_\vartheta - z' a_u &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man weiter die trigonometrischen Reihen in die Gleichungen (3″) ein, und fordert, dass die Coefficienten von cos $n\varphi$ und sin $n\varphi$ verschwinden, so gelangt man zu dem Gleichungssystem:

$$(17) \qquad \begin{aligned} &a'_{\vartheta n} + a_{un} k = 0, \quad b'_{\vartheta n} + b_{un} k = 0; \\ &n b_{\vartheta n} + r^2 a'_{\varphi n} = 0, \quad n a_{\vartheta n} + r^2 b'_{\vartheta n} = 0; \qquad (n = 1, 2 \cdots) \\ &r' \cdot a_{\vartheta n} - z' a_{un} + n r b_{\varphi n} = 0, \quad r' b_{\vartheta n} - z' a_{un} - n r a_{\varphi n} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man dagegen die Reihe für Θ direct in die Differentialgleichung (12) ein, so bekommt man sowohl für $a_{\vartheta n}$ wie für $b_{\vartheta n}$ beidesmal dieselbe lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der wir nun die abhängige Variable einfach mit $f_{\vartheta n}$ bezeichnen wollen.

Dieselbe ist:

$$(12') \qquad -krz' \cdot f''_{\vartheta n} + z'(r'k + k'r) \cdot f'_{\vartheta n} + k(-n^2 + r'^2 - krz')f_{\vartheta n} = 0.$$

Für $f_{\psi n} = r \cdot f_{\varphi n}$ bekommt man aus (14) die Differentialgleichung:

$$(14') \qquad -z'rf''_{\psi n} - r'krf'_{\psi n} + k(1 - n^2)f_{\psi n} = 0.$$

3. *Bestimmung der Coefficienten.* Bei der Bestimmung der Coefficienten ist ausser von den soeben aufgestellten Differentialgleichungen Gebrauch zu machen von den für die Zone und ihren Rand geltenden Relationen (5′), 6′), (5″) und (5‴). (§ 3, 1).

Hieraus ergiebt sich

a) *Die trigonometrischen Reihen brechen mit den Gliedern erster Ordnung ab.*

Aus der Gleichung (14′) folgt nämlich, dass keiner der Coefficienten $f_{\psi n}(n \geqq 2)$ längs eines Meridianes im Inneren der der Flächenzone ein positives Maximum oder ein negatives Minimum haben kann: Für ein positives Maximum wäre $k(1 - n^2)f_{\psi n}$ negativ, $f'_{\psi n}$ gleich Null, $-z'r$ positiv, also $f''_{\psi n}$ positiv, was unmöglich ist; eine analoge Betrachtung zeigt, dass ein negatives Minimum ausgeschlossen ist.

Ferner: Setzt man in (12′) $z' = 0$, so erkennt man, dass $f_{\vartheta n}(n \geqq 2)$ am Rande der Zone den Wert Null hat, und die beiden letzten Gleichungen (17) lehren dann, dass am Rande auch $f_{\psi n} = rf_{\varphi n}$ $(n \geqq 2)$ verschwindet.

Alle diese Functionen verschwinden also an den beiden Enden des Meridians, sie haben ferner weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum, d. h. sie müssen überhaupt verschwinden.

Hieraus folgt dann unter Anwendung der Gleichungen (17), dass auch die Grössen a_{un}, b_{un}, $a_{\vartheta n}$, $b_{\vartheta n}(n \geqq 2)$ sämmtlich den Werth Null haben, d. h. dass die trigonometrischen Reihen mit Gliedern erster Ordnung abbrechen, w. z. b. w.

b) Die Coefficienten der *Glieder erster Ordnung* kann man leicht direct durch Integration bestimmen.

Aus (14') wird für $n = 1$:

$$-z' \cdot r \cdot f''_{\psi 1} - r' k r f'_{\psi 1} = 0,$$

wovon die allgemeine Lösung lautet

$$f_{\psi 1} = c_1 z + c_2.$$

Es wird also:

$$a_{\psi 1} = b - \alpha \cdot z,$$

$$b_{\psi 1} = -a - \beta z,$$

wo α, β, a und b Constanten sind.

Mit Hülfe der Gleichungen 17, in denen $n = 1$ zu setzen ist, bekommt man weiter:

$$a_{\vartheta 1} = (r'z - z'r)\beta + r'a,$$

$$b_{\vartheta 1} = -(r'z - z'r)\alpha + r'b,$$

$$a_{u1} = -(z'z + r'r)\beta - z'a,$$

$$b_{u1} = (z'z + r'r)\alpha - z'b.$$

c) Für die *Glieder nullter Ordnung* bekommt man direct durch Integration von (16):

$$a_\varphi = \gamma,$$

$$a_\vartheta = c \cdot z',$$

$$a_u = c \cdot r'.$$

unter γ und c Constanten verstanden.

§ 5. Folgerung.

Stellt man die gefundenen Werthe zusammen, so ergeben sich die Reihenentwickelungen:

$$\Theta = r'(z(\beta \cos\varphi - \alpha \sin\varphi) + a \cos\varphi + b \sin\varphi) + z'(r(\alpha \sin\varphi - \beta \cos\varphi) + c),$$

(18) $$U = -z'(z(\beta \cos\varphi - \alpha \sin\varphi) + a \cos\varphi + b \sin\varphi) + r'(r(\alpha \sin\varphi - \beta \cos\varphi) + c),$$

$$r\Phi = \gamma r - z(\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi) - a \sin\varphi + b \cos\varphi,$$

welche mit (4^{IV}) übereinstimmen.

Hieraus folgt dann (§ 3, 1) und (§ 2, 5): *Die beiden Zonen sind einander congruent*, d. h. eine Zone mit den in § 1, 2 genannten Eigenschaften gestattet ausser den Bewegungen keine anderen regulären Verbiegungen.

Inhalt.

		Seite
§ 1.	Einleitung (hierzu Fig. 1, *a*—*c*)	215—217
§ 2.	Reguläre (endliche) Verbiegungen und infinitesimale Verbiegungen . . . . 1. Reguläre endliche Verbiegungen. — 2. Die Bewegung als reguläre Verbiegung. — 3. Die infinitesimalen Verbiegungen. — 4. Infinitesimale und endliche Verbiegungen. — 5. Die Congruenz der Flächenstücke F_0 und F_1.	217—225
§ 3.	Die infinitesimale Bewegung der Zone . . . . 1. Einführung eines neuen Coordinatensystems (hierzu Fig. 2). — 2. Die infinitesimale Verbiegung der Zone. — 3. Die infinitesimale Bewegung der Zone (hierzu Fig. 3).	225—229
§ 4.	Die infinitesimale Verbiegung der Zone . . . 1. Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen für Θ, Φ und $r\Phi$. — 2. Einführung von trigonometrischen Reihen. — 3. Bestimmung der Coefficienten.	229—233
§ 5.	Folgerung	233—234

Druckfertig erklärt 29. VI. 1901.]

A. Mayer: *Zur Theorie der gleitenden Reibung.*

Die folgenden Untersuchungen, zu denen ich durch die trefflichen *„Leçons sur le frottement“* von Paul Painlevé (Paris 1895, lithographirt) angeregt wurde, beschäftigen sich ausschliesslich nur mit solchen Problemen, in denen die Reibung immer nur an einem einzigen Punkte wirkt. Unter dieser Beschränkung bezwecken sie vor allem eine wesentliche Frage in der Theorie der gleitenden Reibung bei Zugrundelegung der Coulomb'schen Reibungsgesetze zu erledigen, die eigenthümlicher Weise bisher noch gar nicht gestellt worden ist, damit aber zugleich namentlich die Bewegung eines starren Körpers auf rauher Unterlage so vollständig zu discutiren, als dies überhaupt möglich ist, ohne die Formen des Körpers und seiner Unterlage und die bewegenden Kräfte zu specialisiren.

Die aus den Coulomb'schen Experimenten gezogenen Gesetze der gleitenden Reibung zerfallen in drei verschiedene Sätze, *die Gesetze der Reibung während der Bewegung, der Reibung in Ruhe und der Reibung bei entstehender Bewegung (frottement dynamique, frottement au repos und frottement au départ)*, von denen allerdings die beiden letzten meistens in einen Satz zusammengezogen werden, wie sie denn auch bei den Anwendungen immer gleichzeitig ins Auge gefasst werden müssen.

Von diesen drei Gesetzen ist aber, immer unter der angegebenen Beschränkung, nur das *mittelste*, das Gesetz der Reibung in Ruhe, ganz klar und einwurfsfrei, insofern es die Bewegung des Körpers oder Systems, so lange sie ihm gehorcht, stets durchaus eindeutig bestimmt. Auf die sonderbaren Folgerungen, zu denen das *erste* Gesetz führt, sooft der normale Widerstand der rauhen Unterlage gegen den Körper von der Reibung abhängig ist und zugleich der Reibungscoefficient hinlänglich gross angenommen wird, hat Painlevé schon in den *„Leçons“* und noch ausführlicher in einer Note *„Sur le frottement de glissement“*

(Comptes rendus CXXI p. 112—115) aufmerksam gemacht. Diese Absonderlichkeiten zeigen sich darin, dass in den genannten Fällen jedes gegebene System von geometrisch möglichen Anfangsgeschwindigkeiten entweder dem Körper zwei verschiedene Bewegungen frei lässt, oder aber sich selbst als dynamisch unmöglich erweist. Dagegen hat noch Niemand bemerkt, dass das *dritte* Gesetz, und zwar wohlbemerkt eben auch schon bei der Beschränkung auf bloss Einen Angriffspunkt der Reibung, noch in ganz anderer Art gewichtige Bedenken erregen kann, indem a priori eigentlich alles dafür zu sprechen scheint, dass es auf thatsächliche Widersprüche führen müsse.[1])

Dies wird sich am Besten an einem Beispiele klar machen lassen; ich wähle hierzu die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes, der, etwa als unendlich kleiner Ring, auf einer festen Curve vom Reibungscoefficienten f gleitet und von einer gegebenen bewegenden Kraft getrieben wird, die ausser von der Lage des Punktes auch noch von der Zeit t selbst abhängen kann. In diesem Falle sagt das Gesetz der Reibung bei entstehender Bewegung zunächst aus:

A) In einem Momente $t = t_0$, in welchem der Punkt keine Geschwindigkeit besitzt, sei R_0 die Reibung, welche den Punkt auf seiner Curve in Ruhe erhalten, und N_0 der Normalwiderstand, den der ruhende Punkt von der Curve erfahren würde. Sooft dann die Ungleichung besteht

a) $$R_0 - fN_0 > 0,$$

in der f, der Reibungscoefficient, eine gegebene positive Constante ist, setzt sich der Punkt im Moment t_0 sicher in Bewegung und R_0 und N_0 können nicht die wirklichen augenblicklichen Stärken der Reibung und des Normalwiderstandes sein. —

Die Werthe von R_0 und N_0 findet man nun und zwar stets eindeutig, indem man am Punkte neben seiner gegebenen

1) Allerdings sagt Painlevé in jener Note p. 114: *„Quant au cas du frottement au repos (ou au départ), il conduit à des résultats plus singuliers encore.“* Er erläutert aber diese Bemerkung nur an dem Beispiel eines schweren homogenen Kreiscylinders, der mit seiner Basis ruhend auf eine schiefe Ebene gestellt und hier sich selbst überlassen wird, und dies Beispiel gehört nicht hierher, weil bei ihm ja zunächst Reibung längs einer ganzen endlichen Fläche ins Spiel kommt, und ein einziger Berührungspunkt nur dann sich einstellt, wenn der Cylinder um einen Punkt seines Basisrandes in Schwankungen geräth.

bewegenden Kraft noch eine zweite Kraft von unbekannter Stärke R_0 und unbekanntem Sinne längs der Tangente der festen Curve wirken lässt, und hierauf in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichgewichtsbedingungen des Punktes auf der Curve (für den Moment t_0 und die augenblickliche Lage des Punktes) ansetzt. Und das lässt sich in beabsichtigter Umständlichkeit auch so aussprechen: Nach Anbringung der Kraft R_0 bildet man die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes auf der Curve in seinen rechtwinkligen Coordinaten und berechnet daraus die absolute Beschleunigung σ des Punktes im Moment t_0, worauf R_0 und N_0 sich eindeutig aus der Forderung $\sigma = 0$ bestimmen.

Sooft sich nun hierbei die Ungleichung a) als erfüllt herausstellt, können im Momente t_0 nach dem Satze A) Reibung und Normalwiderstand nicht wirklich die gefundenen Stärken R_0 und N_0 besitzen. Sie müssten dieselben aber besitzen, wenn $\sigma = 0$ wäre. Im Falle a) kann also σ nicht Null sein und der Punkt muss im Momente t_0 nothwendig eine von 0 verschiedene Anfangsbeschleunigung σ erhalten.

Dies festgestellt fährt nun das dritte Gesetz also weiter fort:

B) Im Falle a) wirkt im Anfangsmoment t_0 der entstehenden Bewegung die am Punkte wirklich thätige Reibung der Anfangsbeschleunigung σ des Punktes direct entgegen mit der Stärke:

$$R = fN,$$

wo N die gleichzeitige Stärke des Normalwiderstandes der Curve bezeichnet.

Auf Grund dieses zweiten Theiles des Gesetzes berechnet sich die absolute Beschleunigung σ, mit der sich der Punkt im Momente t_0 in Bewegung setzt, zugleich mit ihrem Sinne und der Anfangsstärke N des Normalwiderstandes aus denselben Differentialgleichungen, wie vorhin, nachdem man darin nur die unbekannte Kraft R_0 durch die der Beschleunigung σ direct entgegenwirkende Kraft $R = fN$ ersetzt hat. Sollte sich nun aber auf diese Weise für die positive Unbekannte σ nicht ein gleichfalls positiver Werth ergeben, so würde dies lehren, dass der Punkt eben keine Anfangsbeschleunigung besitzen kann. Die Forderung:

b) $$\sigma > 0$$

muss also nothwendig eine blosse Folge der Voraussetzung a) sein. Denn könnte aus dieser Voraussetzung jemals $\sigma \leqq 0$ folgen,

so würde der Punkt einerseits wegen der Annahme a) nach der aus A) gezogenen Folgerung eine wirkliche Anfangsbeschleunigung besitzen müssen, und andererseits würde er nach B) eine solche doch wieder nicht besitzen können; es würde also ein unlösbarer Widerspruch zwischen den beiden Theilen des dritten Reibungsgesetzes zu Tage treten, und das Gesetz selbst könnte unmöglich richtig sein.

Nun fällt allerdings gerade in dem betrachteten Beispiele dieser Widerspruch schliesslich von selbst wieder weg, weil hier die Forderung b) noch geradezu mit der Bedingung a) identisch ist. Aber dies directe Zusammenfallen der beiden Beziehungen tritt nur ein, solange der Punkt einzeln ist. Sobald er dagegen einem Systeme discreter materieller Punkte angehört, und also neben seiner gegebenen bewegenden Kraft noch die vom Zusammenhange mit dem System herrührenden Verbindungskräfte auf ihn einwirken, erhält man die Bedingung $\sigma > 0$ zunächst immer unter einer solchen Form, die irgendwelche Beziehung zu der Voraussetzung a) von vorn herein ganz und gar nicht erkennen lässt.

Und ganz analog liegt die Sache auch bei der Bewegung eines starren Körpers auf rauher Unterlage. Nur in den allereinfachsten Fällen, wie z. B. bei der schweren homogenen Kugel auf fester Horizontalebene, kommt wegen der sofort erkenntlichen Uebereinstimmung beider Bedingungen die Möglichkeit eines Widerspruches gar nicht richtig zum Vorschein. Im Allgemeinen aber berechnet sich diejenige Grösse, die hier an die Stelle der absoluten Anfangsbeschleunigung σ tritt, selbst erst aus einer algebraischen Gleichung zweiten oder vierten Grades, und dem Gesetze der Reibung bei entstehender Bewegung zu Folge müsste diese Gleichung also in dem Falle, der der Voraussetzung a) entspricht, nothwendig stets wenigstens eine positive Wurzel zulassen.

Ist dies nun wirklich der Fall, lässt sich also zeigen, dass zwischen diesen beiden äusserlich ganz von einander verschiedenen Bedingungen in Wirklichkeit doch ein solcher innerer Zusammenhang besteht, wie ihn das dritte Reibungsgesetz verlangt? Das war die Grundfrage, die mich zu meinen Untersuchungen veranlasste, und sie liefern für die betrachteten Gattungen von Reibungsproblemen den Nachweis, dass in der That die Frage wenigstens in dem der Voraussetzung a) entsprechenden Hauptfalle unbedingt bejaht werden kann.

Daneben erledigen sie aber noch eine zweite Frage, die Aufgabe nämlich, immer unter der Voraussetzung bloss einpunktiger Berührung, *alle diejenigen Körper zu bestimmen, für welche der Normalwiderstand ihrer rauhen Unterlage, oder der Normaldruck, den sie auf diese ausüben, unabhängig von der Reibung ist.*

Dieser besondere Fall, der das Gesetz der Reibung während der Bewegung von den oben angegebenen Absonderlichkeiten ganz befreit, bewirkt überhaupt in den Reibungsproblemen immer beträchtliche Vereinfachungen, deren Einfluss schliesslich sich auch bei dem dritten Reibungsgesetz selbst offenbaren wird.

Was endlich die ganze Anlage meiner Arbeit betrifft, so schien es mir vor allem weit richtiger, die Reibungsgesetze nicht als blosse experimentelle Daten an die Spitze zu stellen, sondern sie erst bei der Betrachtung des einzelnen materiellen Punktes je nach Bedarf heranzuziehen, wobei zugleich klarer zum Bewusstsein kommt, was das einzelne Gesetz leistet und wie sie sich gegenseitig ergänzen. Den breitesten Raum nimmt natürlich die Bewegung eines starren Körpers auf rauher Fläche ein. Für einen einzigen § ist dieses Problem zu vielseitig und zu umfangreich. Aus diesem Grunde habe ich die Arbeit in zwei Abschnitte getheilt, denen ich in § 1 einige einfache rein analytische Hilfsbetrachtungen vorausschicke, weil ihre Resultate in den ganzen folgenden Betrachtungen fast bei jedem Schritte gebraucht werden. Von den beiden Abschnitten ist der zweite ausschliesslich dem Körper im Raume gewidmet, während der erste den einzelnen materiellen Punkt und die Reibungsgesetze, das einfache Pendel, dessen Aufhängungspunkt auf fester rauher Curve gleitet, und die Bewegung einer Scheibe in ihrer eigenen Ebene auf einer solchen Curve behandelt.

Dass diese letzte Aufgabe eine besondere Behandlung erfahren hat, brachte allerdings den Uebelstand mit sich, dass ein ganzer Theil der hier gemachten Schlüsse mit sehr geringen Modificationen im zweiten Abschnitte nochmals wiederholt werden musste. Aber einmal liegen bei der ebenen Bewegung die Verhältnisse soviel einfacher als beim Körper im Raum, dass dieselbe als eine nicht ganz überflüssige Vorbereitung auf diesen angesehen werden kann, und dann war mir das Scheibenproblem auch deshalb besonders wichtig, weil es zeigt, dass in der Ebene das dritte Reibungsgesetz die entstehende Gleitungsbewegung im All-

gemeinen sogar vollkommen eindeutig bestimmt, was mir für den Körper im Raume nachzuweisen nicht gelungen ist und bei ihm überhaupt noch einigermaassen fraglich erscheint. Dafür ist überdies sowohl beim einzelnen Punkte, wie beim Körper im Raume gleich der allgemeine Fall behandelt worden, wo die reibende Unterlage selbst eine gegebene Zwangsbewegung besitzt, weil dies der ruhenden Unterlage gegenüber die Untersuchung in keinem irgend wesentlichen Punkte erschwert. —

In der ganzen Arbeit handelt es sich niemals um die wirkliche Integration der Bewegungsgleichungen. Die für den Körper im Raume angewandten Differentialgleichungen sind sogar selbst in den allereinfachsten Fällen zur Integration höchst ungeeignet. Die ganze Fragestellung schliesst meiner Ansicht nach aber eben von selbst ein Beziehen der Körperbewegung auf andere Axen als die Schwerpunktshauptaxen von vornherein aus, während man in den wenigen Fällen, wo die Bestimmung der Gleitungsbewegung, ja selbst nur des Rollens geglückt ist, dies gerade immer dadurch erreicht hat, dass man die Bewegung auf im Körper selbst bewegliche Axen bezog.

Auf die Darstellung habe ich überall die grösste Sorgfalt verwandt, trotzdem ist es doch recht wohl möglich, dass man die Arbeit von kleineren Unklarheiten und vielleicht selbst auch Unrichtigkeiten nicht ganz frei erfinden wird; dagegen hoffe ich, dass irgend wesentlichere Versehen nirgends werden unterlaufen sein.

§ 1.

Allgemeine analytische Vorbemerkungen.

Im Folgenden wird fortwährend von den Formeln Gebrauch zu machen sein, die die Werthe der Richtungscosinus der Geschwindigkeit eines Punktes unmittelbar nach einem solchen Momente, in welchem diese Geschwindigkeit, ohne dauernd zu verschwinden, gerade gleich Null ist, durch die Differentialquotienten der rechtwinkligen Geschwindigkeitscomponenten ausdrücken, und sowohl der Klarheit als auch des kürzeren Ausdrucks wegen werden wir ab und zu auch die entsprechenden Formeln für die Differentialquotienten der Geschwindigkeit selbst benutzen. Es wird daher gut sein, uns diese im Grunde allerdings selbstverständlichen Formeln von vornherein zurecht zu legen.

Zu dem Ende seien Θ_1, Θ_2, Θ_3 drei solche reelle reguläre Functionen der reellen Variabeln t, die mit ihren 1., 2., $\cdots$, $(\varkappa - 1)$-ten Differentialquotienten zusammen an der Stelle $t = t_0$ verschwinden, während ihre $\varkappa$-ten Differentialquotienten hier nicht mehr sämmtlich Null werden. Dann ist für $i = 1, 2, 3$:

$$\Theta_i \equiv \frac{(t - t_0)^\varkappa}{\varkappa!} p_i$$

und hierin, wenn wir allgemein mit $\Theta_{i0}^\varkappa$ den Werth des $\varkappa$-ten Differentialquotienten der Function Θ_i für $t = t_0$ bezeichnen:

$$p_i \equiv \Theta_{i0}^\varkappa + (t - t_0) q_i.$$

Setzen wir daher ein für allemal fest, dass jede Quadratwurzel, der nicht das — Zeichen vorgeschrieben ist, positiv genommen werden soll, so ergiebt sich aus der Definition

$$\Theta \equiv \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2};$$

jedenfalls solange $t > t_0$ bleibt:

$$\Theta \equiv \frac{(t - t_0)^\varkappa}{\varkappa!} \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

und damit unter derselben Voraussetzung:

$$\frac{\Theta_i}{\Theta} \equiv \frac{p_i}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},$$

sowie für $\lambda \leqq \varkappa$:

$$\frac{d^\lambda \Theta}{dt^\lambda} \equiv \frac{\varkappa(\varkappa - 1)\cdots(\varkappa - \lambda + 1)}{\varkappa!} (t - t_0)^{\varkappa - \lambda} \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2} + (t - t_0)^{\varkappa - \lambda + 1} \sigma_\lambda.$$

Verstehen wir daher unter:

$$\operatorname*{Lim}_{t = t_0} F(t)$$

immer die Grenze, der sich die Function $F(t)$ nähert, wenn die Variable t *abnehmend* dem Werthe t_0 zustrebt, definiren also:

$$\operatorname*{Lim}_{t = t_0} F(t) \equiv \operatorname*{Lim}_{\Delta t = 0} F(t + \Delta t), \quad \Delta t > 0,$$

und beachten, dass p_i für $t = t_0$ den Werth $\Theta_{i0}^\varkappa$ annimmt, so erhalten wir sofort die Formeln:

$$\operatorname*{Lim}_{t = t_0} \frac{\Theta_i}{\Theta} = \frac{\Theta_{i0}^\varkappa}{\sqrt{(\Theta_{10}^\varkappa)^2 + (\Theta_{20}^\varkappa)^2 + (\Theta_{30}^\varkappa)^2}},$$

$$\lim_{t=t_0} \frac{d^\lambda \Theta}{dt^\lambda} = 0 \quad \text{für } \lambda < \varkappa, \text{ und}$$

$$\lim_{t=t_0} \frac{d^\varkappa \Theta}{dt^\varkappa} = \sqrt{(\Theta_{10}^\varkappa)^2 + (\Theta_{20}^\varkappa)^2 + (\Theta_{30}^\varkappa)^2}. \text{ —}$$

Bedeuten nun w_x, w_y, w_z die rechtwinkligen Componenten irgend einer Geschwindigkeit w, so sind w_x, w_y, w_z reguläre Functionen der Zeit, und

$$w \equiv \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

kann nur verschwinden, wenn diese Functionen gleichzeitig verschwinden.

Wir brauchen daher in den letzten Formeln nur w_x, w_y, w_z, w für Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ zu setzen, um sofort den folgenden Satz zu erhalten, in welchem ich die Fälle $\varkappa = 1$ und $\varkappa > 1$ gesondert aufführe, weil in den Anwendungen der erste Fall immer als der Hauptfall, der zweite nur als besonderer Ausnahmefall erscheint:

Es seien, bezogen auf irgend drei feste, oder auch in Bewegung begriffene rechtwinklige Axen, w_x, w_y, w_z die Componenten der relativen Geschwindigkeit w eines bewegten Punktes gegen diese Axen.

Wird dann diese Geschwindigkeit im Moment $t = t_0$ Null, so nähern sich, wenn man denselben als die untere Grenze des Zeitintervalles $t = t_0$ bis $t = t_0 + \Delta t > t_0$ auffasst, und nun Δt gegen die Null convergiren lässt, ihr Differentialquotient $\frac{dw}{dt}$ und ihre Richtungscosinus $\frac{w_x}{w}$, $\frac{w_y}{w}$, $\frac{w_z}{w}$ den Grenzen:

$$w_1 \equiv \sqrt{w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2},$$

und

$$\frac{w_x'}{w_1}, \ \frac{w_y'}{w_1}, \ \frac{w_z'}{w_1},$$

sooft im Momente t_0 mit w_x, w_y, w_z nicht zugleich auch ihre ersten Differentialquotienten w_x', w_y', w_z' verschwinden; dagegen nähern sich:

$$\frac{dw}{dt}, \ \ldots, \ \frac{d^{\varkappa-1} w}{dt^{\varkappa-1}}, \ \frac{d^\varkappa w}{dt^\varkappa},$$

und:

$$\frac{w_x}{w}, \ \frac{w_y}{w}, \ \frac{w_z}{w}$$

respective den Grenzen:

$$O, \cdots, O, \; w_\varkappa \equiv \sqrt{\left(w_x^{(\varkappa)}\right)^2 + \left(w_y^{(\varkappa)}\right)^2 + \left(w_z^{(\varkappa)}\right)^2},$$

und:

$$\frac{w_x^{(\varkappa)}}{w_\varkappa}, \; \frac{w_y^{(\varkappa)}}{w_\varkappa}, \; \frac{w_z^{(\varkappa)}}{w_\varkappa},$$

wenn die $\varkappa$-ten Differentialquotienten $w_x^{(\varkappa)}$, $w_y^{(\varkappa)}$, $w_z^{(\varkappa)}$ die ersten sind, die in diesem Momente nicht mehr sämmtlich verschwinden, wobei selbstverständlich alle diese Grenzen auf den Moment $t = t_0$ zu beziehen sind.

Ich werde mir erlauben, dies Resultat im Folgenden in der abgekürzten Fassung anzuwenden:

Unmittelbar nach einem Momente, oder auch kurzweg in einem Momente $t = t_0$, in welchem die Geschwindigkeit $w = 0$ ist, wird zugleich, so oft nicht auch die ersten Differentialquotienten ihrer rechtwinkligen Componenten w_x, w_y, w_z sämmtlich verschwinden:

$$\frac{dw}{dt} = w_1 \equiv \sqrt{w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2},$$

$$\frac{w_x}{w} = \frac{w_x'}{w_1}, \quad \frac{w_y}{w} = \frac{w_y'}{w_1}, \quad \frac{w_z}{w} = \frac{w_z'}{w_1},$$

dagegen, wenn erst die $\varkappa$-ten Differentialquotienten $w_x^{(\varkappa)}$, $w_y^{(\varkappa)}$, $w_z^{(\varkappa)}$ dieser Componenten im Momente t_0 nicht mehr sämmtlich Null werden:

$$\frac{dw}{dt} = 0, \cdots, \frac{d^{\varkappa-1}w}{dt^{\varkappa-1}} = 0, \; \frac{d^\varkappa w}{dt^\varkappa} = w_k \equiv \sqrt{\left(w_x^{(\varkappa)}\right)^2 + \left(w_y^{(\varkappa)}\right)^2 + \left(w_z^{(\varkappa)}\right)^2},$$

$$\frac{w_x}{w} = \frac{w_x^{(\varkappa)}}{w_\varkappa}, \quad \frac{w_y}{w_\varkappa} = \frac{w_y^{(\varkappa)}}{w_\varkappa}, \quad \frac{w_z}{w_\varkappa} = \frac{w_z^{(\varkappa)}}{w_\varkappa}.$$

I.

Der einzelne Punkt und die Reibungsgesetze. Ebene Bewegungen.

§ 2.

Der einzelne materielle Punkt auf starrer Curve oder Fläche und die Reibungsgesetze.

Ein rechtwinkliges Axensystem $Ox_1x_2x_3$, auf das in diesem Paragraphen alles bezogen werden soll, bewege sich in bekannter Weise im Raum, und es seien P_1, P_2, P_3 die Componenten seiner

Winkelgeschwindigkeit, und σ_1, σ_2, σ_3 die Componenten der absoluten Beschleunigung seines Anfangspunktes O im Momente t, sodass also P_1, P_2, P_3 und σ_1, σ_2, σ_3 bekannte Functionen der Zeit t, und im Besondern Null sind, wenn das Axensystem ruht. Deutet man dann die Differentiation nach t durch Accente an und führt die Abkürzungen ein:

$$(1)\quad \begin{cases} Q_1 = P_2 x_3 - P_3 x_2\,, \quad Q_2 = P_3 x_1 - P_1 x_3\,, \quad Q_3 \equiv P_1 x_2 - P_2 x_1\,, \\ 2\,Q_0 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 - 2(\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3)\,, \end{cases}$$

so hat bekanntlich[1]) der effective Theil T_1 der absoluten lebendigen Kraft eines materiellen Punktes m von der Masse 1 und den Coordinaten x_1, x_2, x_3, der sich irgendwie im Raume bewegt, d. h. derjenige Theil seiner ganzen lebendigen Kraft T, der kein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit ist, den Werth:

$$(2)\qquad T_1 \equiv Q_0 + Q_1 x_1' + Q_2 x_2' + Q_3 x_3' + \tfrac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)\,,$$

und zugleich sind die Differentialquotienten x_1', x_2', x_3' der Coordinaten des Punktes die Componenten seiner *relativen Geschwindigkeit* gegen das Axensystem. Befindet sich dieses in Ruhe, so wird einfach:

$$2\,T \equiv 2\,T_1 \equiv x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Im Allgemeinen dagegen hängt T_1 nicht bloss von den Coordinaten des Punktes und ihren ersten Differentialquotienten, sondern ausserdem auch noch von der Zeit t selbst ab. In besonderen Fällen kann jedoch T_1, auch wenn das Axensystem nicht im Raume fest steht, frei von t werden. Rotirt dasselbe z. B. nur mit constanter Winkelgeschwindigkeit ϖ um eine feste, durch den Anfangspunkt O gehende Axe, und nimmt man diese Axe zur x_3-Axe, so erhält man:

$$2\,T \equiv 2\,T_1 \equiv \varpi^2(x_1^2 + x_2^2) + 2\,\varpi(x_1 x_2' - x_2 x_1') + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2. —$$

Dies vorausgeschickt sei nun der Punkt m gezwungen, auf einer mit dem Axensystem fest verbundenen starren Curve oder Fläche zu bleiben, und bewege sich auf dieser unter dem Einfluss einer gegebenen Kraft und der Reibung, die er von seiner Unterlage erfährt.

Fassen wir also speciell den Fall der Curve ins Auge, so sind den Coordinaten des Punktes die beiden Gleichungen der Curve:

$$(3)\qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \quad \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

1) Vgl. z. B. Carl Neumann, diese Berichte 1899, p. 393.

als Bedingungsgleichungen vorgeschrieben. Will man die Bewegung des Punktes auf starrer Fläche untersuchen, so braucht man in allem Folgenden nur einfach $\varphi_1 \equiv 0$ zu nehmen. Es wird daher, auch ohne diesen Fall erst noch besonders zu behandeln, wohl gestattet sein, die Resultate gleich allgemein für eine beliebige starre Unterlage auszusprechen.

Von der *Reibung* setze ich zunächst nichts weiter voraus, *als dass sie stets tangential zur reibenden Unterlage wirkt,* und nenne R_1, R_2, R_3 ihre Componenten, dagegen X_1, X_2, X_3 die Componenten der gegebenen bewegenden Kraft des Punktes.

In Folge der vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (3) werden dann die Differentialgleichungen der relativen Bewegung des Punktes gegen das zu Grunde gelegte Axensystem:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial x_i'} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = X_i + R_i + \lambda\varphi' x_i + \lambda_1 \varphi_1' x_i, \quad i=1,2,3.$$

Nach (2) aber ist:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial x_i'} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} \equiv \frac{d}{dt}(x_i' + Q_i) - \frac{\partial Q_0}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}x_1' - \frac{\partial Q_2}{\partial x_i}x_2' - \frac{\partial Q_3}{\partial x_i}x_3'$$

$$\equiv x_i'' + \frac{\partial Q_i}{\partial t} - \frac{\partial Q_0}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}\right)x_1' + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_i}\right)x_2' + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_i}\right)x_3',$$

und nach (1) hat man:

$$\frac{\partial Q_3}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} \equiv 2P_1, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \equiv 2P_2, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} \equiv 2P_3.$$

Führt man also die Abkürzungen ein:

$$(4) \qquad \Pi_i \equiv \frac{\partial Q_0}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial t} + X_i + \lambda\varphi' x_i + \lambda_1\varphi_1' x_i,$$

so stellen sich, ausführlich hingeschrieben, diese Differentialgleichungen also dar:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1'' + 2(P_2 x_3' - P_3 x_2') = \Pi_1 + R_1, \\ x_2'' + 2(P_3 x_1' - P_1 x_3') = \Pi_2 + R_2, \\ x_3'' + 2(P_1 x_2' - P_2 x_1') = \Pi_3 + R_3, \end{cases}$$

worin, beiläufig bemerkt, die linken Seiten nichts anderes sind als die Componenten der relativen Beschleunigung des Punktes gegen das Axensystem, oder also gegen seine starre Unterlage.

Die gegebenen Kraftcomponenten X_1, X_2, X_3 setze ich im Folgenden als blosse Functionen von x_1, x_2, x_3 und t voraus.

Nach Voraussetzung wirkt nun die Reibung stets tangential zur Unterlage, ihre Componenten sind also den beiden Bedingungen unterworfen:

$$(6)\qquad \begin{cases} R_1\varphi' x_1 + R_2\varphi' x_2 + R_3\varphi' x_3 = 0, \\ R_1\varphi_1' x_1 + R_2\varphi_1' x_2 + R_3\varphi_1' x_3 = 0. \end{cases}$$

Ueberdies ergiebt die zweimalige Differentiation der Bedingungsgleichungen (3) für die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten des Punktes die beiden Bedingungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1''\varphi' x_1 + x_2''\varphi' x_2 + x_3''\varphi' x_3 + \Phi = 0, \\ x_1''\varphi_1' x_1 + x_2''\varphi_1' x_2 + x_3''\varphi_1' x_3 + \Phi_1 = 0, \end{cases}$$

in denen die von den zweiten Differentialquotienten der Coordinaten freien Gliedersummen Φ und Φ_1 in Bezug auf die ersten Differentialquotienten x_1', x_2', x_3' ganze homogene Functionen zweiten Grades sind.

Durch Substitution der aus (5) folgenden Werte von x_1'', x_2'', x_3'' in die beiden letzten Bedingungen erhält man für die Multiplikatoren λ und λ_1 zwei lineare Gleichungen, aus denen sich in Folge der Bedingungen (6) die Reibungscoefficienten R_1, R_2, R_3 von selbst wegheben, und die also λ und λ_1 nicht nur eindeutig, sondern auch unabhängig von der Reibung bestimmen. Mit λ und λ_1 ist dann zugleich auch *die absolute Stärke des normalen Widerstandes*:

$$(8)\quad N=\sqrt{(\lambda\varphi' x_1+\lambda_1\varphi_1' x_1)^2+(\lambda\varphi' x_2+\lambda_1\varphi_1' x_2)^2+(\lambda\varphi' x_3+\lambda_1\varphi_1' x_3)^2},$$

den die Unterlage dem Punkte entgegensetzt, *eindeutig und unabhängig von der Reibung bestimmt,* und zwar als die Quadratwurzel aus einer Function von x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3', die im Allgemeinen auch die Zeit t selbst enthält, und in Bezug auf x_1', x_2', x_3' eine ganze Function vierten Grades ist. Sind im Besondern aber X_1, X_2, X_3 und T_1 frei von t, so tritt die Zeit auch in den Werthen von λ, λ_1 und N explicite nicht auf.

Die relative Geschwindigkeit des Punktes gegen das Axensystem, oder also gegen seine starre Unterlage hat die Grösse

$$w \equiv \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2},$$

und ist in Folge der Gleichungen:

$$x_1'\varphi' x_1 + x_2'\varphi' x_2 + x_3'\varphi' x_3 = 0$$
$$x_1'\varphi_1' x_1 + x_2'\varphi_1' x_2 + x_3'\varphi_1' x_3 = 0,$$

die sich durch einmalige Differentiation aus den Bedingungsgleichungen (3) ergeben, stets tangential zur Unterlage gerichtet.

Wir führen nun als *zweite Hypothese* über die Reibung die folgende ein (Gesetz der Reibung während der Bewegung):

Solange $w > 0$ bleibt, hat die Reibung stets die gerade entgegengesetzte Richtung dieser relativen Geschwindigkeit, und die Stärke:

$$R = fN,$$

wo f, der Reibungscoefficient, eine von der Rauhheit der Unterlage abhängige positive Constante ist.

Hiernach besitzen, solange $w > 0$ bleibt, die Reibungscomponenten die Werthe:

$$(9) \qquad R_1 = -fN\frac{x_1'}{w}, \quad R_2 = -fN\frac{x_2'}{w}, \quad R_3 = -fN\frac{x_3'}{w},$$

in denen N durch (8) gegeben ist. Setzt man diese Werthe zugleich mit den vorher gefundenen Werthen von λ und λ_1 in die Gleichungen (5) ein, so verwandeln sich diese Gleichungen in drei Differentialgleichungen 2. O. zwischen x_1, x_2, x_3 und t, von denen in Folge der Bestimmungsart der Multiplicatoren die Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0 \text{ und } \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

vier particuläre Integrale sind. Die Integration dieser drei Differentialgleichungen unter Berücksichtigung dieser vorgeschriebenen vier particulären Integrale bestimmt diejenige Bewegung, die der Punkt auf seiner Unterlage ausführt, solange seine relative Geschwindigkeit gegen die letztere nicht verschwindet.

Als *dritte Hypothese* über die Natur der Reibung füge ich weiter die Annahme hinzu, *dass, abgesehen natürlich von solchen endlichen Zeitintervallen, in denen der Punkt etwa in relativer Ruhe auf seiner Unterlage bleiben sollte, die so erhaltenen Differentialgleichungen* (5) *überhaupt immer Gültigkeit behalten.*

Sehen wir zu, was sich aus diesen Hypothesen über das Verhalten des Punktes unmittelbar nach einem solchen Momente $t = t_0$ folgern lässt, *in welchem seine relative Geschwindigkeit w gerade* $= 0$ *ist!*

In einem Momente t_0, wo w und also auch x_1', x_2', x_3' verschwinden, wird auch

$$\Phi \equiv 0 \text{ und } \Phi_1 \equiv 0.$$

Anstatt daher die augenblicklichen Werthe der Multiplicatoren λ und λ_1 unmittelbar durch die Substitutionen $x_1' = x_2' = x_3' = 0$ aus den früher erhaltenen allgemeinen Werthen von λ und λ_1 abzuleiten, kann man dieselben nach (5), (6), (7) auch direct aus den beiden Gleichungen berechnen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Pi_1 \varphi' x_1 + \Pi_2 \varphi' x_2 + \Pi_3 \varphi' x_3 = 0\,, \\ \Pi_1 \varphi_1' x_1 + \Pi_2 \varphi_1' x_2 + \Pi_3 \varphi_1' x_3 = 0\,, \end{cases}$$

worauf dann (8) die augenblickliche Stärke des normalen Widerstandes liefert.

Nun sind zwei und nur zwei Fälle möglich. *Entweder werden im Momente t_0 mit den ersten zugleich auch die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten des Punktes* $= 0$, *oder diese letzteren,* die nunmehr geradezu die Componenten der augenblicklichen relativen Beschleunigung des Punktes sind, *verschwinden nicht sämmtlich.* Im letzteren Falle bleibt der Punkt sicher nicht in relativer Ruhe auf seiner Unterlage, sondern setzt sich auf ihr in Bewegung.

Diesen Fall wollen wir zunächst untersuchen, und nehmen also an, dass für $t = t_0$ nicht auch

$$w_1 = \sqrt{x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2}$$

$= 0$ werde.

Nach § 1 haben dann unmittelbar nach dem Momente t_0 die Richtungscosinus

$$\frac{x_1'}{w}, \ \frac{x_2'}{w}, \ \frac{x_3'}{w}$$

der relativen Geschwindigkeit w die Werthe erhalten:

$$\frac{x_1''}{w_1}, \ \frac{x_2''}{w_1}, \ \frac{x_3''}{w_1}.$$

Aus (5) und (9) ergeben sich daher für die Werthe von x_1'', x_2'', x_3'', mit denen der Punkt im Momente t_0 auf seiner Unterlage zu gleiten beginnt, die Gleichungen:

$$(11) \qquad \begin{cases} (w_1 + fN)\dfrac{x_1''}{w_1} = \Pi_1\,, \\ (w_1 + fN)\dfrac{x_2''}{w_1} = \Pi_2\,, \\ (w_1 + fN)\dfrac{x_3''}{w_1} = \Pi_3. \end{cases}$$

Nun ist $w_1 + fN$ eine wesentlich positive Grösse. Durch quadriren und addiren der drei Gleichungen erhält man also sofort:

$$w_1 + fN = \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2}.$$

Nach unsrer Voraussetzung soll aber auch w_1 selbst > 0 sein, also verlangt dieselbe nothwendig:

$$w_1 = \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2} - fN > 0.$$

Wird diese Ungleichung im Momente t_0 durch die Werthe, welche die Coordinaten des Punktes in diesem Momente besitzen, wirklich erfüllt, so bestimmen zugleich die Gleichungen (11) die Anfangswerthe von x_1'', x_2'', x_3'' eindeutig durch diese Coordinaten.

Sooft dagegen im Momente t_0

$$\Delta \equiv \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2} - fN \leqq 0$$

ist, war unsere Voraussetzung falsch, und mit der relativen Geschwindigkeit w des Punktes muss nothwendig auch seine relative Beschleunigung w_1 in diesem Momente verschwinden.

Damit ist aber noch nicht gesagt, dass der Punkt dann auch nothwendig stets zu relativer Ruhe auf seiner Unterlage gelangen müsse. Denn es bleibt immerhin noch die Möglichkeit, dass im Momente t_0 für irgend ein $\varkappa > 1$ die 1., 2., ... $(\varkappa - 1)$-ten Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten x_1', x_2', x_3' sämmtlich verschwinden, ohne dass doch die $\varkappa$-ten Differentialquotienten alle drei gleichzeitig $= 0$ werden.

Nach § 1 erhalten dann aber unmittelbar nach dem betrachteten Momente die Brüche:

$$\frac{x_i'}{w} \text{ die Werthe } \frac{x_i^{(\varkappa+1)}}{w_\varkappa}, \text{ wo}$$

$$w_\varkappa \equiv \sqrt{\left(x_1^{(\varkappa+1)}\right)^2 + \left(x_2^{(\varkappa+1)}\right)^2 + \left(x_3^{(\varkappa+1)}\right)^2};$$

aus (5) und (9) ergeben sich daher für die Werthe der $(\varkappa + 1)$-ten Differentialquotienten der Coordinaten unmittelbar nach diesem Momente die Formeln:

$$(12) \qquad fN\frac{x_1^{(\varkappa+1)}}{w_\varkappa} = \Pi_1, \qquad fN\frac{x_2^{(\varkappa+1)}}{w_\varkappa} = \Pi_2, \qquad fN\frac{x_3^{(\varkappa+1)}}{w_\varkappa} = \Pi_3,$$

und aus diesen wieder folgt:

$$fN = \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2}.$$

Dieser Fall, dass in einem Momente t_0, in welchem mit der relativen Geschwindigkeit zugleich auch die relative Beschleunigung des Punktes verschwindet, der Punkt doch nicht wirklich zur relativer Ruhe gelangt, kann demnach nur eintreten, wenn augenblicklich auch die Differenz $\varDelta$ verschwindet.

Unsere bisherigen drei Hypothesen führen uns also zu dem Resultate:

A. Es sei $\varDelta$ diejenige Function von x_1, x_2, x_3 und t, die man aus der Formel:

$$(13) \qquad \varDelta = \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2} - fN$$

erhält, nachdem man aus den Werthen (4) und (8) von Π_1, Π_2, Π_3 und N die Multiplicatoren λ und λ_1 mittelst der Gleichungen (10) eliminirt hat, und $\varDelta_0$ der Werth, den diese Function in einem solchen Momente $t = t_0$ besitzt, in welchem die relative Geschwindigkeit w des Punktes gegen seine Unterlage gerade $= 0$ ist. Soll dann nicht zugleich auch die relative Beschleunigung w_1 des Punktes verschwinden, so muss nothwendig:

$$\varDelta_0 > 0$$

sein. Dagegen kommt der Punkt auf seiner Unterlage sicher zu relativer Ruhe, so oft

$$\varDelta_0 < 0$$

ist. Im Grenzfalle endlich:

$$\varDelta_0 = 0$$

kann je nach Umständen sowohl relative Ruhe als auch relative Bewegung eintreten.

In dem besonderen Falle ferner, wo die Differenz $\varDelta$, sei es nun für jedes x_1, x_2, x_3, oder auch nur für die bestimmten Werthe, welche diese Coordinaten im betrachteten Momente t_0 besitzen, frei von t ist, (also vorausgesetzt, dass auch die gegebene bewegende Kraft des Punktes nur von x_1, x_2, x_3 abhängt, z. B. wenn die Unterlage fest ist, oder auch nur gleichförmig um eine feste Axe rotirt), behält dieselbe bei unverändertem x_1, x_2, x_3 dauernd den Werth $\varDelta_0$, den sie in diesem Momente besass. Daher bleibt in diesem Falle der Punkt beständig in relativer Ruhe, wenn $\varDelta_0 < 0$, und ebenso auch, wenn $\varDelta_0 = 0$ war. Hängt dagegen $\varDelta$ auch von t selbst ab, so können wir im Falle $\varDelta_0 < 0$ vorläufig nur behaupten, dass die eingetretene relative Ruhe jedenfalls so lange anhalten wird, als bei constantem x_1, x_2, x_3 und wachsendem t eben $\varDelta$ noch < 0 bleibt.

Denn unsre bisherigen Voraussetzungen lehren noch nicht, dass umgekehrt im Falle $\Delta_0 > 0$ nothwendig relative Bewegung eintreten muss, oder, was auf dasselbe zurückkommt, dass relative Ruhe immer nur im Falle $\Delta_0 \leqq 0$ eintreten kann. Fügen wir nunmehr aber diese Umkehrung unsres Resultates A. als *vierte und letzte Hypothese* hinzu, so vervollständigt dieses sich unmittelbar zu dem Satze:

B. Ist in einem Momente $t = t_0$ die relative Geschwindigkeit w des Punktes gegen seine Unterlage gerade $= 0$, so fängt der Punkt in diesem Momente stets, und zwar mit einer von Null verschiedenen relativen Beschleunigung w_1 auf seiner Unterlage zu gleiten an, wenn $\Delta_0 > 0$ ist, dagegen bleibt er im Falle $\Delta_0 < 0$ sicher dauernd oder doch wenigstens eine Zeit lang auf ihr in relativer Ruhe. Nur der Grenzfall $\Delta_0 = 0$ erfordert erst noch eine besondere Untersuchung darüber, ob das eine oder andere eintritt.

Dieser Grenzfall ist aber bereits erledigt worden, sooft er in der besonderen Weise auftritt, dass bei constanten Werthen der Coordinaten Δ beständig Null bleibt; wir sahen, es tritt dann sicher relative Ruhe ein. Und wenn wir von dieser Art seines Eintretens absehen, so lehrt der Satz selbst:

Im Grenzfalle $\Delta_0 = 0$ tritt relative Ruhe oder relative Bewegung ein, je nachdem die Differenz Δ, nachdem man in ihr den Coordinaten x_1, x_2, x_3 die Werthe gegeben hat, die der Lage des Punktes im Momente t_0 entsprechen, während t wachsend der Werth t_0 passirt, durch Null ins Negative oder aber ins Positive übergeht, jenachdem also ihr erster für $t = t_0$ nicht verschwindender partieller Differentialquotient nach der Zeit an dieser Stelle negativ oder positiv wird.

Man sieht nun auch, dass die den Formeln (12) zu Grunde liegende Voraussetzung nur dann zutrifft, wenn im Momente t_0 bei constantem x_1, x_2, x_3 die Differenz Δ gerade durch Null ins Positive übergeht, und erkennt zugleich leicht, wie man die dort auftretende ganze Zahl $\varkappa$, oder nach § 1, wie man in diesem Falle den ersten für $t = t_0$ nicht mehr verschwindenden Differentialquotienten der relativen Geschwindigkeit w bestimmen kann.

Hat man nämlich λ und λ_1 und damit nach (8) auch N aus den Gleichungen (5) und (7) bestimmt und hierauf den Reibungscomponenten die Werthe (9) beigelegt, so gelten die so

erhaltenen Gleichungen (5) — ich will sie die Gleichungen (5′) nennen — nach dem vorhergehenden und nach unsrer dritten Hypothese auch dann noch, wenn t einen solchen Werth t_0 passirt, für den w verschwindet und $\varDelta$ bei unverändertem x_1, x_2, x_3 durch Null ins Positive übergeht.

In einem solchen Momente t_0 verschwindet nun nach A. nicht bloss die relative Geschwindigkeit w selbst, sondern auch ihr erster Differentialquotient w_1, und es frägt sich daher zunächst, ob der zweite Differentialquotient:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = w_2 = \sqrt{(x_1''')^2 + (x_2''')^2 + x_3''')^2}$$

ebenfalls noch verschwindet, oder nicht.

Zu dem Ende differentiire ich die Gleichungen (5′) und wende die erhaltenen Gleichungen dann auf den Moment t_0 an, in welchem mit x_1', x_2', x_3' zugleich auch x_1'', x_2'', x_3'' verschwinden.

In den Gleichungen (5′) sind Π_1, Π_2, Π_3, N Functionen von t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3', die für $x_1' = x_2' = x_3' = 0$ sich auf die in (11), (12), (13) auftretenden, gleichbezeichneten Functionen von t, x_1, x_2, x_3 reduciren. Im Momente t_0 gehen daher die vollständigen Differentialquotienten von Π_1, Π_2, Π_3, N über in die partiellen Differentialquotienten der letzteren Functionen nach t, und die vollständigen Ableitungen der Gleichungen (5′) reduciren sich auf:

$$x_i''' = \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} - f\frac{\partial N}{\partial t}\frac{x_i'}{w} - fN\frac{d}{dt}\frac{x_i'}{w}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Verschwindet nun augenblicklich nicht auch w_2, so ist hierin nach § 1

$$\frac{x_i'}{w} = \frac{x_i'''}{w_2}$$

und zugleich nach (12)

$$x_i''' = \frac{\Pi_i}{fN}w_2. \tag{14}$$

Daher erhält man alsdann zugleich auch:

$$\frac{x_i'}{w} = \frac{\Pi_i}{fN} \tag{15}$$

und kann die letzte Gleichung so schreiben:

$$\frac{\Pi_i}{fN}w_2 + fN\frac{d}{dt}\frac{x_i'}{w} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial t} - f\frac{\partial N}{\partial t}\frac{\Pi_i}{fN} \tag{16}$$

Ferner geht die aus:

$$\sum_1^3 {}_i \frac{x_i'^2}{w^2} \equiv 1$$

hervorgehende Relation:

$$\sum_1^3 {}_i \frac{x_i'}{w} \frac{d}{dt} \frac{x_i'}{w} \equiv 0$$

im angenommenen Falle für $t = t_0$ nach (15) über in:

$$\sum_1^3 {}_i \Pi_i \frac{d}{dt} \frac{x_i'}{w} = 0,$$

und daher folgt aus den 3 Gleichungen (16):

$$\frac{w_2}{fN} \sum_1^3 {}_i \Pi_i^2 = \sum_1^3 {}_i \Pi_i \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} - f \frac{\partial N}{\partial t} \frac{\Pi_i}{fN} \right).$$

Im betrachteten Momente t_0 ist endlich aber auch:

$$\varDelta \equiv \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2} - fN = 0,$$

also kann man die letzte Gleichung so schreiben:

$$w_2 = \frac{\Pi_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial t} + \Pi_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial t} + \Pi_3 \frac{\partial \Pi_3}{\partial t}}{\sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2}} - f \frac{\partial N}{\partial t},$$

d. h. im Momente t_0 wird:

(17) $$w_2 = \frac{\partial \varDelta}{\partial t},$$

womit nach (14) auch die augenblicklichen Werthe von x_1''', x_2''', x_3''' eindeutig bestimmt sind.

Nun ist $\frac{\partial \varDelta}{\partial t}$ für $t = t_0$ nothwendig $\geqq 0$, weil ja nach Voraussetzung $\varDelta$ bei constantem x_1, x_2, x_3 in diesem Momente durch Null ins Positive übergeht, es ergiebt sich also das sehr einfache Resultat:

Im betrachteten Momente verschwindet mit w und $\frac{dw}{dt}$ gleichzeitig auch $\frac{d^2w}{dt^2}$, oder nicht, jenachdem augenblicklich:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial t} = 0, \quad \text{oder} \quad > 0 \text{ ist.}$$

In letzterem Falle ist die Untersuchung beendigt, im ersten geht man ganz so weiter und findet, dass der dritte Differentialquotient

$$\frac{d^3 w}{dt^3} = w_3 = \sqrt{(x_1^{IV})^2 + (x_2^{IV})^2 + (x_3^{IV})^2}$$

dann und nur dann der erste ist, der für $t = t_0$ nicht mehr verschwindet, wenn augenblicklich:

$$\varDelta = 0, \qquad \frac{\partial \varDelta}{\partial t} = 0, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial t^2} > 0$$

ist. U. s. f., wobei zugleich die Anfangswerthe der ersten augenblicklich nicht mehr sämmtlich verschwindenden Differentialquotienten der Coordinaten sich immer eindeutig bestimmen. —

Was sagen nun aber unsre drei letzten Hypothesen über die Reibung selbst aus?

Zunächst geht aus der Ableitung unseres Resultates A. ohne Weiteres hervor, dass man die zweite und dritte Hypothese auch zusammenfassen kann in die Eine (Gesetz der Reibung während und beim Entstehen der Bewegung):

I. *Sooft der Punkt auf seiner Unterlage wirklich gleitet oder auch nur eben erst zu gleiten beginnt, besitzt die Reibung stets die gerade entgegengesetzte Richtung der relativen Geschwindigkeit, welche der Punkt augenblicklich gegen die Unterlage besitzt, resp. augenblicklich zu erhalten im Begriff steht, und die Stärke* $R = fN$.

Sollen ferner im Momente $t = t_0$ mit x_1', x_2', x_3' zugleich auch x_1'', x_2'', $x_3'' = 0$ werden, so müssen nach den allgemeinen Gleichungen (5) in diesem Momente die Reibungscomponenten die Werthe:

$$R_1 = -\Pi_1, \qquad R_2 = -\Pi_2, \qquad R_3 = -\Pi_3,$$

die Reibung selbst also die Stärke:

$$R = \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2}$$

besitzen, und wegen der Bedingungen (6) bestimmen sich hierin die Multiplicatoren λ und λ_1 wiederum aus den Gleichungen (10). Π_1, Π_2, Π_3 und N erhalten also, wenn wir sie uns bei unbestimmtem t, x_1, x_2, x_3 berechnet denken, genau dieselben Werthe, die sie auch in der Differenz (13) besitzen.

Behielte vom Momente t_0 an die Reibung diese Stärke und Richtung bei, so würden auch x_1'', x_2'', x_3'' den augenblicklichen

Werth Null beibehalten, und der Punkt also von diesem Momente an in relativer Ruhe gegen seine Unterlage bleiben.

Wenn wir daher der bessern Unterscheidung wegen noch Reibung und Normalwiderstand im Zustande der relativen Ruhe durch R_0 und N_0 bezeichnen, so können wir schliesslich unsern Satz B. selbst also aussprechen (Gesetz der Reibung in Ruhe und bei entstehender Bewegung):

II. *Bezeichnet* R_0 *die Stärke, welche die Reibung besitzen müsste, um den Punkt auf seiner Unterlage in relativer Ruhe zu erhalten, und* N_0 *die gleichzeitige Stärke des Normalwiderstands der Unterlage, so tritt von einem solchen Momente* $t = t_0$ *ab, in welchem die relative Geschwindigkeit des Punktes gegen seine Unterlage gleich Null ist, relative Ruhe oder relative Bewegung des Punktes auf dieser ein, jenachdem in diesem Momente die Differenz:*

$$\varDelta \equiv R_0 - fN_0 < 0 \quad \textit{oder} \quad > 0 \textit{ ist,}$$

während je nach Umständen sowohl das eine wie das andere eintreten kann, wenn augenblicklich auch $\varDelta$ *gerade* $= 0$ *ist.*

Und da nach I. im Falle des Gleitens die Reibung stets die Stärke $R = fN$ besitzt, so kann man noch hinzufügen:

III. *Die Stärke* R *der wirklich thätigen Reibung kann in keinem Momente grösser werden als das Product aus dem Reibungscoefficienten in die augenblickliche Stärke des Normalwiderstands der reibenden Unterlage.* —

Die so gewonnenen Reibungsgesetze legen wir nun auch in den Fällen zu Grunde, in denen der materielle Punkt, der Reibung erfährt, nicht mehr einzeln ist, sondern einem System discreter materieller Punkte angehört, und übertragen dieselben schliesslich unter der Voraussetzung, dass immer nur einpunktige Berührung stattfindet, auf die Bewegung eines starren Körpers auf rauher Unterlage.

Ich habe bei ihrer Wiedergabe den Umstand ausser Acht gelassen, dass den Beobachtungen zu Folge der Reibungscoefficient f einen etwas grösseren Werth f_1 besitzt, wenn der Punkt sich auf seiner Unterlage eben erst in Bewegung setzt, als wenn er sich bereits auf ihr bewegt. Dieses Beobachtungsresultat hat aber auf die angeführten Gesetze auch nur den ganz unwesentlichen Einfluss, dass, um ihm Rechnung zu tragen, in den Sätzen II. und III. dem Reibungscoefficienten f derselbe grössere Werth f_1

beizulegen wäre, den man auch im Satze I. für den Beginn der Bewegung anzuwenden hätte. Ich werde daher diese Unterscheidung zwischen der statischen und der dynamischen Reibung auch im Folgenden ausser Acht lassen.

Will man die Reibungsgesetze nun aber übertragen auf starre Körper, so muss man sie nothwendig ein wenig modificiren. Denn wenn wir von dem Falle absehen, wo der Körper mit einer Spitze auf der Unterlage gleitet, so bleibt der Punkt, mit dem der Körper die letztere berührt, der Körperpunkt also, an welchem die Reibung wirkt, im Allgemeinen nicht beständig derselbe Punkt der Körperoberfläche. An Stelle der beiden früheren Gegensätze von relativer Ruhe und relativer Bewegung treten daher hier die beiden Fragen, *ob die (stets tangentiale) relative Geschwindigkeit desjenigen Punktes, mit dem der Körper die Unterlage gerade berührt, grösser als Null oder gleich Null bleibt,* d. h. dem hergebrachten Sprachgebrauche gemäss ausgedrückt, ob der Körper auf seiner Unterlage *gleitet,* oder ob er, ohne zu gleiten, auf ihr nur *rollt.* In dem besonderen Falle, wo der Berührungspunkt (ohne ein singulärer Punkt der Körperoberfläche zu sein) im Körper fest bleibt, reducirt sich die relative Bewegung des Körpers gegen die Unterlage auf eine Drehung um die Berührungsnormale, deren Fusspunkt auf der Unterlage gleitet oder auf ihr in Ruhe bleibt.

Für den Körper auf rauher Unterlage hat man hiernach an Stelle der Sätze I. und II. die beiden folgenden adoptirt, die ich wiederum gleich für den Fall ausspreche, wo die Unterlage nicht ruht, sondern selbst in Bewegung begriffen ist:

IV. *Solange der Körper auf seiner Unterlage gleitet und ebenso auch, wenn er eben nur erst zu gleiten beginnt, wirkt stets die Reibung an demjenigen Körperpunkte, der gerade die Unterlage berührt, der relativen Geschwindigkeit direct entgegen, die dieser Punkt gerade besitzt, oder doch gerade zu erhalten im Begriff steht, und mit der Stärke*

$$R = fN,$$

wo N die absolute Stärke des augenblicklichen Normalwiderstands der Unterlage gegen den Körper, und der Reibungscoefficient f[1]*) eine positive Constante ist.*

---

1) (solange wenigtens jede der beiden sich berührenden Flächen überall denselben Grad von Rauhigkeit besitzt.)

V. *Es sei R_0 die Stärke, welche die Reibung besitzen müsste, um den Körper im Rollen zu erhalten, und N_0 die gleichzeitige Stärke des Normalwiderstands. Von einem Augenblick $t = to$ an, in welchem die relative Geschwindigkeit w des gerade berührenden Körperpunktes gegen die Unterlage Null ist, bleibt dann diese Geschwindigkeit Null oder wird positiv, tritt also Rollen oder Gleiten ein, je nachdem in diesem Momente die Differenz:*

$$\Delta \equiv R_0 - fN_0 < 0 \text{ oder } > 0 \text{ ist,}$$

während, wenn dieselbe augenblicklich ebenfalls verschwindet, je nach Umständen ebensowohl Rollen als auch Gleiten eintreten kann.

§ 3.

Einfaches Pendel, dessen Aufhängungspunkt auf fester rauher Curve gleitet.

Während ohne Reibung die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung, die Bestimmung der Drucke u. s. w. für Systeme discreter materieller Punkte weit weniger Umstände macht als für continuirliche Körper, verhält es sich eigenthümlicher Weise gerade umgekehrt, wenn Reibung zu berücksichtigen ist. Dann werden meiner Erfahrung nach die ersteren viel schwieriger zu behandeln als die letzteren, was möglicher Weise allerdings davon herrühren mag, dass ich bei ihnen noch nicht auf die richtige Lösungsmethode gekommen bin. Das Beispiel, zu dem ich jetzt übergehe, ist das einzige, oder wenigstens das einzige von einigermaassen grösserem Interesse, in welchem es mir gelungen ist, die Untersuchung so weit zu führen, als ich wünschte, und selbst bei ihm wird man durch Vergleichung mit der späteren Behandlung der ebenen und der räumlichen Bewegung eines Körpers auf rauher Unterlage leicht erkennen, dass die Discussion doch noch nicht ganz so befriedigend ist, wie dort.

Es handelt sich in diesem § um die Bewegung zweier schweren Punkte von den Massen m und m_1 in einer Verticalebene unter den Voraussetzungen, dass beide Punkte durch eine starre, massenlose Gerade verbunden sind, und dass überdies der erste gezwungen ist, auf einer festen Curve vom Reibungscoefficienten f zu bleiben.

Ich nehme die Verticalebene, auf welche die Bewegung beschränkt sein soll, zur xy-Ebene, lasse die $+y$-Axe vertical

nach unten gehen und nenne x, y und x_1, y_1 die Coordinaten der beiden Punkte. Die feste Curve, welche dem Punkte m vorgeschrieben ist, sei gegeben durch ihre Gleichungen in einem willkürlichen Parameter q:

$$(1) \qquad x = \bar{x}(q), \; y = \bar{y}(q),$$

und die starre Verbindung der beiden Punkte werde durch die beiden Gleichungen wiedergegeben:

$$(2) \qquad x_1 - x = l\cos\Theta, \; y_1 - y = l\sin\Theta,$$

sodass q und Θ die beiden unabhängigen Bestimmungsstücke des betrachteten Punktsystems werden.

Führt man noch durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dq} = \varpi\cos\varphi, \; \dfrac{d\bar{y}}{dq} = \varpi\sin\varphi, \\ \varpi = \sqrt{\left(\dfrac{d\bar{x}}{dq}\right)^2 + \left(\dfrac{d\bar{y}}{dq}\right)^2} \end{cases}$$

den Winkel φ ein, den die Tangente der festen Curve mit der x-Axe bildet, so ergiebt die Differentiation der Gleichungen (1) nach der Zeit t:

$$(4) \qquad x' = \varpi q'\cos\varphi, \; y' = \varpi q'\sin\varphi,$$

und damit für die absolute Geschwindigkeit

$$v \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

des Punktes m den Werth:

$$(5) \qquad v = \varepsilon_1 \varpi q', \; \varepsilon_1 = \pm 1, \; \varepsilon_1 q' > 0.$$

Nach (4) und (2) unterliegen die Geschwindigkeiten der beiden Punkte den beiden Bedingungen:

$$x'\sin\varphi - y'\cos\varphi = 0,$$
$$(x_1' - x')\cos\Theta + (y_1' - y')\sin\Theta = 0,$$

deren Differentiation nach t für die Beschleunigungen von m und m_1 die beiden Bedingungen liefert:

$$(6) \qquad \begin{cases} x''\sin\varphi - y''\cos\varphi + \varpi\dfrac{d\varphi}{dq}q'^2 = 0, \\ (x_1'' - x'')\cos\Theta + (y_1'' - y'')\sin\Theta + l\Theta'^2 = 0. \end{cases}$$

Die Reibung ferner, die der Punkt m von der festen Curve erfährt, wirkt stets längs der Tangente dieser Curve; bezeichnet

man also die positive oder negative Stärke der Reibung durch R, so haben ihre Componenten R_x und R_y die Werthe:

(7) $$R_x = -R\cos\varphi,\ R_y = -R\sin\varphi,$$

wo das —Zeichen nur der Bequemlichkeit halber eingeführt worden ist.

Wegen der Bedingungsgleichungen (6) werden daher in den rechtwinkligen Coordinaten x, y und x_1, y_1 der beiden Punkte die Differentialgleichungen ihrer Bewegung:

(8) $$\begin{cases} mx'' = -R\cos\varphi + \lambda\sin\varphi - \mu\cos\Theta, \\ my'' = -R\sin\varphi - \lambda\cos\varphi - \mu\sin\Theta + mg, \end{cases}$$

(9) $$\begin{cases} m_1 x_1'' = \mu\cos\Theta, \\ m_1 y_1'' = \mu\sin\Theta + m_1 g. \end{cases}$$

Substituirt man die hieraus folgenden Werthe der Beschleunigungen in die Bedingungsgleichungen (6), und setzt:

(10) $$\Theta - \varphi \equiv \psi,$$

sodass ψ der Winkel wird, den die Gerade $\overline{mm_1}$ oder die Pendelstange mit der Tangente der festen Curve bildet, so erhält man für die Multiplicatoren λ und μ die beiden Gleichungen:

(11) $$\begin{cases} \lambda + \mu\sin\psi = m\left(g\cos\varphi - \varpi\dfrac{d\varphi}{dq}q'^2\right), \\ R\cos\psi + \lambda\sin\psi + \mu\left(1 + \dfrac{m}{m_1}\right) = -ml\Theta'^2. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Pendels in seinen unabhängigen Bestimmungsstücken q und Θ gewinnt man rascher als durch Anwendung der Lagrange'schen Differentialgleichungen, indem man direct die aus (4) und (2) folgenden Werthe der Beschleunigungen, ausgedrückt in den Variabeln q, Θ und deren Differentialquotienten, in die Gleichungen (8) und (9) substituirt, und dann einmal die beiden Gleichungen von (8) und (9) mit

$$\cos\varphi \text{ und } \sin\varphi$$

multiplicirt und hierauf alle 4 Gleichungen addirt, das andere Mal die Gleichungen (9) allein mit

$$-\frac{\sin\Theta}{m_1} \text{ und } \frac{\cos\Theta}{m_1}$$

multiplicirt und wiederum addirt. Hierdurch ergeben sich sofort die beiden von λ und μ freien Gleichungen:

$$(12)\begin{cases}(m+m_1)\left(\varpi q''+\frac{d\varpi}{dq}q'^2\right)-m_1 l(\Theta''\sin\psi+\Theta'^2\cos\psi)\\ \qquad =-R+(m+m_1)g\sin\varphi,\\ -\sin\psi\left(\varpi q''+\frac{d\varpi}{dq}q'^2\right)+\varpi\frac{d\varphi}{dq}q'^2\cos\psi+l\Theta''=g\cos\Theta.\end{cases}$$

Auf dieselbe Weise folgt noch, wenn man nur die beiden Gleichungen (8) mit $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ multiplicirt und addirt, die Gleichung:

$$(13)\qquad m\left(\varpi q''+\frac{d\varpi}{dq}q'^2\right)=-R-\mu\cos\psi+mg\sin\varphi,$$

die uns später nützlich sein wird.

Um aber die Differentialgleichungen zu haben, welche q und Θ als Functionen der Zeit t definiren, müssen wir in den Gleichungen (12) erst noch den Werth von R bestimmen.

Nach (8) hat nun der absolute Normalwiderstand der festen Curve den Werth:

$$N=\varepsilon_2\lambda,\ \varepsilon_2=\pm 1,\ \varepsilon_2\lambda>0,$$

und nach (4) und (5) sind die Richtungscosinus der Geschwindigkeit von m:

$$\frac{x'}{v}=\varepsilon_1\cos\varphi,\ \frac{y'}{v}=\varepsilon_1\sin\varphi,\ \varepsilon_1=\pm 1,\ \varepsilon_1 q'>0.$$

Solange diese Geschwindigkeit oder q' nicht verschwindet, wirkt nach dem Satze I die Reibung mit der Stärke fN dieser Geschwindigkeit direct entgegen. Nach den Werthen (7) der Reibungscomponenten ist daher ebensolange

$$R=fN\varepsilon_1=f\varepsilon_1\varepsilon_2\lambda,$$

worin $\varepsilon_1\varepsilon_2=\pm 1$ und $\varepsilon_1\varepsilon_2\lambda q'>0$ sein muss. Setzt man also $\varepsilon_1\varepsilon_2\equiv\varepsilon$, so erhält man einfach:

$$(14)\qquad R=\varepsilon f\lambda$$

mit $\varepsilon=\pm 1$ und der Bedingung $\varepsilon\lambda q'>0$.

Hierdurch wird die zweite Gleichung (11):

$$\lambda(\sin\psi+\varepsilon f\cos\psi)+\mu\left(1+\frac{m}{m_1}\right)=-ml\Theta'^2,$$

und man erhält daher aus den beiden Gleichungen (11):

$$(15)\begin{cases} D\lambda = \quad m\left\{\left(1+\frac{m}{m_1}\right)\left(g\cos\varphi - \varpi\frac{d\varphi}{dq}q'^2\right) + l\Theta'^2\sin\psi\right\}, \\ D\mu = -m\left\{(\sin\psi + \varepsilon f\cos\psi)\left(g\cos\varphi - \varpi\frac{d\varphi}{dq}q'^2\right) + l\Theta'^2\right\}, \\ D \equiv \frac{m}{m_1} + \cos^2\psi - \varepsilon f\cos\psi\sin\psi, \end{cases}$$

womit nach (14) bis auf das Zeichen ε auch R eindeutig bestimmt ist.

Deutet man aber durch den untern Index o die Substitution $t = 0$ an, so ist dies Zeichen aus der Bedingung zu bestimmen, dass für die gegebenen Anfangswerthe von q, Θ, q', Θ':

$$(16) \qquad \varepsilon\lambda_0 q_0' > 0$$

werden muss. Bestimmt diese Forderung wirklich das Zeichen ε, so gelten mit diesem Zeichen und dem damit vollständig bestimmten Werthe (14) von R die Gleichungen (12) für die Bewegung unsres Pendels, solange q' das Zeichen seines gegebenen Anfangswerthes q_0' bewahrt.

Nach (15) hat nun λ die Form:

$$(17)\begin{cases} \lambda = \frac{\gamma}{\alpha - \varepsilon\beta}, \\ \alpha \equiv \frac{m}{m_1} + \cos^2\psi, \quad \beta \equiv f\cos\psi\sin\psi. \end{cases}$$

Damit also die Forderung

$$\varepsilon\lambda q' > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda q'}{\varepsilon} > 0$$

das Zeichen ε wirklich bestimme, muss

$$\frac{-\gamma q'}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\gamma q'}{\alpha-\beta} \equiv \frac{\gamma^2 q'^2}{\beta^2-\alpha^2} < 0, \text{ also } \alpha^2 > \beta^2, \text{ oder:}$$

$$\frac{\frac{m}{m_1} + \cos^2\psi}{\cos\psi\sin\psi} \equiv F(\psi)$$

gesetzt:

$$(18) \qquad (F(\psi))^2 > f^2$$

sein. Die Werthe von ψ aber, für welche die Function $F(\psi)$ einen grössten oder kleinsten Werth erreicht, bestimmen sich aus der Gleichung:

$$F'\psi \equiv \frac{\frac{m}{m_1} - \left(1+\frac{2m}{m_1}\right)\cos^2\psi}{\cos^2\psi\sin^2\psi} = 0,$$

und diese ergibt:

$$\cos^2\psi = \frac{\frac{m}{m_1}}{1+\frac{2m}{m_1}}, \quad \sin^2\psi = \frac{1+\frac{m}{m_1}}{1+\frac{2m}{m_1}},$$

wodurch:

$$F''(\psi) = \frac{2\left(1+\frac{2m}{m_1}\right)}{\cos\psi\sin\psi},$$

also positiv oder negativ wird, jenachdem man das Product $\cos\psi\sin\psi > 0$ oder < 0 nimmt. Für die durch die beiden vorhergehenden Gleichungen bestimmten Werthe von ψ erreicht hiernach $F(\psi)$ ein positives Minimum und ein gleich grosses negatives Maximum. Diese Werthe machen folglich das Quadrat der Function zu einem Minimum, und der kleinste Werth, den dasselbe anzunehmen vermag, ist:

$$(F(\psi))^2 = \frac{4m}{m_1}\left(1+\frac{m}{m_1}\right).$$

Damit also die Bedingung (18) für jedes ψ erfüllt werde, muss:

$$(19) \qquad f < 2\sqrt{\frac{m}{m_1}\left(1+\frac{m}{m_1}\right)}$$

sein. Genügt der Reibungscoefficient dieser Ungleichung, so bestimmt die Bedingung (16) für jeden gegebenen Anfangszustand q_0, Θ_0, q_0', Θ_0' (wobei nur $q_0' \neq 0$ sein darf) das Zeichen ε und damit auch die Bewegung des Pendels, solange bei derselben q' nicht verschwindet.

Wenn dagegen:

$$f > 2\sqrt{\frac{m}{m_1}\left(1+\frac{m}{m_1}\right)}$$

ist, so gilt dies nur für solche Anfangswerthe von ψ, die der Voraussetzung (18) entsprechen. Man kann dann aber diesen Anfangswerth immer auch so wählen, dass $\alpha_0^2 < \beta_0^2$ wird, und dann erhält

$$\frac{\lambda_0 q_0'}{\varepsilon} = \frac{\gamma_0 q_0'}{\varepsilon\alpha_0 - \beta_0}$$

für $\varepsilon = +1$, wie für $\varepsilon = -1$ das Zeichen von

$$-\frac{\gamma_0 q_0'}{\beta_0}.$$

Sooft dann also:

$$\frac{\gamma_0 q_0'}{\beta_0} < 0$$

ist, wird der Bedingung (16) genügt sowohl durch $\varepsilon = +1$, als auch durch $\varepsilon = -1$; im Falle

$$\frac{\gamma_0 q_0'}{\beta_0} > 0$$

dagegen lässt diese Bedingung sich überhaupt gar nicht mehr erfüllen.

Nun hängt, wie der Vergleich von (14) und (15) zeigt, der Bruch $\frac{\gamma}{\beta}$ nur von q, Θ, q'^2 und Θ'^2 ab, und nimmt daher für

$$q = q_0, \ \Theta = \Theta_0, \ q' = q_0', \ \Theta' = \Theta_0'$$

denselben Werth an, wie für:

$$q = q_0, \ \Theta = \Theta_0, \ q' = -q_0', \ \Theta' = \pm \Theta_0',$$

sodass der Bruch $\frac{\gamma q'}{\beta}$ für das eine System von Anfangswerthen den gerade entgegengesetzten Werth erhält, wie für das andere. Von diesen beiden (oder eigentlich drei) Systemen von Anfangswerthen, die bei derselben Anfangslage der beiden Punkte und demselben absoluten Anfangswerthe der Winkelgeschwindigkeit Θ' gleichen und entgegengesetzten Anfangsgeschwindigkeiten des Aufhängungspunktes m entsprechen, lässt daher das Gesetz der Reibung während der Bewegung nur dasjenige zu, für welches

$$\frac{\gamma_0 q_0'}{\beta_0} < 0$$

ist, und ihm gehören zwei verschiedene mögliche Bewegungen ($\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$) des Punktsystems zu, während es das andere als dynamisch unmöglich erklären muss. —

Fassen wir aber nunmehr einen solchen Moment $t = t_0$ ins Auge, *in welchem die Geschwindigkeit des Punktes m, also* $q' = 0$ *ist,* wobei es ganz dahingestellt bleibe, ob die Voraussetzung (19) erfüllt ist, oder nicht!

Soll dann gleichzeitig auch seine Beschleunigung, also $x'' = y'' = q'' = 0$ *werden,* so muss der zweiten Gleichung (12) zu Folge in diesem Momente:

(20) $$l\Theta'' = g \cos \Theta$$

werden, und nach (13) und der ersten Gleichung (11) müssen die augenblicklichen Werthe R_0, λ_0, μ_0 von R, λ, μ den beiden Gleichungen genügen:

$$R_0 = mg \sin\varphi - \mu_0 \cos\psi,$$
$$\lambda_0 = mg \cos\varphi - \mu_0 \sin\psi.$$

Zugleich reducirt sich die zweite Bedingungsgleichung (6) im betrachteten Momente auf:

$$x_1'' \cos\Theta + y_1'' \sin\Theta = -l\Theta'^2$$

und liefert also nach (9)

$$\mu_0 = -m_1(g \sin\Theta + l\Theta'^2).$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält man als augenblickliche Werthe von R und λ:

$$(21)\qquad \begin{cases} R_0 = mg \sin\varphi + m_1(g \sin\Theta + l\Theta'^2)\cos\psi, \\ \lambda_0 = mg \cos\varphi + m_1(g \sin\Theta + l\Theta'^2)\sin\psi, \end{cases}$$

und damit zugleich $N_0 = [\lambda_0]$ als augenblickliche Stärke des Normalwiderstandes.

Nach Satz III kann aber die Reibung niemals $> fN$ werden. Unsre Annahme, dass mit q' zugleich $q'' = 0$ werde, erheischt also nothwendig, dass im Moment $t = t_0$:

$$(22)\qquad \varDelta \equiv R_0^2 - f^2\lambda_0^2 \leqq 0$$

sei, und nach Satz II kommt überdies der Punkt m in diesem Momente sicher zur Ruhe, sooft augenblicklich $\varDelta < 0$ ist. Es behält dann φ unverändert denselben Werth bei, den es im Momente t_0 besass, während Θ der Gleichung (20) gemäss sich mit der Zeit ändert. Die Verbindungslinie der beiden Punkte schwingt also wie ein einfaches Pendel um den ruhenden Punkt m, und diese Bewegungsart des Systems dauert an, solange die Differenz $\varDelta$ bei dieser Bewegung nicht aus dem Negativen durch 0 ins Positive übergegangen ist.

War dagegen im Momente t_0 die Differenz $\varDelta > 0$, so können augenblicklich Reibung und Normalwiderstand nicht die aus der Voraussetzung $q'' = 0$ berechneten Stärken $|R_0|$ und $|\lambda_0|$ besitzen, *und daher muss in diesem Momente eben nothwendig q'' verschieden von 0 sein,* oder m sich auf seiner festen Curve in Bewegung setzen.

Für $t = t_0$ wird nun $q' = 0$ und daher nach (4)

$$x'' = \varpi q'' \cos\varphi, \quad y'' = \varpi q'' \sin\varphi,$$

der Punkt m erhält also augenblicklich eine Beschleunigung von der Stärke:

$$v_1 \equiv \sqrt{x''^2 + y''^2} = \varepsilon_1 \varpi q'', \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_1 q'' > 0,$$

und von der Richtung:

$$\frac{x''}{v_1} = \varepsilon_1 \cos\varphi\,, \quad \frac{y''}{v_1} = \varepsilon_1 \sin\varphi.$$

Nach dem Satze I besitzt überdies die Reibung augenblicklich die gerade entgegengesetze Richtung und wieder die Stärke fN. Genau ebenso wie bei der Ableitung der Formel (14) erkennt man hieraus, dass auch im Momente t_0 wieder

$$R = \varepsilon f \lambda, \quad \varepsilon = \pm 1$$

zu nehmen ist, nur dass ε jetzt das Zeichen von $\lambda q''$ erhalten muss. Es gelten nunmehr also alle Gleichungen (8) bis (15) unverändert auch für $t = t_0$, nur hat man überall $q' = 0$ zu setzen.

Nach (14) reducirt sich hierdurch die Gleichung (13) auf:

$$(23) \qquad m\varpi q'' = mg\sin\varphi - \mu\cos\psi - \varepsilon f\lambda$$

und zugleich wird nach (15)

$$D\lambda = m\left\{\left(1 + \frac{m}{m_1}\right)g\cos\varphi + l\Theta'^2\sin\psi\right\},$$

$$D\mu = -m\{(\sin\psi + \varepsilon f\cos\psi)g\cos\varphi + l\Theta'^2\}.$$

Unter Benutzung des Werthes (15) von D und der Werthe (21) von R_0 und λ_0 ergiebt sich hieraus:

$$D\lambda = \frac{m}{m_1}(\lambda_0 + m_1 g\cos\psi\cos\Theta),$$

$$D(mg\sin\varphi - \mu\cos\psi) - fD\lambda = \frac{m}{m_1}(R_0 + \varepsilon f m_1 g\cos\psi\cos\Theta),$$

und damit:

$$\varepsilon D(mg\sin\varphi - \mu\cos\psi - \varepsilon f\lambda) = \frac{m}{m_1}(\varepsilon R_0 - f\lambda_0).$$

Hiernach folgt aus (23):

$$D^2\varpi\varepsilon\lambda q'' = \frac{m}{m_1^2}(\lambda_0 + m_1 g\cos\psi\cos\Theta)(\varepsilon R_0 - f\lambda_0),$$

und die Bedingung $\varepsilon\lambda q'' > 0$ verlangt somit:

$$(\lambda_0 + m_1 g\cos\psi\cos\Theta)(\varepsilon R_0 - f\lambda_0) > 0.$$

Nach Voraussetzung ist aber augenblicklich $\Delta > 0$, oder $[R_0] > f[\lambda_0]$, also besitzt $\varepsilon R_0 - f\lambda_0$ dasselbe Zeichen wie εR_0, und ε muss einfach das Zeichen des Productes erhalten:

$$(\lambda_0 + m_1 g\cos\psi\cos\Theta)R_0 \equiv (mg\cos\varphi + m_1(g\sin\varphi + l\Theta'^2\sin\psi))R_0.$$

Damit ist (wenn man von dem ganz besonderen Ausnahmefalle absieht, wo D oder λ im Momente t_0 gerade verschwinden sollte),

sowohl ε, als auch der Anfangswerth von q'' eindeutig bestimmt, und letzterer in der That nicht Null. Mit dem so bestimmten Zeichen von ε im Werthe (14) von R gelten jetzt also für die Bewegung des Pendels vom Momente t_0 an wieder die Gleichungen (12).

Ist endlich im Momente t_0 die Differenz $\varDelta$ gerade $= 0$, so wird man mit Hülfe der Gleichung (20) den momentanen Werth von $\frac{d\varDelta}{dt}$ bei constantem φ berechnen. Findet sich derselbe < 0, so geht $\varDelta$ eben durch Null ins Negative über und es tritt daher Ruhe des Aufhängungspunktes m ein. Dagegen setzt sich m nothwendig in Bewegung, wenn jener Werth > 0 ist. Endlich, wenn auch er wiederum $= 0$ sein sollte, so würde man mit Hülfe der Gleichung (20) das Zeichen des 2., resp. des 3., u. s. w. Differentialquotienten von $\varDelta$ bei unverändertem φ im Momente t_0 zu untersuchen haben.

Streng genommen ist hiermit allerdings dieser Grenzfall, wo q' und $\varDelta$ gleichzeitig verschwinden, noch nicht vollständig erledigt. Doch will ich mich bei diesem Beispiele nicht länger aufhalten, einmal, um nicht all zu oft ganz ähnliche Betrachtungen wiederholen zu müssen, dann aber auch namentlich deshalb, weil bei den weiterhin betrachteten Bewegungen alle Verhältnisse noch ungleich klarer und schärfer zu Tage treten, als hier.

§ 4.

Ebene Bewegung einer Scheibe (oder eines Reifens) auf fester rauher Curve.

Eine Scheibe bewege sich frei in ihrer Ebene, sodass also sowohl ihre bewegenden Kräfte als auch ihre Anfangsgeschwindigkeiten sämmtlich in der Scheibenebene liegen. Ich führe in dieser Ebene zwei gleichsinnige rechtwinklige Axensysteme ein, das eine $\Omega\xi\eta$ unbeweglich, das andere Sxy, in der Scheibe selbst fest, habe ihren Schwerpunkt S zum Anfangspunkt. Zur Zeit t besitze S die Coordinaten α und β, und die $+x$-Axe bilde mit der $+\xi$-Axe den im positiven Sinne gezählten Winkel Θ. Zwischen den Coordinaten ξ, η und x, y eines und desselben Punktes in beiden Axensystemen bestehen dann in diesem Momente die Relationen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha + x\cos\Theta - y\sin\Theta, \\ \eta = \beta + x\sin\Theta + y\cos\Theta, \end{cases}$$

und aus diesen ergeben sich, wenn man alles auf den Moment t und zugleich immer, solange nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, auf die in der Scheibe festen Axen x, y bezieht, durch Differentiation nach t für die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes ξ, η oder x, y, der sich beliebig in der Scheibenebene bewegt, die Werthe:

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi' \cos \Theta + \eta' \sin \Theta = x' + v_x, \\ -\xi' \sin \Theta + \eta' \cos \Theta = y' + v_y, \end{cases}$$

worin, unter u_x, u_y die Componenten der Geschwindigkeit des Scheibenschwerpunktes S verstanden:

$$(3)\qquad v_x \equiv u_x - y\Theta', \quad v_y \equiv u_y + x\Theta'$$

die Componenten der Geschwindigkeit v sind, welche derselbe Punkt besitzen würde, wenn er mit den Axen x, y fest verbunden wäre.

Nennt man endlich M die Masse der Scheibe, Mk^2 ihr Trägheitsmoment um den Schwerpunkt, und, nach Reduction aller gegebenen bewegenden Kräfte der Scheibe auf eine an ihrem Schwerpunkt angreifende Einzelkraft und auf eine Koppel, P_x, P_y die Componenten dieser Einzelkraft und K das Moment der Koppel, so werden bei Zugrundelegung der 5 Variabeln $\alpha, \beta, u_y, u_x, \Theta$ die Differentialgleichungen der freien ebenen Bewegung der Scheibe:

$$(4)\qquad \alpha' = u_x \cos \Theta - u_y \sin \Theta, \quad \beta' = u_x \sin \Theta + u_y \cos \Theta,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} M(u_x' - u_y\Theta') = P_x, \quad M(u_y' + u_x\Theta') = P_y, \\ Mk^2\Theta'' = K. \text{ —} \end{cases}$$

Dies vorausgeschickt soll nun die Bewegung unserer Scheibe unter der Festsetzung untersucht werden, dass sie nicht mehr fest, sondern gezwungen sei, in der $\xi\eta$-Ebene auf einer festen rauhen Curve zu bleiben, die sie aber immer nur einpunktig berühre.

Diese feste Curve sei in Bezug auf das unbewegliche Axensystem $\Omega\xi\eta$ gegeben durch die Gleichung:

$$(6)\qquad \Phi(\xi, \eta) = 0,$$

während im Axensystem Sxy die Randcurve der Scheibe die Gleichung besitze:

$$(7)\qquad F(x, y) = 0;$$

und zwar seien beide Gleichungen in einer solchen Form zu Grunde gelegt, dass die Ungleichungen:

$$\Phi > 0 \quad \text{und} \quad F > 0$$

die einander zugekehrten *äusseren* Seiten der beiden Curven charakterisiren.

Die *innere* Normale des Punktes x, y der Randcurve F besitzt dann die Richtungscosinus:

$$(8) \qquad l = -rF'x, \quad m = -rF'y; \quad r \equiv \frac{1}{\sqrt{(F'x)^2 + (F'y)^2}},$$

während in Bezug auf die Axen ξ, η die Richtungscosinus der *äussern* Normale des Punktes ξ, η der festen Curve sind:

$$\varrho\Phi'\xi, \quad \varrho\Phi'\eta; \quad \varrho \equiv \frac{1}{\sqrt{(\Phi'\xi)^2 + (\Phi'\eta)^2}}.$$

Im Berührungspunkte fallen beide Normalen zusammen. Durch Gleichsetzung ihrer Richtungscosinus gegen die Axen ξ, η ergeben sich daher zwischen den Coordinaten ξ, η und x, y des Berührungspunktes die beiden Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi'\xi = -\lambda(F'x \cdot \cos\Theta - F'y \cdot \sin\Theta), \\ \Phi'\eta = -\lambda(F'x \cdot \sin\Theta + F'y \cdot \cos\Theta), \end{cases}$$

in denen der Proportionalitätsfactor $\lambda > 0$ sein muss. Macht man in diesen Gleichungen die Substitutionen (1) und fügt die Gleichung (7) hinzu, so erhält man 3 Gleichungen zur Bestimmung der x, y-Coordinaten des Berührungspunktes und der positiven Unbekannten λ als Functionen der Variabeln α, β, Θ. Die Auflösung dieser 3 Gleichungen möge ergeben:

$$(10) \qquad x = \bar{x}(\alpha, \beta, \Theta), \quad y = \bar{y}(\alpha, \beta, \Theta), \quad \lambda = \bar{\lambda}(\alpha, \beta, \Theta).$$

Die Substitution der so erhaltenen Werthe von x und y in die Formeln (1) liefert dann sofort auch für die ξ, η-Coordinaten des Berührungspunktes Werthe von der Form:

$$(10') \qquad \xi = \bar{\xi}(\alpha, \beta, \Theta), \quad \eta = \bar{\eta}(\alpha, \beta, \Theta),$$

und indem man schliesslich die letzteren Werthe in die Gleichung (6) der festen Curve einsetzt, erhält man als Bedingung für die äussere Berührung der beiden Curven die Gleichung:

$$(11) \qquad \Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \equiv \Psi(\alpha, \beta, \Theta) = 0$$

zwischen den Variabeln α, β, Θ allein.

Ihrer Ableitung zu Folge erfüllen die Werthe (10) und (10′) identisch die Gleichungen (7) und (9). Verstehen wir also von jetzt an unter ξ, η und x, y immer gerade die Coordinaten des Berührungspunktes beider Curven, so ergiebt die Differentiation der Definitionsgleichung (11) der Function Ψ:

$$\frac{d\Psi}{dt} \equiv \xi' \Phi'\xi + \eta' \Phi'\eta \equiv -\bar{\lambda}\{F'x(\xi'\cos\Theta + \eta'\sin\Theta) + F'y(-\xi'\sin\Theta + \eta'\cos\Theta)\}.$$

Das aber lässt sich nach (2) schreiben:

$$\frac{d\Psi}{dt} \equiv -\bar{\lambda}\left\{\frac{dF(x, y)}{dt} + v_x F'x + v_y F'y\right\},$$

d. h., da für den Berührungspunkt $F(x, y) \equiv 0$ ist:

$$\frac{d\Psi}{dt} \equiv -\bar{\lambda}(v_x F'x + v_y F'y),$$

oder endlich nach (8)

$$(12) \qquad \frac{d\Psi}{dt} \equiv \frac{\bar{\lambda}}{r}(lv_x + mv_y),$$

wo jetzt natürlich v_x, v_y die Geschwindigkeitscomponenten desjenigen Punktes x, y des Scheibenrandes, mit dem dieser im Momente t die feste Curve berührt, und l, m die Richtungscosinus der innern Normale des Scheibenrandes in diesem Punkte bedeuten.

Die Berührungsbedingung (11) zieht hiernach die Bedingungsgleichung nach sich:

$$lv_x + mv_y = 0,$$

die übrigens auch an sich selbstverständlich ist; denn sie sagt ja nur aus, dass derjenige Scheibenpunkt, der gerade die feste Curve berührt, stets nur eine tangentiale Geschwindigkeit v besitzt.

Solange daher diese Geschwindigkeit $v \neq 0$ ist, *gleitet* die Scheibe nothwendig auf der festen Curve, dagegen fängt sie an, auf ihr zu *rollen*, sobald $v = 0$ wird und auch nicht bloss momentan 0 bleibt. —

Der *Widerstand* nun, den die feste Curve der Scheibe entgegensetzt, greift stets an demjenigen Punkte ihres Randes an, der gerade die feste Curve berührt, und lässt sich nach der gemeinsamen Tangente und Normale der beiden Curven zerlegen in die *tangential wirkende Reibung R* und den *normalen Widerstand N*.

Setzen wir fest, dass der normale Widerstand N *positiv* oder *negativ* genommen werden soll, jenachdem er im Sinne der *innern*, oder der *äussern* Normale des Scheibenrandes wirkt, so werden

$$Nl \text{ und } Nm$$

seine Componenten. Da andrerseits die Reibung R stets tangential wirkt, so unterliegen ihre Componenten R_x und R_y der Bedingung:

$$lR_x + mR_y = 0,$$

und besitzen daher, wenn auch die Stärke R der Reibung nicht absolut genommen wird, die Werthe

$$R_x = Rm, \quad R_y = -Rl.$$

Daraus folgt:

(13) $$R = mR_x - lR_y.$$

Denken wir uns am jeweiligen berührenden Scheibenpunkte immer die Reibung R und den normalen Widerstand N angebracht, so können wir die Scheibe als frei betrachten und daher auf ihre unfreie Bewegung längs der festen Curve die Differentialgleichungen (4) und (5) der freien ebenen Bewegung anwenden. Hierdurch erhalten wir für die zu untersuchende unfreie Bewegung der Scheibe aus (5) die 3 Differentialgleichungen:

(14) $$\begin{cases} M(u_x' - u_y\Theta') = P_x + Nl + Rm, \\ M(u_y' + u_x\Theta') = P_y + Nm - Rl, \\ Mk^2\Theta'' \qquad = K + (mx - ly)N - (lx + my)R, \end{cases}$$

während die Gleichungen (4) unverändert Geltung behalten.

In den Gleichungen (14) sind für l, m ihre Werthe (8) und für x, y überall die Coordinaten (10) des Berührungspunktes einzusetzen. Hierdurch werden x, y, l, m blosse Functionen von α, β, Θ, und dasselbe gilt auch von P_x, P_y, K, wenn, wie ich annehmen will, die gegebenen bewegenden Kräfte der Scheibe nur von den ξ, η-Coordinaten ihrer Angriffspunkte abhängen.

Zu diesen 5 Gleichungen (4) und (14) tritt aber noch die Berührungsbedingung (11) hinzu, und diese stellt zwischen der Reibung R und dem Normalwiderstande N sofort eine Beziehung her.

Differentiirt man nämlich die Bedingungsgleichung (11) und setzt hierauf für α', β' ihre Werthe (4) ein, so erhält man eine, in Θ', u_x, u_y homogene lineare Gleichung von der Form:

(a) $$\frac{d\Psi}{dt} \equiv \Psi_1(\alpha, \beta, \Theta, \Theta', u_x, u_y) = 0,$$

und aus dieser folgt durch nochmalige Differentiation die Gleichung:

(b) $$\frac{d^2\Psi}{dt^2} \equiv \frac{d\Psi_1}{dt} = 0.$$

Diese letzte Gleichung aber geht nach Ausführung der Differentiation durch Einsetzung der Werthe der Differentialquotienten α', β', u_x', u_y', Θ'' aus den Gleichungen (4) und (14) über in eine lineare Bedingungsgleichung zwischen R und N, durch welche die beiden Gleichungen:

$$\Psi_1 = 0 \text{ und } \Psi = 0$$

particuläre Integrale unsrer Differentialgleichungen (4) und (14) werden.

Diese Bedingungsgleichung lässt sich leicht aufstellen. Auf Grund der Identität (12) kann man nämlich die beiden Gleichungen (a) und (b) ersetzen durch die beiden:

$$(15) \qquad lv_x + mv_y = 0,$$

$$(16) \qquad lv_x' + mv_y' + l'v_x + m'v_y = 0,$$

und aus (3) folgt durch Differentiation:

$$v_x' = u_x' - y\Theta'' - y'\Theta', \quad v_y' = u_y' + x\Theta'' + x'\Theta'.$$

Substituirt man hierin die Werthe von u_x', u_y', Θ'' aus (14) und führt die Abkürzungen ein:

$$(17) \quad \begin{cases} M(u_y - y')\Theta' + P_x - \frac{y}{k^2}K \equiv \vartheta_x, \\ -M(u_x - x')\Theta' + P_y + \frac{x}{k^2}K \equiv \vartheta_y, \\ m + \frac{y}{k^2}(lx + my) \equiv a_x, \quad l - \frac{y}{k^2}(mx - ly) \equiv b_x, \\ -\left(l + \frac{x}{k^2}(lx + my)\right) \equiv a_y, \quad m + \frac{x}{k^2}(mx - ly) \equiv b_y, \end{cases}$$

so erhält man:

$$(18) \quad \begin{cases} Mv_x' = a_x R + b_x N + \vartheta_x, \\ Mv_y' = a_y R + b_y N + \vartheta_y, \end{cases}$$

worin, da man immer für x, y die Werthe (10) und für α', β' die Werthe (4) einzusetzen hat, ϑ_x und ϑ_y blosse Functionen von α, β, Θ, Θ', u_x, u_y sind.

Aus (18) und (16) aber folgt sofort:

$$(la_x + ma_y)R + (lb_x + mb_y)N + \vartheta = 0,$$

oder nach (17)

$$(19) \quad -\frac{1}{k^2}(mx - ly)(lx + my)R + \left[1 + \left(\frac{mx - ly}{k}\right)^2\right]N + \vartheta = 0$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung zwischen R und N, und in derselben wird auch:

$$\vartheta \equiv l\vartheta_x + m\vartheta_y + M(l'v_x + m'v_y),$$

oder nach (3)

$$\vartheta \equiv l\vartheta_x + m\vartheta_y + M(l'(u_x - y\Theta') + m'(u_y + x\Theta'))$$

in Folge der Gleichungen (8), (10) und (4) eine blosse Function von α, β, Θ, Θ', u_x, u_y. —

Solange nun die Geschwindigkeit

$$v \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

des gerade berührenden Scheibenpunktes > 0 *bleibt*, besitzt nach dem Satze IV., die Reibung R stets die gerade entgegengesetzte Richtung dieser Geschwindigkeit und die absolute Stärke:

$$|R| = f\varepsilon N, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon N > 0,$$

ebensolange haben ihre Componenten also die Werthe:

$$R_x = -\varepsilon f N \frac{v_x}{v}, \quad R_y = -\varepsilon f N \frac{v_y}{v}.$$

Daraus folgt nach (13):

$$(20) \qquad R = -\frac{\varepsilon f N}{v}(m v_x - l v_y),$$

und damit aus (19) für den Normalwiderstand N:

$$(21) \left\{1 + \left(\frac{mx - ly}{k}\right)^2 - \frac{\varepsilon f}{k^2 v}(mx - ly)(lx + my)(lv_y - mv_x)\right\} N = -\vartheta.$$

Substituirt man den hieraus folgenden Werth von N, nachdem man in ihm das Zeichen ε aus der Bedingung $\varepsilon N > 0$ bestimmt hat, in den Werth (20) von R und mit diesem in die Gleichungen (14), setzt für v_x, v_y ihre Werthe (3), und fügt die Gleichungen (4) hinzu, so erhält man diejenigen Differentialgleichungen, welche unter Beachtung der vorgeschriebenen beiden particulären Integrale (15) und (11) die Bewegung der Scheibe bestimmen, solange dieselbe auf der festen Curve gleitet, solange also die Geschwindigkeit v des gerade berührenden Scheibenpunktes > 0 bleibt.

Bedenkt man aber, dass nach (15)

$$v_x = \mp mv, \quad v_y = \pm lv,$$

also

$$lv_y - mv_x = \pm v$$

ist, so sieht man, dass die Forderung $\varepsilon N > 0$ dann und nur dann das Zeichen ε bestimmt, wenn

$$\left[1 + \left(\frac{mx - ly}{k}\right)^2\right]^2 > \frac{f^2}{k^4}(mx - ly)^2 (lx + my)^2,$$

oder:

$$(22) \qquad f^2 < \left[\frac{k^2 + (mx - ly)^2}{(mx - ly)(lx + my)}\right]^2$$

ist. Damit also bei gegebener, von Null verschiedener Anfangsgeschwindigkeit des berührenden Scheibenpunktes das Zeichen ε oder die Bewegung der Scheibe für jede gegebene Anfangslage der Scheibe auf der festen Curve eindeutig bestimmt sei, muss der Reibungscoefficient f kleiner sein als der kleinste absolute Werth, den der Bruch:

$$\frac{k^2 + (mx - ly)^2}{(mx - ly)(lx + my)} = \frac{k^2[(F'x)^2 + (F'y)^2] + (xF'y - yF'x)^2}{(xF'y - yF'x)(xF'x + yF'y)}$$

vermöge der Bedingungsgleichung $F(x, y) = 0$ anzunehmen vermag.

Ist er dagegen grösser, so kann man die Anfangslage der Scheibe und die Anfangswerthe von u_x, u_y, Θ' immer so wählen, dass, ganz so wie im vorigen §, nach Belieben entweder jedes der beiden Zeichen von ε oder aber keins derselben die Forderung $\varepsilon N > 0$ befriedigt, dass also dem Gesetze der Reibung während der Bewegung zu Folge entweder zwei verschiedene Bewegungen der Scheibe offen stehen, oder aber die gewählten Anfangswerthe selbst als unmöglich erscheinen.

Im Besonderen aber wird die Forderung (22) sicher erfüllt, sooft die Gleichung (7) des Scheibenrandes eine der beiden Gleichungen:

$$mx - ly = 0, \ lx + my = 0,$$

oder:

$$xF'y - yF'x = 0, \ xF'x + yF'y = 0$$

nach sich zieht, und nach (19) ist dies zugleich auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Normalwiderstand N stets unabhängig von der Reibung werde. Dass aber eine der beiden letzten Gleichungen eine blosse Folge der Gleichung (7) sein soll, sagt selbst wieder nur aus, dass die Auflösung $y = y(x)$ dieser Gleichung einer der beiden Differentialgleichungen:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0, \ \text{oder} \ y - x\frac{dy}{dx} = 0$$

genügen, d. h. dass die Curve (7) selbst ein Kreis $x^2 + y^2 = c^2$, oder eine Gerade $y = cx$ sein muss.

Nun war der Anfangspunkt der Axen x, y zugleich der Scheibenschwerpunkt S. Man sieht also:

Nur dann, wenn die Scheibe entweder kreisförmig ist und überdies ihren Schwerpunkt im Mittelpunkt hat, oder aber, wenn sie sich auf einen Stab reducirt, ist stets der Normalwiderstand, den sie von der festen Curve erfährt, unabhängig von der Reibung.

Und zwar erhält nach (19) für die Kreisscheibe, sooft ihr Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, der Normalwiderstand den Werth

$$N = -\vartheta;$$

für den Stab dagegen wird, wenn man die x-Axe mit ihm zusammenfallen lässt, also $c = 0$ nimmt:

$$N = -\frac{\vartheta}{1 + \frac{x^2}{k^2}}. -$$

Legen wir uns aber jetzt, unbekümmert darum, ob die Forderung (22) augenblicklich erfüllt ist, oder nicht, die Frage vor: *Was geschieht in einem solchen Momente $t = t_0$, in welchem der gerade berührende Körperpunkt keine Geschwindigkeit besitzt, also $v_x = v_y = 0$ ist?*

Sollen dann v_x und v_y nicht blos momentan verschwinden, sondern dauernd oder wenigstens eine Zeit lang Null bleiben, so müssen für $t = t_0$ jedenfalls auch ihre Differentialquotienten v_x' und $v_y' = 0$ werden, und nach (18) im Momente t_0 daher R und N solche Werthe R_0 und N_0 besitzen, welche die beiden Gleichungen befriedigen:

$$(23) \qquad \begin{cases} a_x R_0 + b_x N_0 + \vartheta_x = 0, \\ a_y R_0 + b_y N_0 + \vartheta_y = 0. \end{cases}$$

Nach (17) hat die Determinante dieser beiden Gleichungen den Werth

$$(24) \qquad a_x b_y - a_y b_x \equiv 1 + \frac{x^2 + y^2}{k^2}$$

und kann also niemals verschwinden. Die Gleichungen (23) bestimmen daher stets R_0 und N_0 eindeutig als Functionen der Variabeln α, β, Θ, Θ', u_x, u_y, und die besonderen Werthe von R_0 und N_0, die man hieraus erhält, wenn man diesen Variabeln ihre augenblicklichen Werthe beilegt, sind die wahren Anfangs-

werthe von R und N in einem solchen Momente, wo mit v_x und v_y zugleich auch v_x' und v_y' verschwinden.

Behielten vom Momente t_0 an Reibung und Normalwiderstand beständig die durch die allgemeinen Werthe von R_0 und N_0 bestimmten Richtungen und Stärken bei, so würden die Geschwindigkeitscomponenten v_x und v_y, da sie augenblicklich Null sind, dauernd Null bleiben, die Scheibe also von jetzt an beständig *rollen*. Man erhält daher die Differentialgleichungen dieser Rollbewegung, wenn man in den Gleichungen (14) $R = R_0$, $N = N_0$ setzt. Hierdurch erhält aber das System Differentialgleichungen (4), (14) die beiden Integrale:

$$v_x \equiv u_x - y\Theta' = \text{const.}, \quad v_y \equiv u_y + x\Theta' = \text{const.}$$

und während der ganzen Rollbewegung sind die Constanten dieser Integrale $= 0$. Eliminirt man daher mittelst dieser beiden particulären Integrale:

$$u_x - y\Theta' = 0, \quad u_y + x\Theta' = 0$$

die Variabeln u_x und u_y, so erhellt, *dass die Differentialgleichungen der Rollbewegung der Scheibe sich auf die drei Differentialgleichungen zwischen α, β, Θ und t reduciren.*

$$(25) \quad \begin{cases} \alpha' = (y\cos\Theta + x\sin\Theta)\Theta', \\ \beta' = (y\sin\Theta - x\cos\Theta)\Theta', \\ Mk^2\Theta'' = K + (my - lx)N_0 - (lx + my)R_0, \end{cases}$$

denen als particuläres Integral die Berührungsbedingung (11) vorgeschrieben ist, und in denen selbstverständlich auch in den durch (23) bestimmten Werthen von R_0 und N_0, d. h. in ϑ_x und ϑ_y die Grössen u_x und u_y durch $y\Theta'$ und $-x\Theta'$ zu ersetzen sind.

Hierdurch wird auch die Differenz:

$$(26) \qquad \Delta \equiv R_0^2 - f^2 N_0^2$$

eine blosse Funktion von α, β, Θ und Θ'.

Die absolute Stärke der Reibung kann aber niemals das Product aus dem Reibungscoefficienten f in die absolute Stärke des Normalwiderstandes übersteigen. Soll also im betrachteten Momente Rollen eintreten, so muss der augenblickliche Werth von $\Delta \leqq 0$ sein. *Ist er* < 0, *so fängt nach* V., *die Scheibe sicher zu rollen an,* und ihre Bewegung genügt den Differentialgleichungen (25) solange, als für die Lösungen derselben nicht Δ durch Null ins Positive übergegangen ist.

Ist dagegen im Momente t_0 die Differenz $\Delta > 0$, so können Reibung und Normalwiderstand in diesem Momente nicht die aus den Annahmen $v_x' = v_y' = 0$ berechneten Werthe R_0 und N_0 besitzen, und daher muss nothwendig augenblicklich:

$$v_1 \equiv \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} > 0$$

sein. Im Momente t_0 erhalten nunmehr also

$$\frac{v_x}{v} \text{ und } \frac{v_y}{v} \text{ die Werthe } \frac{v_x'}{v_1} \text{ und } \frac{v_y'}{v_1},$$

und nach IV daher die Reibungscomponenten die Werthe

$$R_x = -f\varepsilon N\frac{v_x'}{v_1}, \quad R_y = -f\varepsilon N\frac{v_y'}{v_1};$$

nach (13) wird also:

$$R = -\frac{\varepsilon f N}{v_1}(mv_x' - lv_y'),$$

wo wieder $\varepsilon = \pm 1$ ist und $\varepsilon N > 0$ sein muss.

Aus den Gleichungen (18) erhält man daher jetzt für die Werthe, welche N und die Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten v_x, v_y im Momente t_0 annehmen, die Gleichungen:

$$-(Mv_1 + a_x\varepsilon f N m)\frac{v_x'}{v_1} + a_x\varepsilon f N l\frac{v_y'}{v_1} + b_x N + \vartheta_x = 0,$$

$$-a_y\varepsilon f N m\frac{v_x'}{v_1} - (Mv_1 - a_y\varepsilon f N l)\frac{v_y'}{v_1} + b_y N + \vartheta_y = 0,$$

und zugleich reducirt sich die Bedingungsgleichung (16) augenblicklich auf:

$$lv_x' + mv_y' = 0.$$

Führt man, um diese Bedingung gleich mit zu erfüllen, durch die Formeln:

$$(27) \quad Mv_1 \equiv \varepsilon f N \varpi, \qquad \varepsilon f N\frac{v_x'}{v_1} \equiv m\sigma, \qquad \varepsilon f N\frac{v_y'}{v_1} \equiv -l\sigma$$

ϖ und σ als neue Unbekannte ein, so gehen die beiden erhaltenen Gleichungen über in:

$$(28) \qquad \begin{cases} -(a_x + m\varpi)\sigma + b_x N + \vartheta_x = 0, \\ -(a_y - l\varpi)\sigma + b_y N + \vartheta_y = 0. \end{cases}$$

Die Determinante dieser beiden, in $-\sigma$ und N linearen Gleichungen ist:

$$D(\varpi) \equiv (lb_x + mb_y)\varpi + a_x b_y - a_y b_x,$$

oder nach (17) und (24):

$$D(\varpi) \equiv \left[1 + \left(\frac{mx - ly}{k}\right)^2\right]\varpi + 1 + \frac{x^2 + y^2}{k^2};$$

sie ist also > 0 für jedes $\varpi \geqq 0$.

Die Auflösungen der Gleichungen (28) besitzen ferner die Form:

$$(29) \qquad D(\varpi)\sigma = A, \qquad D(\varpi)N = B\varpi + C,$$

und indem man dieselben in die aus (27) folgende Gleichung

$$\sigma^2 = f^2 N^2$$

einsetzt, erhält man für die letzte Unbekannte ϖ die quadratische Gleichung:

$$(30) \qquad \chi(\varpi) \equiv f^2(B\varpi + C)^2 - A^2 = 0.$$

Die Gleichungen (28) reduciren sich aber auf die Gleichungen (23), wenn man:

$$\varpi = 0, \qquad \sigma = -R_0, \qquad N = N_0$$

setzt. Stellen also die Gleichungen (29) die Auflösungen der Gleichungen (28) dar, so sind zugleich:

$$D(o)R_0 = -A, \qquad D(o)N_0 = C$$

die Auflösungen der Gleichungen (23), und unsrer Voraussetzung

$$\Delta \equiv R_0^2 - f^2 N_0^2 > 0$$

zu Folge ist daher:

$$f^2 C^2 - A^2 \equiv \chi(o) < 0.$$

Die Gleichung (30) besitzt daher eine positive und eine negative Wurzel ϖ und zugleich ist A keinesfalls Null, sind also für die positive Wurzel ϖ, für welche $D(\varpi)$ sicher $\neq 0$ ist, auch die Werthe (29) von σ und N sicher $\neq 0$.

Die negative Wurzel ϖ ist nun von vornherein zu verwerfen, weil sie nach der Definition (27) von ϖ der Forderung $v_1 > 0$ widerspricht. Für die positive Wurzel dagegen bestimmt sich nach (29) das Zeichen ε eindeutig aus der Bedingung:

$$(31) \qquad \varepsilon(B\varpi + C) > 0,$$

worauf die Gleichungen (27) und (29) auch eindeutig bestimmte Werthe von v_1, v_x', v_y', und zwar $v_1 > 0$ liefern.

In einem Momente t_0, *wo* $v = 0$ *und* $\Delta > 0$ *ist,* verschwinden also in der That v_x' und v_y' keinesfalls beide, *tritt also sicher Gleiten ein*, und es gelten dann von diesem Momente an für die

Bewegung der Scheibe wieder die Gleichungen (4) und (14) mit den durch (21) und (20) bestimmten Werthen von N und R und mit dem durch (31) eindeutig bestimmten Zeichen ε.

Mit Hülfe der Gleichungen (25) kann man endlich auch den 1., 2., ... Differentialquotienten von $\varDelta$ als Function von α, β, Θ, Θ' berechnen. War dann im Momente t_0 mit v zugleich auch $\varDelta = 0$, so zeigt das Vorzeichen des ersten für $t = t_0$ nicht mehr verschwindenden Differentialquotienten von $\varDelta$ an, ob in diesem Momente *Rollen* oder *Gleiten* eintritt. Ersteres oder letzteres beginnt, jenachdem dies Zeichen das negative oder das positive ist.

Dieser Grenzfall, wo mit v zugleich auch $\varDelta$ verschwindet, bedarf aber — und hier komme ich auf das zu sprechen, was ich am Schlusse des letzten § ausgelassen hatte — in mehrfacher Hinsicht noch einer weiteren Untersuchung.

Geht allerdings in demselben Momente t_0, wo v verschwindet, $\varDelta$ durch Null ins Negative über, so ist die Frage vollständig erledigt, indem dann die durchaus eindeutigen Differentialgleichungen (25) des Rollens in Kraft treten. Anders dagegen liegt die Sache, wenn $\varDelta$ gerade von Null aus wächst.

Hier braucht nämlich nicht mehr, wie beim einzelnen materiellen Punkte, umgekehrt im Momente t_0 mit v nothwendig zugleich auch $v_1 = 0$ zu werden, sooft augenblicklich:

$$\varDelta \leqq 0 \quad \text{oder} \quad f[C] \geqq [A]$$

ist. Denn da die Gleichung (30) ergiebt:

$$\varpi = -\frac{1}{fB}(fC \mp A),$$

so haben in diesem Falle ihre beiden, bez. die eine nicht verschwindende Wurzel ϖ das Zeichen des Bruches:

$$-\frac{C}{B} = \frac{a_y\vartheta_x - a_x\vartheta_y}{l\vartheta_x + m\vartheta_y}, \tag{32}$$

und dieser Bruch wird unter Umständen entschieden auch > 0 sein können. In den beiden Fällen, wo im Momente t_0 $\varDelta < 0$ ist, oder eben durch Null ins Negative übergeht, kommt nun freilich die Gleichung (30) gar nicht in Betracht, da dann nach den Reibungsgesetzen eben nothwendig Rollen eintreten, also $v_1 = 0$ werden muss. In dem Falle aber, wo $\varDelta$ gerade durch Null ins Positive übergeht, und also Gleiten eintreten muss, kann an sich v_1 augenblicklich ebensowohl > 0, als auch $= 0$ sein.

Wenn daher in diesem Falle die nicht verschwindende Wurzel der Gleichung (30) positiv ist, so ergeben sich vom Momente t_0 an zwei verschiedene mögliche Gleitungsbewegungen für die Scheibe. Beide gehorchen den Gleichungen (4) und (14) mit den aus (21) und (20) folgenden Werthen von N und R. Die eine aber, die der positiven Wurzel ϖ der Gleichung (30) entspricht, und in der ε durch die Bedingung (31) und v_1 durch (27) und (29) bestimmt ist, beginnt mit einem positiven Anfangswerthe von v_1, die zweite dagegen, in der R und N die Anfangswerthe R_0 und N_0 erhalten und daher ε durch die Bedingung $\varepsilon N_0 > 0$ bestimmt ist, geht mit dem Anfangswerthe $v_1 = 0$ aus.

Dieselbe Zweideutigkeit zeigt sich auch in dem Falle, wo im Momente t_0 mit v zugleich nicht bloss die Differenz $\varDelta$ selbst, sondern auch alle ihre Differentialquotienten bei der Rollbewegung der Scheibe verschwinden. Dies kann nur dadurch geschehen, dass entweder nach Substitution der Werthe $u_y = y\Theta'$, $u_x = -x\Theta'$ die Gleichungen (23) bei unbestimmten, nur der Berührungsbedingung (11) unterworfenen Werthen von $\alpha, \beta, \Theta, \Theta'$ für R_0 und N_0 constante Werthe liefern (was z. B. eintritt bei der Bewegung einer nur der Schwere unterworfenen homogenen Kreisscheibe in einer verticalen Ebene auf einer festen Geraden), und zugleich für den Reibungscoefficienten f gerade der Werth

$$f = \left|\frac{R_0}{N_0}\right|$$

angenommen wird, oder aber auch dadurch, dass zwar nur der augenblickliche Werth $\varDelta_0$ der Differenz $\varDelta$ verschwindet, aber die Gleichung:

$$\varDelta = \varDelta_0 = 0$$

gerade eine particuläre Integralgleichung der Differentialgleichungen (25) ist, was man bekanntlich durch blosse Differentiationen und algebraische Operationen entscheiden kann. Sooft dann (wie in dem angeführten Beispiele) der Bruch (32) oder die nicht verschwindende Wurzel ϖ der Gleichung (30) negativ ist, muss die Scheibenbewegung im Momente t_0 nothwendig in ein andauerndes Rollen übergehen; ist aber jener Bruch positiv, so bleibt neben dem Rollen immer auch noch Gleiten möglich.

Indessen kann man diese Zweideutigkeiten wieder zum Wegfall bringen, wenn man ein, in der Theorie der Reibung

allgemein acceptirtes Princip zu Hülfe nimmt, die neue Hypothese nämlich[1]):

VI. *Die Reibung ist immer möglichst bestrebt, den Punkt des Körpers, welcher die rauhe Unterlage berührt, zu relativer Ruhe auf dieser zu bringen,*

d. h. also in unserm Falle: In einem Momente, wo $v = 0$ ist, nehmen, sooft dies nicht den Reibungsgesetzen geradezu widerspricht, Reibung und Normalwiderstand immer die Werthe R_0 und N_0 an.

In der That folgt aus dieser Annahme unmittelbar, dass in dem zuletzt betrachteten Falle sicher nur Rollen eintritt, und dass auch in dem Falle, wo im Momente t_0 bei verschwindendem r die Differenz $\varDelta$ durch Null ins Positive übergeht, nur diejenige Gleitungsbewegung der Scheibe zu Stande kommen wird, die mit dem Anfangswerthe Null von v_1 beginnt.

Hiermit ist freilich die Discussion dieses Grenzfalles, wo r und $\varDelta$ gleichzeitig verschwinden, noch immer nicht vollständig erschöpft; es wird aber genügen, was darüber weiter noch zu sagen wäre, am Schlusse nachzubringen.

II.

Räumliche Bewegung eines starren Körpers auf starrer Fläche.

§ 5.

Grundformeln und Berührungsbedingung.

Ein starrer Körper sei gezwungen auf einer starren Fläche zu bleiben, die er immer nur mit einem einzigen, aber beliebigen Punkte seiner Oberfläche berühre, und zwar will ich gleich von Anfang an den allgemeinen Fall behandeln, wo die starre Fläche nicht ruht, sondern sich selbst in bekannter, von der Bewegung des Körpers auf ihr unabhängigen Weise bewegt.

Um die Bewegung des Körpers unter dem Einfluss gegebener bewegender Kräfte auf der Fläche zu untersuchen, wird es dann nöthig, drei verschiedene gleichsinnige rechtwinklige Axensysteme einzuführen. Das erste $\Omega\xi\eta\zeta$ sei fest im Raume, das zweite

---

1) Vgl. z. B. Jellet, die Theorie der Reibung, Teubner 1890, p. 137, Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, I, Teubner 1900, p. 226.

$Sxyz$ werde gebildet von den Schwerpunktshauptaxen des Körpers, und mit dem dritten $Ox_1x_2x_3$ endlich sei die starre Fläche fest verbunden, sodass also dieses letzte Axensystem selbst sich in gegebener Bewegung befindet.

Zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ; x, y, z und x_1, x_2, x_3 eines und desselben Punktes in diesen drei Axensystemen bestehen die Relationen:

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = A + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \\ \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = B + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3, \\ \zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = C + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3. \end{cases}$$

Dabei genügen die Richtungscosinus $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$ und $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$ der Axen x, y, z und x_1, x_2, x_3 gegen die Axen ξ, η, ζ je den 6 bekannten Bedingungsgleichungen, und daher gelten für ihre Differentialquotienten nach der Zeit t die Formeln:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_1' = \alpha_2 r - \alpha_3 q, \\ \alpha_2' = \alpha_3 p - \alpha_1 r, \\ \alpha_3' = \alpha_1 q - \alpha_2 p, \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} A_1' = A_2 P_3 - A_3 P_2, \\ A_2' = A_3 P_1 - A_1 P_3, \\ A_3' = A_1 P_2 - A_2 P_1, \end{cases}$$

nebst denjenigen, die sich hieraus durch Vertauschung von α mit β und γ, sowie von A mit B und C ergeben. In denselben sind p, q, r und P_1, P_2, P_3 die Componenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten der Axensysteme $Sxyz$ und $Ox_1x_2x_3$ nach ihren eigenen Axen, und da die Bewegung des letzteren Axensystems gegeben sein soll, so spielen in allem Folgenden mit den 12 Coefficienten A, B, C zugleich auch P_1, P_2, P_3 die Rolle von gegebenen Functionen der Zeit t.

Bestimmt man aus den Gleichungen (1) x_1, x_2, x_3 als Functionen von x, y, z, so erhält man die Formeln:

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = g_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ x_2 = g_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ x_3 = g_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

deren Coefficienten die Werthe haben:

$$(5)\quad g_h = A_h(\alpha - A) + B_h(\beta - B) + C_h(\gamma - C),$$

$$(6)\quad \begin{cases} a_h = A_h\alpha_1 + B_h\beta_1 + C_h\gamma_1, \\ b_h = A_h\alpha_2 + B_h\beta_2 + C_h\gamma_2, \\ c_h = A_h\alpha_3 + B_h\beta_3 + C_h\gamma_3. \end{cases}$$

Nach (1) und nach (4) sind α, β, γ; g_1, g_2, g_3 und A, B, C bez die Coordinaten des Körperschwerpunkts S in den ruhenden Axen ξ, η, ζ und in den bewegten x_1, x_2, x_3, und die Coordinaten des Anfangspunkts O der letzteren Axen in Bezug auf die ruhenden Axen, und a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 sind die Richtungscosinus der Schwerpunktshauptaxen x, y, z gegen die bewegten Axen x_1, x_2, x_3.

Differentiirt man die Formeln (6) nach t, substituirt die Werthe (2) und (3) und wendet dann wieder die Formeln (6) an, so erhält man die Relationen:

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1' = a_2 p_3 - a_3 p_2 + b_1 r - c_1 q, \\ a_2' = a_3 p_1 - a_1 p_3 + b_2 r - c_2 q, \\ a_3' = a_1 p_2 - a_2 p_1 + b_3 r - c_3 q, \end{cases}$$

nebst 6 anderen, die aus den hingeschriebenen entstehen, wenn man die Buchstaben a, b, c und p, q, r gleichzeitig cyklisch vertauscht.

Nennt man ferner u_x, u_y, u_z die Componenten der absoluten Geschwindigkeit u des Körperschwerpunkts S nach den Schwerpunktshauptaxen x, y, z, und U_1, U_2, U_3 die Componenten der absoluten Geschwindigkeit U des Anfangspunktes O der bewegten Axen x_1, x_2, x_3 nach diesen letzteren Axen, so hat man:

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha' = \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y + \alpha_3 u_z, \\ \beta' = \beta_1 u_x + \beta_2 u_y + \beta_3 u_z, \\ \gamma' = \gamma_1 u_x + \gamma_2 u_y + \gamma_3 u_z, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} U_1 = A_1 A' + B_1 B' + C_1 C', \\ U_2 = A_2 A' + B_2 B' + C_2 C', \\ U_3 = A_3 A' + B_3 B' + C_3 C', \end{cases}$$

sodass auch U_1, U_2, U_3 bekannte Functionen der Zeit t sind.

Hieraus folgt nach (6):

$$A_h(\alpha' - A') + B_h(\beta' - B') + C_h(\gamma' - C') = a_h u_x + b_h u_y + c_h u_z - U_h,$$

und durch Auflösung der Formeln (5) nach $\alpha - A$, $\beta - B$, $\gamma - C$ weiter:

$$\begin{aligned} A_h'(\alpha - A) + B_h'(\beta - B) + C_h'(\gamma - C) \\ = (A_h' A_1 + B_h' B_1 + C_h' C_1) g_1 + (A_h' A_2 + B_h' B_2 + C_h' C_2) g_2 \\ + (A_h' A_3 + B_h' B_3 + C_h' C_3) g_3. \end{aligned}$$

Addirt man diese beiden Gleichungen und benutzt die Formeln (3), sowie die 6 Bedingungsgleichungen zwischen den Richtungscosinus A_x, B_x, C_x, so ergiebt sich nach (5):

$$(10)\quad \begin{cases} g_1' = a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u_z - U_1 + P_3 g_2 - P_2 g_3, \\ g_2' = a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u_z - U_2 + P_1 g_3 - P_3 g_1, \\ g_3' = a_3 u_x + b_3 u_y + c_3 u_z - U_3 + P_2 g_1 - P_1 g_2. \end{cases}$$

— Dies vorausgesetzt mögen von jetzt an x, y, z und x_1, x_2, x_3 im Besondern *die Coordinaten derjenigen beiden Punkte π und Π des Körpers und der starren Fläche* bezeichnen, *mit denen sich diese im Momente t berühren.*

Nach (1) haben in Bezug auf die unbeweglichen Axen ξ, η, ζ die absoluten Geschwindigkeiten v und V, welche diese beiden Punkte augenblicklich besitzen, die Componenten:

$$(11)\quad \begin{cases} v_\xi = \alpha' + \alpha_1' x + \alpha_2' y + \alpha_3' z, \\ v_\eta = \beta' + \beta_1' x + \beta_2' y + \beta_3' z, \\ v_\zeta = \gamma' + \gamma_1' x + \gamma_2' y + \gamma_3' z, \\ \quad \text{und:} \\ V_\xi = A' + A_1' x_1 + A_2' x_2 + A_3' x_3, \\ V_\eta = B' + B_1' x_1 + B_2' x_2 + B_3' x_3, \\ V_\zeta = C' + C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3. \end{cases}$$

Im Allgemeinen ändert aber der Berührungspunkt des Körpers und der Fläche sowohl auf dem Körper wie auch auf der Fläche seine Lage. Die Coordinaten x, y, z und x_1, x_2, x_3 der beiden Punkte π und Π sind also im Allgemeinen keine Constanten, sondern Functionen der Zeit t. Versteht man daher unter ξ, η, ζ die Coordinaten des geometrischen Berührungspunktes von Körper und Fläche, und unter ξ', η', ζ' die vollständigen Differentialquotienten dieser Coordinaten nach der Zeit oder die ξ, η, ζ-Componenten der Geschwindigkeit, mit der sich dieser Berührungspunkt im Raume fortbewegt, so kann man nach (1) die Formeln (10) auch so schreiben:

$$(11')\quad \begin{cases} v_\xi = \xi' - \alpha_1 x' - \alpha_2 y' - \alpha_3 z', \\ v_\eta = \eta' - \beta_1 x' - \beta_2 y' - \beta_3 z', \\ v_\zeta = \zeta' - \gamma_1 x' - \gamma_2 y' - \gamma_3 z'; \\ V_\xi = \xi' - A_1 x_1' - A_2 x_2' - A_3 x_3', \\ V_\eta = \eta' - B_1 x_1' - B_2 x_2' - B_3 x_3', \\ V_\zeta = \zeta' - C_1 x_1' - C_2 x_2' - C_3 x_3'. \end{cases}$$

Gegen den Punkt Π, oder also gegen die bewegte Fläche besitzt der Körperpunkt π eine *relative Geschwindigkeit* w, deren Componenten nach den Axen ξ, η, ζ sind:

$$w_\xi = v_\xi - V_\xi, \quad w_\eta = v_\eta - V_\eta, \quad w_\zeta = v_\zeta - V_\zeta.$$

Einerseits erhält man daher aus (11′)

$$\begin{aligned} w_\xi &= A_1 x_1' + A_2 x_2' + A_3 x_3' - \alpha_1 x' - \alpha_2 y' - \alpha_3 z', \\ w_\eta &= B_1 x_1' + B_2 x_2' + B_3 x_3' - \beta_1 x' - \beta_2 y' - \beta_3 z', \\ w_\zeta &= C_1 x_1' + C_2 x_2' + C_3 x_3' - \gamma_1 x' - \gamma_2 y' - \gamma_3 z', \end{aligned}$$

und hieraus weiter, durch Anwendung der Formeln (6) und der 6 Bedingungsgleichungen zwischen den Richtungscosinus $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$, für die Componenten:

$$(12) \qquad \begin{cases} w_x = \alpha_1 w_\xi + \beta_1 w_\eta + \gamma_1 w_\zeta, \\ w_y = \alpha_2 w_\xi + \beta_2 w_\eta + \gamma_2 w_\zeta, \\ w_z = \alpha_3 w_\xi + \beta_3 \omega_\eta + \gamma_3 w_\zeta \end{cases}$$

der relativen Geschwindigkeit w nach den Schwerpunktshauptaxen x, y, z:

$$(13) \qquad \begin{cases} w_x = a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' - x', \\ w_y = b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3' - y', \\ w_z = c_1 x_1' + c_2 x_2' + c_3 x_3' - z'. \end{cases}$$

Andrerseits hat man aber auch, wenn man die Componenten der absoluten Geschwindigkeiten v und V nach den Schwerpunktshauptaxen x, y, z durch v_x, v_y, v_z und V_x, V_y, V_z bezeichnet:

$$w_x = v_x - V_x, \quad w_y = v_y - V_y, \quad w_z = v_z - V_z,$$

und sowohl zwischen v_x, v_y, v_z und v_ξ, v_η, v_ζ, als auch zwischen V_x, V_y, V_z und V_ξ, V_η, V_ζ bestehen dieselben Relationen (12), wie zwischen w_x, w_y, w_z und w_ξ, w_η, w_ζ. In ganz analoger Weise, wie die Formeln (13) abgeleitet wurden, erhält man daher aus den 3 ersten Gleichungen (11) nach (8) und (2) die bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} v_x &= u_x + qz - ry, \\ v_y &= u_y + rx - pz, \\ v_z &= u_z + py - qx, \end{aligned}$$

und aus den 3 letzten Gleichungen (11) unter Anwendung der Formeln (3) und (6), sowie der Auflösungen der Gleichungen (9):

$$
(14)\begin{cases}
V_x = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 + (a_2 x_3 - a_3 x_2) P_1 + (a_1 x_3 - a_3 x_1) P_2 \\
\qquad\qquad + (a_2 x_1 - a_1 x_2) P_3, \\
V_y = b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3 + (b_2 x_3 - b_3 x_2) P_1 + (b_1 x_3 - b_3 x_1) P_2 \\
\qquad\qquad + (b_2 x_1 - b_1 x_2) P_3, \\
V_z = c_1 U_1 + c_2 U_2 + c_3 U_3 + (c_2 x_3 - c_3 x_2) P_1 + (c_1 x_3 - c_3 x_1) P_2 \\
\qquad\qquad + (c_2 x_1 - c_1 x_2) P_3,
\end{cases}
$$

sodass, wenn man unter V_x, V_y, V_z eben die hierdurch definirten Functionen der Zeit t, der Richtungscosinus $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ und der Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Berührungspunktes von Körper und Fläche versteht, sich jetzt ergiebt:

$$
(15)\qquad \begin{cases}
w_x = u_x + qz - ry - V_x, \\
w_y = u_y + rx - pz - V_y, \\
w_z = u_z + py - qx - V_z.
\end{cases}
$$

Durch die Gleichungen (13) und (15) sind nun auch die nach den Schwerpunktshauptaxen x, y, z genommenen Componenten der relativen Geschwindigkeit w, welche im Momente t der gerade berührende Körperpunkt π gegen die bewegte Fläche besitzt, in doppelter Weise ausgedrückt.

Es kommt nunmehr darauf an, die *Coordinaten des Berührungspunktes* zu berechnen.

Zu dem Ende seien, bezogen auf die Schwerpunktshauptaxen x, y, z, resp. auf die bewegten Axen x_1, x_2, x_3, die Oberfläche des Körpers und die bewegte Fläche durch die Gleichungen gegeben:

$$
(16)\qquad \varphi(x, y, z) = 0
$$

und:

$$
(17)\qquad \Phi(x_1, x_2, x_3) = 0,
$$

und zwar sollen die Formen dieser beiden Gleichungen so gewählt sein, dass die Ungleichungen:

$$
\varphi > 0 \text{ und } \Phi > 0
$$

die einander zugekehrten *äusseren* Seiten der beiden Flächen definiren.

Gegen die Schwerpunktshauptaxen x, y, z besitzt dann die *innere* Normale der Körperoberfläche φ die Richtungscosinus:

$$
(18)\qquad \begin{cases}
l = -s\varphi'x, \quad m = -s\varphi'y, \quad n = -s\varphi'z, \\
s = \dfrac{1}{\sqrt{(\varphi'x)^2 + (\varphi'y)^2 + (\varphi'z)^2}},
\end{cases}
$$

während die Richtungscosinus der *äusseren* Normale der Fläche Φ gegen die bewegten Axen x_1, x_2, x_3 die Werthe haben:

$$s_1 \Phi' x_1, \; s_1 \Phi' x_2, \; s_1 \Phi' x_3,$$

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{(\Phi' x_1)^2 + (\Phi' x_2)^2 + (\Phi' x_3)^2}}.$$

Im Berührungspunkte müssen die beiden Normalen zusammenfallen. Bezieht man also beide auf die bewegten Axen, so ergeben sich zwischen den Coordinaten x, y, z und x_1, x_2, x_3 des Berührungspunktes die 3 Bedingungsgleichungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} a_1 \varphi' x + b_1 \varphi' y + c_1 \varphi' z + \varrho \Phi' x_1 = 0, \\ a_2 \varphi' x + b_2 \varphi' y + c_2 \varphi' z + \varrho \Phi' x_2 = 0, \\ a_3 \varphi' x + b_3 \varphi' y + c_3 \varphi' z + \varrho \Phi' x_3 = 0, \end{cases}$$

in denen der Factor $\varrho > 0$ sein muss. Fügt man diesen Gleichungen, nachdem man darin die Werthe (4) von x_1, x_2, x_3 substituirt hat, die Gleichung (16) der Körperoberfläche hinzu, so erhält man 4 Gleichungen, welche die Coordinaten x, y, z des Berührungspunkts und die positive Unbekannte ϱ durch die Coefficienten der Transformationsformeln (4) bestimmen. Ihre Auflösungen seien:

$$(20) \qquad x = \bar{x}, \; y = \bar{y}, \; z = \bar{z}, \; \varrho = \bar{\varrho}.$$

Durch Einsetzung derselben in (4) erhält man dann unmittelbar auch für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Berührungspunktes Werthe von derselben Form:

$$(20') \qquad x_1 = \bar{x}_1, \; x_2 = \bar{x}_2, \; x_3 = \bar{x}_3,$$

sodass also in (20′), wie in (20) die rechten Seiten blosse Functionen der 12 Variabeln sind:

$$g_1, g_2, g_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3,$$

und indem man schliesslich die Werthe (20′) in die Gleichung (17) der bewegten Fläche einsetzt, ergiebt sich als *Bedingung für die äussere Berührung der beiden Flächen* die Gleichung:

$$(21) \qquad \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \equiv \Psi(g_1, g_2, g_3, a_1, a_2, \cdots, c_3) = 0$$

zwischen diesen 12 Variabeln allein.

In Folge der Art, wie sie erhalten wurden, genügen die Werthe (20) und (20′) identisch den Gleichungen (19) und (16). Verstehen wir also im Folgenden unter x, y, z und x_1, x_2, x_3 immer die durch (20) und (20′) gegebenen Coordinaten des Be-

rührungspunktes beider Flächen, so folgt aus der Definitionsgleichung (21) der Function Ψ durch Differentiation nach der Zeit t:

$$\frac{d\Psi}{dt} = x_1'\Phi'x_1 + x_2'\Phi'x_2 + x_3'\Phi'x_3.$$

Dafür kann man nach (19) aber auch schreiben:

$$-\varrho\frac{d\Psi}{dt} = (a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3')\varphi'x + (b_1x_1' + b_2x_2' + b_3x_3')\varphi'y + (c_1x_1' + c_2x_2' + c_3x_3')\varphi'z.$$

und dies verwandelt sich selbst wieder durch die Formeln (13) in:

$$-\varrho\frac{d\Psi}{dt} = w_x\varphi'x + w_y\varphi'y + w_z\varphi'z + \frac{d\varphi(x, y, z)}{dt},$$

d. h., da für die Coordinaten des Berührungspunktes $\varphi(x, y, z) = 0$ ist, in:

$$-\varrho\frac{d\Psi}{dt} = w_x\varphi'x + w_y\varphi'y + w_z\varphi'z.$$

Führt man also noch durch (18) die Richtungscosinus l, m, n der inneren Normale der Körperoberfläche im Berührungspunkte ein, so erhält man:

$$\varrho s\frac{d\Psi}{dt} = lw_x + mw_y + nw_z.$$

Die Differentiation der Berührungsbedingung (21) liefert hiernach zwischen den Componenten der relativen Geschwindigkeit w, welche der gerade berührende Körperpunkt gegen die bewegte Fläche besitzt, die Bedingungsgleichung:

$$lw_x + mw_y + nw_z = 0,$$

ein Resultat, das wiederum a priori evident ist, indem es ja nur aussagt, dass die Richtung dieser relativen Geschwindigkeit stets in der gemeinsamen Tangentialebene beider Flächen liegt.

§ 6.

Die Differentialgleichungen der Bewegung.

Der *Widerstand*, den der Körper von der starren Fläche erfährt, wirkt in jedem Momente an demjenigen Körperpunkte π, der gerade auf die Fläche zu liegen gekommen ist, und kann nach der gemeinsamen Tangentialebene und senkrecht darauf in zwei Componenten zerlegt werden, *in die tangential wirkende Rei-*

bung R und in den normalen Widerstand N. Rechnet man den letzteren *positiv*, oder *negativ*, jenachdem er im Sinne der *inneren* oder der *äusseren* Normale der Körperoberfläche wirkt, so stellen stets die Produkte:

$$Nl, \; Nm, \; Nn$$

seine Componenten nach den Schwerpunktshauptaxen x, y, z dar.

Da andrerseits die *Reibung*, von der jetzt R die absolute Stärke bezeichnen möge, immer in der gemeinsamen Tangentialebene der beiden sich berührenden Flächen wirkt, so müssen ihre Componenten nach den Schwerpunktshauptaxen R_x, R_y, R_z jeder Zeit der Bedingung genügen:

$$lR_x + mR_y + nR_z = 0. \tag{23}$$

Denkt man sich in jedem Momente der Bewegung die beiden Kräfte N und R an dem gerade berührenden Körperpunkte π angebracht, so kann man den Körper als frei ansehen und daher auf seine Bewegung die bekannten 6 Differentialgleichungen der freien Bewegung eines starren Körpers bezogen auf seine Schwerpunktshauptaxen anwenden.

Nennt man M die Masse des Körpers und, nach Zurückführung aller gegebenen bewegenden Kräfte desselben auf eine an seinem Schwerpunkte angreifende resultirende Einzelkraft und auf eine resultirende Koppel,

$$\Pi_x, \; \Pi_y, \; \Pi_z \text{ und } L_x, \; L_y, \; L_z$$

die Componenten dieser resultirenden Einzelkraft und des resultirenden Koppelmoments nach den Schwerpunktshauptaxen x, y, z, und bezeichnet, um spätere Formeln bequemer schreiben zu können, die Trägheitsmomente des Körpers um diese Axen durch:

$$\frac{1}{a}, \; \frac{1}{b}, \; \frac{1}{c},$$

so erhält man auf diese Weise für die Bewegung des Körpers auf der starren Fläche die 6 Differentialgleichungen 1. O.:

$$\tag{24} \begin{cases} M\left(\dfrac{du_x}{dt} - ru_y + qu_z\right) = \Pi_x + Nl + R_x, \\ M\left(\dfrac{du_y}{dt} - pu_z + ru_x\right) = \Pi_y + Nm + R_y, \\ M\left(\dfrac{du_z}{dt} - qu_x + pu_y\right) = \Pi_z + Nn + R_z, \end{cases}$$

$$
(25) \begin{cases}
\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)qr + L_x + (ny - mz)N + yR_z - zR_y, \\
\frac{1}{b}\frac{dq}{dt} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)rp + L_y + (lz - nx)N + zR_x - xR_z, \\
\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)pq + L_z + (mx - ly)N + xR_y - yR_x.
\end{cases}
$$

Hierin sind l, m, n durch die Formeln (18) als Functionen der Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes π definirt, und für diese Coordinaten selbst überall die Werthe (20) zu setzen.

Nehmen wir an, dass die gegebenen bewegenden Kräfte des Körpers ausser von den absoluten Lagen ihrer Angriffspunkte höchstens nur noch von der Zeit t abhängen, so können wir, da umgekehrt die 12 Coefficienten α, β, γ der 3 ersten Gleichungen (1) sich nach (5) und (6) als blosse Functionen der Coefficienten der Gleichungen (4) und der als Functionen der Zeit gegebenen Coefficienten der 3 letzten Gleichungen (1) ausdrücken lassen, die in bekannter Weise durch diese bewegenden Kräfte bestimmten Grössen Π_x, Π_y, Π_z, L_x, L_y, L_z stets als blosse Functionen der Coefficienten der Gleichungen (4) und der Zeit t berechnen.

Zu den 6 Differentialgleichungen (24) und (25) sind nun noch hinzuzufügen die 3 Differentialgleichungen (10), sowie die 9 Differentialgleichungen, die durch die 3 Gleichungen (7) repräsentirt werden, sodass wir zur Bestimmung der Bewegung des Körpers im Ganzen 18 Differentialgleichungen 1. O. erhalten. In den 12 Differentialgleichungen (7) und (10) (in denen die Differentialquotienten nach der Zeit durch Accente bezeichnet wurden) sind P_1, P_2, P_3 und U_1, U_2, U_3 bekannte Functionen der Zeit t. Unbekannt und aus unseren 18 Differentialgleichungen als Functionen von t zu bestimmen sind die 18 Variabeln:

(26) u_x, u_y, u_z, p, q, r, g_1, g_2, g_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3.

Doch verlangt unser Problem nicht die vollständige Integration der 18 Differentialgleichungen.

Denn erstens sind die Richtungscosinus a_k, b_k, c_k den 6 Bedingungsgleichungen unterworfen:

$$
(27) \qquad \begin{cases}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, & c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0, \\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,
\end{cases}
$$

die particuläre Integrale der 9 Differentialgleichungen (7) sind. Und zweitens tritt zu unsern Differentialgleichungen noch die

endliche Gleichung (21) hinzu. Diese Berührungsbedingung aber führt sogleich auf eine lineare Bedingungsgleichung zwischen dem Normalwiderstande N und den Reibungscomponenten R_x, R_y, R_z. Differentiirt man nämlich die Gleichung (21) nach t und setzt hierauf für die Differentialquotienten ihrer Variabeln die Werthe (10) und (7) ein, so ergiebt sich eine in u_x, u_y, u_z, p, q, r lineare Gleichung:

$$\frac{d\Psi}{dt} \equiv \Psi_1(u_x, u_y, u_z, p, q, r, g_1, g_2, g_3, a_1, a_2, \ldots, c_3, t) = 0$$

zwischen diesen 6 Variabeln, den 12 Coefficienten der Transformationsformeln (4) und der Zeit t, und durch nochmalige Differentiation entspringt hieraus die Gleichung:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} \equiv \frac{d\Psi_1}{dt} = 0.$$

Nach Ausführung der Differentiation geht aber diese letzte Gleichung in Folge der Gleichungen (24), (25), (10) und (7) eben über in eine lineare Bedingungsgleichung zwischen N, R_x, R_y, R_z, deren Coefficienten blosse Functionen der Variabeln (26) und der Zeit t sind, und zwar in eine Bedingungsgleichung, die in Folge ihrer Entstehungsart die beiden Ausgangsgleichungen:

$$\Psi_1 = 0 \text{ und } \Psi = 0$$

selbst zu particulären Integralen unsrer 18 Differentialgleichungen macht.

Um diese Bedingungsgleichung wirklich aufzustellen, braucht man nur zu bedenken, dass wegen der Identität (22) die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0 \text{ und } \frac{d^2\Psi}{dt^2} = 0.$$

sich ersetzen lassen durch die beiden folgenden:

(28) $lw_x + mw_y + nw_z = 0,$

(29) $lw'_x + mw'_y + nw'_z + l'w_x + m'w_y + n'w_z = 0.$

Die Componenten w_x, w_y, w_z der relativen Geschwindigkeit, welche der gerade berührende Körperpunkt π gegen die berührte Fläche besitzt, sind nun gegeben durch die Formeln (15) und (14). Differentiirt man diese Formeln nach t, und setzt sodann für die Differentialquotienten der Variabeln g_1, g_2, g_3, a_1, a_2, ..., c_3 ihre Werthe (10) und (7) ein, so ergiebt sich:

$$w_x' = \frac{du_x}{dt} + z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} + \overline{w_x},$$

$$w_y' = \frac{du_y}{dt} + x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} + \overline{w_y},$$

$$w_z' = \frac{du_z}{dt} + y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} + \overline{w_z},$$

wo die, durch $\overline{w_x}$, $\overline{w_y}$, $\overline{w_z}$ bloss angedeuteten und nicht ausgeschriebenen Gliedersummen nur von den Variabeln (26) selbst und der Zeit t abhängen.

Substituirt man hierin für die Differentialquotienten von u_x, u_y, u_z, p, q, r ihre Werthe aus (24) und (25), und führt die Abkürzungen ein:

$$(30)\quad \begin{cases} a_{11} \equiv \frac{1}{M} + cy^2 + bz^2, \quad a_{23} \equiv a_{32} \equiv -ayz, \\ a_{22} \equiv \frac{1}{M} + az^2 + cx^2, \quad a_{31} \equiv a_{13} \equiv -bzx, \\ a_{33} \equiv \frac{1}{M} + bx^2 + ay^2, \quad a_{12} \equiv a_{21} \equiv -cxy, \\ \varrho_x \equiv \frac{l}{M} + (lz - nx)bz - (mx - ly)cy. \\ \varrho_y \equiv \frac{m}{M} + (mx - ly)cx - (ny - mz)az, \\ \varrho_z \equiv \frac{n}{M} + (ny - mz)ay - (lz - nx)bx, \end{cases}$$

so erhält man:

$$(31)\quad \begin{cases} w_x' = a_{11}R_x + a_{12}R_y + a_{13}R_z + \varrho_x N + \vartheta_x, \\ w_y' = a_{21}R_x + a_{22}R_y + a_{23}R_z + \varrho_y N + \vartheta_y, \\ w_z' = a_{31}R_x + a_{32}R_y + a_{33}R_z + \varrho_z N + \vartheta_z, \end{cases}$$

wo in den Zeichen ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z die Summen aller der Glieder zusammengefasst wurden, die frei von Reibung und Normalwiderstand sind und nur von der Zeit und den Variabeln (26) abhängen.

Setzt man diese Werthe nebst den Werthen (15) von w_x, w_y, w_z selbst in die Bedingungsgleichung (29) ein, und beachtet dass man nach (30) auch schreiben kann:

$$(32)\quad \begin{cases} \varrho_x \equiv a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n, \\ \varrho_y \equiv a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n, \\ \varrho_z \equiv a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n, \end{cases}$$

so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung zwischen R_x, R_y, R_z, N zunächst in der Form:

$$\varrho_x R_x + \varrho_y R_y + \varrho_z R_z + (l\varrho_x + m\varrho_y + n\varrho_z)N + \vartheta = 0$$

und hierin ist, weil die in l', m', n' auftretenden Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes mittelst der Gleichungen (20), (10) und (7) sich gleichfalls als blosse Functionen der Zeit und der Variabeln (26) ausdrücken lassen, auch:

$$(33) \qquad \vartheta \equiv l\vartheta_x + m\vartheta_y + n\vartheta_z + l'\vartheta_x + m'\vartheta_y + n'\vartheta_z$$

eine blosse Function dieser Variabeln und der Zeit t ist.

Setzt man weiter:

$$(34) \qquad \varrho_x \equiv \frac{l}{M} + \sigma_x, \quad \varrho_y \equiv \frac{m}{M} + \sigma_y, \quad \varrho_z \equiv \frac{n}{M} + \sigma_z,$$

und bedenkt, dass

$$(35) \qquad l^2 + m^2 + n^2 \equiv 1$$

ist, so erhält man:

$$(36) \qquad l\varrho_x + m\varrho_y + n\varrho_z \equiv \frac{1}{M} + l\sigma_x + m\sigma_y + n\sigma_z,$$

und wegen der Bedingungsgleichung (23), der die Reibungscomponenten unterworfen sind:

$$\varrho_x R_x + \varrho_y R_y + \varrho_z R_z \equiv \sigma_x R_x + \sigma_y R_y + \sigma_z R_z.$$

Nach (30) und (34) ist überdies:

$$(37) \qquad \begin{cases} \sigma_x \equiv (lz - nx)bz - (mx - ly)cy, \\ \sigma_y \equiv (mx - ly)cx - (ny - mz)az, \\ \sigma_z \equiv (ny - mz)ay - (lz - nx)bx, \end{cases}$$

also:

$$(38) \; l\sigma_x + m\sigma_y + n\sigma_z \equiv a(ny - mz)^2 + b(lz - nx)^2 + c(mx - ly)^2 \equiv \Omega.$$

Daher können wir die erhaltene Bedingungsgleichung zwischen R_x, R_y, R_z, N schliesslich auch so schreiben:

$$(39) \qquad \sigma_x R_x + \sigma_y R_y + \sigma_z R_z + \left(\frac{1}{M} + \Omega\right) N + \vartheta = 0. \;—$$

Bevor ich weiter gehe, schalte ich hier eine Bemerkung ein, die uns erst später von Nutzen sein wird. Bezeichnet man durch

$2\psi(l, m, n)$ die ganze homogene Function zweiten Grades der Variabeln l, m, n:

(40) $2\psi(l,m,n) \equiv a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}lm$,

so kann man die Formeln (32) schreiben:

(41) $$\varrho_x \equiv \psi' l, \quad \varrho_y \equiv \psi' m, \quad \varrho_z \equiv \psi' n$$

und erhält daher aus (34) und (38), wenn man von der Bedingung (35) ganz absieht, also l, m, n als ganz willkürliche Variable auffasst:

(42) $$2\psi(l, m, n)$$
$$\equiv \frac{1}{M}(l^2 + m^2 + n^2) + a(ny - mz)^2 + b(lz + nx)^2 + c(mx - ly)^2.$$

Als reciproke Trägheitsmomente sind aber die Constanten a, b, c stets positiv, die Formel lehrt also, dass $2\psi(l, m, n)$ eine *definit positive Form* zweiten Grades ist. —

Solange nun die relative Geschwindigkeit:

$$w \equiv \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

des berührenden Körperpunktes gegen seine Unterlage > 0 *bleibt*, haben nach Satz IV die Reibungscomponenten die Werthe:

(43) $$R_x = -f\varepsilon N\lambda_x, \quad R_y = -f\varepsilon N\lambda_y, \quad R_z = -f\varepsilon N\lambda_z,$$

worin $\varepsilon = \pm 1$ ist, $\varepsilon N > 0$ sein muss, und:

(44) $$\lambda_x \equiv \frac{w_x}{w}, \quad \lambda_y \equiv \frac{w_y}{w}, \quad \lambda_z \equiv \frac{w_z}{w},$$

die Richtungscosinus der Geschwindigkeit w gegen die Schwerpunktshauptaxen, nach (15), (20) und (20′) wiederum blosse Functionen von t und von den Variabeln (26) sind.

Durch Einsetzung dieser Werthe der Reibungscomponenten geht die Bedingungsgleichung (39) über in die Gleichung:

(45) $$\left\{\frac{1}{M} + \Omega - \varepsilon f(\sigma_x\lambda_x + \sigma_y\lambda_y + \sigma_z\lambda_z)\right\} N + \vartheta = 0,$$

die nunmehr den normalen Widerstand N als Function der Variabeln (26), der Zeit t und des Zeichens ε bestimmt. Hat man dies Zeichen selbst aus der Forderung $\varepsilon N > 0$ bestimmt, so liefert schliesslich die Substitution des erhaltenen Werthes von N in die Werthe (43) von R_x, R_y, R_z und mit diesen in die Gleichungen (24) und (25) diejenigen 6 Differentialgleichungen, welche zusammen mit den 12 Differentialgleichungen (10) und (7) die

Bewegung unsres Körpers auf der starren Fläche bestimmen, *solange die Geschwindigkeit $w > 0$ bleibt, oder solange der Körper auf der Fläche gleitet.* Nach dem Vorhergehenden wird aber diese Bewegung nicht durch die vollständigen, sondern durch diejenigen Lösungen der 18 Differentialgleichungen dargestellt, welche den 8 particulären Integralen (27), (28) und (21) genügen. —

Hierbei ist aber eines nicht ausser Acht zu lassen. Das eben Gesagte ist wesentlich an unsere Veraussetzung gebunden, dass der Körper gezwungen ist, auf der starren Fläche zu bleiben, es muss dagegen modificirt werden, *wenn der Körper auf der Fläche nur aufliegt und eventuell dieselbe also auch nach ihrer äusseren Seite hin zu verlassen vermag.* Dann nämlich muss der Normalwiderstand N der starren Fläche beständig im Sinne der *innern* Normalen der Körperoberfläche wirken, bei unsrer Zeichenfestsetzung also beständig $N \geqq 0$ bleiben, wenn der Körper auf der Fläche bleiben soll. In einem Momente dagegen, wo N durch Null ins Negative übergeht, trennt sich der Körper von der Fläche und fängt an, sich frei im Raume zu bewegen, womit natürlich zugleich unsere Differentialgleichungen ihre Gültigkeit verlieren.

Will man diesen Fall behandeln, der ja im Grunde viel natürlicher ist, als der von uns betrachtete, so muss man für die Bewegung des Körpers auf der Fläche immer:

$$(46) \qquad N \geqq 0 \text{ und damit } \varepsilon = +1$$

verlangen. Allerdings fällt hierdurch eine Schwierigkeit, die Bestimmung des Zeichens ε von vornherein weg, aber dafür werden auch alle Schlüsse über die verschiedenen möglichen Bewegungsphasen des Körpers auf der Fläche hinfällig, sooft sich in dem betreffenden Momente ein negativer Werth von N ergiebt, und das immer hinzufügen zu müssen, erschwert es erheblich, die Resultate kurz und doch auch gleichzeitig vollständig zu formuliren. Die Sätze gestalten sich entschieden weit einfacher und übersichtlicher für den an die Fläche gebundenen Körper, als für den nur auf dieselbe gelegten, und das ist eben auch der Grund, weshalb ich an der ersten Voraussetzung festhalte. Man braucht ja überdies im zweiten Falle nur immer die Bedingung (46) im Auge zu behalten, um sofort zu erkennen, wie die Resultate des ersten Falles zu modificiren sind.

§ 7.

Bestimmung des Zeichens ε und Ermittelung aller der Körper, für welche der Normalwiderstand der Unterlage unabhängig von der Reibung wird.

Damit die Forderung $\varepsilon N > 0$ das Zeichen ε bestimme, muss nach (45):

(47) $$\left(\frac{1}{M} + \Omega\right)^2 > f^2(\sigma_x\lambda_x + \sigma_y\lambda_y + \sigma_z\lambda_z)^2$$

sein. In dieser Ungleichung treten die Richtungscosinus λ_x, λ_y, λ_z der relativen Geschwindigkeit des berührenden Körperpunktes π gegen die bewegte Fläche nur rechter Hand auf, und nach (37) und (38) gehen in ihr von variabeln Grössen sonst nur noch die Coordinaten x, y, z dieses Punktes ein. Nach (44) und (28) aber sind λ_x, λ_y, λ_z den beiden Bedingungen unterworfen:

(48) $$\begin{cases} l\lambda_x + m\lambda_y + n\lambda_z = 0, \\ \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1. \end{cases}$$

Setzt man daher:

$$F \equiv \sigma_x\lambda_x + \sigma_y\lambda_y + \sigma_z\lambda_z - \mu(l\lambda_x + m\lambda_y + n\lambda_z) - \frac{\nu}{2}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2),$$

so erhält man zur Bestimmung der Werthe von λ_x, λ_y, λ_z, welche bei gegebener Lage des Punktes x, y, z die Summe:

(α) $$\sigma_x\lambda_x + \sigma_y\lambda_y + \sigma_z\lambda_z$$

zu einem Maximum oder Minimum machen, die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} F'\lambda_x &\equiv \sigma_x - \mu l - \nu\lambda_x = 0, \\ F'\lambda_y &\equiv \sigma_y - \mu m - \nu\lambda_y = 0, \\ F'\lambda_z &\equiv \sigma_z - \mu n - \nu\lambda_z = 0, \end{aligned}$$

die ausser λ_x, λ_y, λ_z noch die beiden neuen Unbekannten μ und ν enthalten. Diese Gleichungen ergeben zunächst in Folge der Bedingungsgleichungen (48):

(β) $$\begin{aligned} \sigma_x\lambda_x + \sigma_y\lambda_y + \sigma_z\lambda_z &= \nu, \\ l\sigma_x + m\sigma_y + n\sigma_z &= \mu, \end{aligned}$$

und sodann wegen der letzten Gleichung weiter:

$$\begin{aligned} \nu^2 &= (\sigma_x - \mu l)^2 + (\sigma_y - \mu m)^2 + (\sigma_z - \mu n)^2 \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (l\sigma_x + m\sigma_y + n\sigma_z)^2, \end{aligned}$$

oder wenn man die 3 ersten Glieder mit $l^2 + m^2 + n^2 \equiv 1$ multiplicirt:

$$(\gamma) \qquad v^2 = (n\sigma_y - m\sigma_z)^2 + (l\sigma_z - n\sigma_x)^2 + (m\sigma_x - l\sigma_y)^2.$$

Ueberdies ist:

$$F''\lambda_x\lambda_x \equiv F''\lambda_y\lambda_y \equiv F''\lambda_z\lambda_z \equiv -v,$$

und alle übrigen zweiten partiellen Differentialquotienten von F nach λ_x, λ_y, λ_z sind Null. Bei gegebenem x, y, z besitzt somit die Summe (α) nur ein Maximum und auch nur ein Minimum, und zwar ist, wenn man unter v die positive Quadratwurzel aus der rechten Seite der Formel (γ) versteht, das Maximum $= v$ und das Minimum $= -v$. Daher ist $f^2 v^2$ der grösste Werth, den die rechte Seite der Ungleichung (47) bei gegebener Lage des Berührungspunktes π zu erreichen vermag.

Soll daher diese Ungleichung für jede Lage des Berührungspunktes auf der Körperoberfläche und für jede mögliche Richtung der relativen Geschwindigkeit w erfüllt sein, so muss nothwendig der Reibungscoefficient f kleiner sein, als der kleinste Werth, den der positive Bruch:

$$(49) \qquad \frac{\frac{1}{M} + \Omega}{\sqrt{(n\sigma_y - m\sigma_z)^2 + (l\sigma_z - n\sigma_x)^2 + (m\sigma_x - l\sigma_y)^2}},$$

oder nach (18) und (37), wenn man unter $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\Omega}$ diejenigen Ausdrücke versteht, die aus σ_x, σ_y, σ_z, Ω durch Vertauschung von l, m, n mit $\varphi'x$, $\varphi'y$, $\varphi'z$ entspringen, den der Bruch:

$$\frac{\frac{1}{M}[(\varphi'x)^2 + (\varphi'y)^2 + (\varphi'z)^2] + \bar{\Omega}}{\sqrt{(\bar{\sigma}_y\varphi'z - \bar{\sigma}_z\varphi'y)^2 + (\bar{\sigma}_z\varphi'x - \bar{\sigma}_x\varphi'z)^2 + (\bar{\sigma}_x\varphi'y - \bar{\sigma}_y\varphi'x)^2}}$$

in Folge der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ der Körperoberfläche anzunehmen vermag.

Falls also nicht etwa der Nenner dieses Bruches vermöge dieser Gleichung identisch verschwindet, schreibt immer die Forderung, dass die Bedingung $\varepsilon N > 0$ das Zeichen ε bestimmen soll, dem Reibungscoefficienten f eine obere Grenze vor, die derselbe nicht überschreiten darf. Solange er unter dieser Grenze bleibt, kann man dem berührenden Körperpunkte jede beliebige Anfangslage auf der Körperoberfläche sowohl als auch auf der starren Fläche und seiner relativen Geschwindigkeit w jede beliebige tangentiale Anfangsrichtung vorschreiben, immer wird

durch den gegebenen Anfangszustand das Zeichen ε und damit auch die Bewegung des Körpers auf der Fläche, solange $w > 0$ bleibt, eindeutig bestimmt. Ist dagegen f grösser als jene untere Grenze, so kann man den Anfangszustand des Körpers bald so wählen, dass die Bedingung $\varepsilon N > 0$ das Zeichen ε unbestimmt lässt und daher dem Körper zwei verschiedene Gleitungsbewegungen offen stehen, und bald wieder auch so, dass $\varepsilon N < 0$ bleibt für jedes Zeichen ε und damit der gewählte Anfangszustand des Körpers selbst sich als unmöglich herausstellt.

Ganz anders dagegen verhält sich die Sache in dem vorhin ausgenommenen besonderen Falle, indem dann der Normalwiderstand N überhaupt unabhängig von f und also auch von ε wird.

In der That, soll der Nenner des Bruches (49) verschwinden, so muss:

$$(50)\qquad n\sigma_y - m\sigma_z = l\sigma_z - n\sigma_x = m\sigma_x - l\sigma_y = 0$$

werden. Da aber nach (38)

$$l\sigma_x + m\sigma_y + n\sigma_z \equiv \Omega$$

ist, so verlangt dies:

$$(51)\qquad \sigma_x = \Omega l, \qquad \sigma_y = \Omega m, \qquad \sigma_z = \Omega n,$$

wobei ich einer späteren Anwendung halber gleich hinzufügen will, dass man diese 3 Gleichungen auch ersetzen kann durch die folgenden:

$$(51')\qquad l = \sigma\psi' l, \qquad m = \sigma\psi' m, \qquad n = \sigma\psi' n;$$

denn diese ergeben nach (42) und (38)

$$1 = \sigma\left(\frac{1}{M} + \Omega\right)$$

und fallen daher zusammen mit den Gleichungen, welche sich nach (34) für ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z oder $\psi' l$, $\psi' m$, $\psi' n$ aus (51) ergeben. Ueberdies unterliegen λ_x, λ_y, λ_z der Bedingung

$$(28')\qquad l\lambda_x + m\lambda_y + n\lambda_z = 0,$$

also ziehen die Bedingungen (51) die Gleichung nach sich

$$\sigma_x\lambda_x + \sigma_y\lambda_y + \sigma_z\lambda_z = 0.$$

In Folge dieser aber liefert die Gleichung (45) für N den von εf freien Werth:

$$(52)\qquad N = -\frac{\vartheta}{\frac{1}{M} + \Omega}$$

und die Forderung $\varepsilon N > 0$ bestimmt also (ausser, wenn etwa gerade $\vartheta = 0$ sein sollte) stets das Zeichen ε, wie gross auch der Reibungscoefficient angenommen werden mag.

Umgekehrt führt die Forderung, dass die Gleichung (45) N stets unabhängig von f ergeben solle, wieder zu dem Resultate, dass die Gleichungen (51) eine blosse Folge der Gleichung (16) der Körperoberfläche sein müssen.

Denn in jedem gegebenen einzelnen Augenblicke, den man ja immer als den Anfangsmoment der Gleitungsbewegung des Körpers betrachten kann, sind die Richtungscosinus der relativen Geschwindigkeit w nur den beiden Bedingungen (48) unterworfen und von diesen kommt die zweite nicht in Betracht, sooft es sich um das Verschwinden einer linearen homogenen Function dieser Richtungscosinus handelt. Soll daher die Gleichung (45) in jedem gegebenen Momente und bei jeder zulässigen Annahme über den augenblicklichen Bewegungszustand des Körpers den Normalwiderstand N frei von f ergeben, so muss die Summe (α) für alle beliebigen Werthe von λ_x, λ_y, λ_z verschwinden, die der Gleichung (28′) genügen, und das verlangt eben wieder, dass die Gleichungen (50) und damit auch die Gleichungen (51) eine blosse Folge der Gleichung (16) sein müssen.

Da überdies nach (23) die Reibungscomponenten R_x, R_y, R_z an dieselbe Gleichung (28′) gebunden sind, wie die Richtungscosinus λ_x, λ_y, λ_z, so zeigt die allgemeine Formel (39), dass, sooft diese Forderung erfüllt ist, der Normalwiderstand N überhaupt immer den von der Reibung unabhängigen Werth (52) annimmt, gleichviel welches Gesetz man für die Reibung zu Grunde legen mag.

Setzen wir für σ_x, σ_y, σ_z ihre Werthe (37) ein, so hat sich somit ergeben:

Damit der Normalwiderstand stets unabhängig von der Reibung sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die 3 Gleichungen:

$$(53)\qquad \begin{cases} (lz - nx)bz - (mx - ly)cy = \Omega l, \\ (mx - ly)cx - (ny - mz)az = \Omega m, \\ (ny - mz)ay - (lz - nx)bx = \Omega n, \end{cases}$$

(Gleichungen, die man auch ersetzen kann durch die 3 Gleichungen (51′)) eine blosse Folge der Gleichung der Körperoberfläche werden. Aus diesen Gleichungen aber folgt, wenn man sie mit x, y, z, resp. mit:

$$a(ny - mz), \qquad b(lz - nx), \qquad c(mx - ly)$$

multiplicirt und addirt:

$$0 = \Omega(lx + my + nz), \quad \text{und:}$$

$$0 = \Omega\{al(ny - mz) + bm(lz - nx) + cn(mx - ly)\},$$

sie verlangen daher entweder:

$$\Omega = 0,$$

oder aber gleichzeitig:

$$(54) \quad \begin{cases} lx + my + nz = 0, \\ al(ny - mz) + bm(lz - nx) + cn(mx - ly) = 0. \end{cases}$$

Nach (38) zerfällt die Gleichung $\Omega = 0$ in die 3 Gleichungen:

$$(55) \quad ny - mz = 0, \qquad lz - nx = 0, \qquad mx - ly = 0,$$

welche die Gleichungen (53) identisch erfüllen, und von denen zwei schon die dritte nach sich ziehen, und ebenso ergeben sich, wie schon unmittelbar daraus folgt, dass auch die ursprünglichen Gleichungen (50) sich auf zwei Gleichungen reduciren, aus den beiden Gleichungen (54) umgekehrt wieder die Gleichungen (53).

Ersetzt man nun die Gleichung (16) der Körperoberfläche durch ihre Auflösung $z = z(x, y)$, so werden die Richtungscosinus l, m, n der Normale proportional mit

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad -1.$$

Die Forderungen (55) schreiben also dieser Auflösung die beiden partiellen Differentialgleichungen vor:

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + x = 0, \qquad z\frac{\partial z}{\partial y} + y = 0,$$

d. h. sie verlangen, dass die Gleichung der Körperoberfläche die Form besitze:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$$

Die Axen x, y, z aber waren die Schwerpunktshauptaxen des Körpers. Die Forderung eines von der Reibung unabhängigen Normalwiderstandes wird also einmal erfüllt, sooft der Körper eine solche Kugel ist, deren Schwerpunkt im Mittelpunkte liegt.

Sie wird ausserdem aber noch erfüllt, sooft die Gleichung der Körperoberfläche die beiden Gleichungen (54) nach sich zieht, ihre Auflösung $z = z(x,y)$ also eine gemeinsame Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen ist:

$$(54') \quad \begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \\ (a-b)z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = (b-c)x\frac{\partial z}{\partial y} + (c-a)y\frac{\partial z}{\partial x}. \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist die allgemeine partielle Differentialgleichung der Kegel, deren Spitze mit dem Anfangspunkte S der Coordinaten x, y, z, also mit dem Schwerpunkte der Kegel zusammenfällt. Ein Kegel aber, dessen Schwerpunkt zugleich seine Spitze ist, muss nothwendig ein Doppelkegel sein, und kann daher gar nicht als ein einziger, wirklich starr zusammenhängender Körper gelten.[1]) Es kann somit nur noch die Ausartung des Kegels in eine durch S gehende Ebene, d. h. der Fall in Betracht kommen, wo der Körper sich auf eine Scheibe reducirt. Die Scheibenebene ist überdies immer eine der drei Schwerpunktshauptebenen der Scheibe und kann daher geradezu etwa zur xy-Ebene des Axensystems $Sxyz$ genommen werden. Hierdurch erhält die Scheibenfläche die Gleichung $z = 0$ und diese befriedigt offenbar gleichzeitig die beiden partiellen Differentialgleichungen (54'). Wir sehen demnach:

Bei der Bewegung auf starrer Fläche besitzen, und zwar gleichviel ob die Fläche ruht oder selbst in gegebener Bewegung begriffen ist, unter Voraussetzung bloss einpunktiger Berührung (von Fläche auf Fläche) nur diejenigen Kugeln, deren Schwerpunkt in den Mittelpunkt fällt, und (unter Vernachlässigung ihrer Dicke) die Scheiben die Eigenschaft, dass der normale Widerstand, den sie von der starren Fläche erfahren, stets unabhängig ist von der Reibung.

Der in Parenthese gemachte Zusatz „von Fläche auf Fläche“; der zunächst nur daran erinnern sollte, dass wir eben immer nur Berührung von Fläche mit Fläche in Betracht gezogen haben,

---

1) Die beiden partiellen Differentialgleichungen (54') können, falls nicht $a = b = c$ ist, und damit die zweite Gleichung eine Identität wird, nur eine Lösung mit höchstens einer willkürlichen Constante gemein haben, und man sieht sofort, dass die Annahme

$$z^2 = \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2$$

beiden Gleichungen genügt, sobald man ihre beiden willkürlichen Constanten δ_1 und δ_2 der Bedingung unterwirft

$$(a-b)\delta_1\delta_2 = (b-c)\delta_2 + (c-a)\delta_1.$$

Die beiden Gleichungen (54') führen also auf die hierdurch definirte Schaar von ∞^1 Kegel zweiten Grades.

und daher nicht ohne Weiteres berechtigt sind, unsre Resultate auf den Fall eines Körpers zu übertragen, der mit einer Spitze oder mit einer Kante auf starrer Fläche sich fortbewegt, kann aber nachträglich auch ganz weggelassen werden. Denn man braucht nur die Differentialgleichungen der Bewegung anzusetzen z. B für einen schweren homogenen Stab, der mit einem Ende, sowie für eine ebensolche Kreisscheibe, die mit ihrem Rande auf einer festen Horizontalebene gleitet, um sofort zu übersehen, dass bei solchem Gleiten der normale Widerstand der starren Fläche niemals für jeden gegebenen Anfangszustand des Körpers unabhängig von der Reibung wird.

Lässt man dagegen die Breite der Scheibe mehr und mehr abnehmen, bis die Scheibe schliesslich in einen *Stab* degenerirt, so erhellt, dass auch für einen solchen, solange er mit seiner Längsrichtung auf der starren Fläche gleitet, der normale Widerstand unabhängig von der Reibung sein muss. Desgleichen kommt es bei einem Körper, dessen Begrenzung von verschiedenen Flächen gebildet wird, in allem Vorhergehenden immer nur darauf an, mit welcher von diesen Flächen er die Unterlage berührt. In unserem Satze liegt daher unmittelbar noch, dass ebenso wie für diejenigen Vollkugeln, die ihren Schwerpunkt im Mittelpunkt haben, auch für jeden Körper, der theilweise von einer Kugelfläche begrenzt wird, und dessen Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte dieser Kugel zusammenfällt, der Normalwiderstand unabhängig von der Reibung bleibt, solange der Körper mit der Kugelfläche auf der Unterlage gleitet. —

Unsere Differentialgleichungen lassen sich sofort und ohne jede neue Rechnung ausdehnen auf *die gegenseitige Bewegung zweier Körper, die auf einander gleiten und sich dabei immer nur einpunktig berühren.* Man braucht zu dem Ende nur die Schwerpunktshauptaxen des zweiten Körpers zu den Axen x_1, x_2, x_3 zu nehmen. Dann bleiben allerdings die Grössen U_1, U_2, U_3, P_1, P_2, P_3 nicht mehr gegebene Functionen der Zeit t, sondern werden jetzt vielmehr neue Unbekannte. Zu ihrer Bestimmung dient aber dasjenige System von 6 Differentialgleichungen erster Ordnung, welches für den zweiten Körper dieselbe Rolle spielt, wie die Gleichungen (24) und (25) für den ersten. Fügt man ausserdem unsern 18 Differentialgleichungen (7), (10), (24), (25) noch hinzu die 3 Differentialgleichungen (8) und die 9 Differentialgleichungen (2),

so erhält man im ganzen 36 Differentialgleichungen erster Ordnung zur gleichzeitigen Bestimmung der 18 alten Unbekannten (26) und der 18 neuen:

$$U_1, U_2, U_3, P_1, P_2, P_3, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$$

und zu diesen 36 Gleichungen treten als neue vorgeschriebene particuläre Integrale selbst wieder hinzu die 6 Bedingungsgleichungen zwischen den 9 Richtungscosinus $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$. Nach dem Princip der Gleichheit von Actio und Reactio sind überdies die Widerstandskräfte, welche die beiden Körper im Berührungspunkte auf einander ausüben, gleich und entgegengesetzt. In den 6 neuen Gleichungen (24) und (25) treten also derselbe Normalwiderstand und dieselbe Reibungskraft auf, wie in den alten, nur in entgegengesetzter Richtung und in ihren Componenten nach den Schwerpunktshauptaxen x_1, x_2, x_3 des zweiten Körpers.

Frägt man sich nun aber auch in diesem Falle, wann der normale Widerstand der beiden Körper gegen einander unabhängig von der Reibung wird, so erhält man zwar wiederum 3 den Gleichungen (53) analog gebaute Bedingungen, und diese lassen im Besonderen sofort erkennen, dass auch bei der gegenseitigen Bewegung zweier Kugeln auf einander, so oft ihre Schwerpunkte mit den Mittelpunkten zusammenfallen, und ebenso bei der Bewegung einer solchen Kugel und einer Scheibe auf einander, der gegenseitige Normalwiderstand stets unabhängig ist von der Reibung. Aber diese Bedingungen enthalten ausser den Coordinaten des Berührungspunktes und den Richtungscosinus der Berührungsnormalen in Bezug auf die Schwerpunktshauptaxen der beiden Körper auch noch die Richtungscosinus a_x, b_x, c_x dieser beiderlei Axen gegen einander, und daher scheint es mir sehr fraglich, ob man aus ihnen überhaupt allgemeine Resultate über die Formen der beiden Körper wird gewinnen können. —

§ 8.

Die Reibung in Ruhe und die Differentialgleichungen des Rollens.

Gehen wir nunmehr aber wieder zurück zum allgemeinen Falle, wo also der Normalwiderstand auch abhängig sein kann von der Reibung, und fassen jetzt einen solchen Moment $t = t_0$ ins Auge, *in welchem die relative Geschwindigkeit w des gerade berührenden Körperpunktes gegen die starre Fläche Null ist,* in

welchem also w_x, w_y, w_z sämmtlich verschwinden, und die Bedingungsgleichung (29) sich auf:

(29′) $$lw'_x + mw'_y + nw'_z = 0$$

reducirt.

Sollen dann diese Geschwindigkeitscomponenten nicht bloss augenblicklich Null sein, sondern auch wenigstens eine Zeit lang Null bleiben, *soll also der Körper im Momente t_0 zu rollen beginnen,* so müssen nothwendig auch ihre ersten Differentialquotienten w'_x, w'_y, w'_z in diesem Momente verschwinden. Nach (31) und (23) müssen daher die augenblicklichen Werthe R_{x0}, R_{y0}, R_{z0} und N_0 der Reibungscomponenten R_x, R_y, R_z und des Normalwiderstands N den 4 linearen Gleichungen genügen:

(56) $$\begin{cases} a_{11}R_{x0} + a_{12}R_{y0} + a_{13}R_{z0} + \varrho_x N_0 + \vartheta_x = 0, \\ a_{21}R_{x0} + a_{22}R_{y0} + a_{23}R_{z0} + \varrho_y N_0 + \vartheta_y = 0, \\ a_{31}R_{x0} + a_{32}R_{y0} + a_{33}R_{z0} + \varrho_z N_0 + \vartheta_z = 0, \\ lR_{x0} + m R_{y0} + nR_{z0} = 0. \end{cases}$$

Die Determinante dieser Gleichungen:

(57) $$D_0 \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \varrho_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \varrho_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \varrho_z \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}$$

reducirt sich in Folge der Formeln (32) auf:

$$D_0 \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ l & m & n & -1 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

und wenn man für die Elemente $a_{i\varkappa}$ ihre Werthe (30) einsetzt, findet man durch Ausrechnung der Determinante rechts:

(57′) $$D_0 \equiv -\frac{1}{M}\Big\{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{M}[(b+c)x^2 + (c+a)y^2 + (a+b)z^2] + bcx^4 + cay^4 + abz^4 + a(b+c)y^2z^2 + b(c+a)z^2x^2 + c(a+b)x^2y^2\Big\}.$$

Da die Constanten a, b, c stets positiv sind, so kann hiernach die Determinante D_0 niemals verschwinden, und die Gleichungen (56) bestimmen folglich stets ihre 4 Unbekannten R_{x0}, R_{y0}, R_{z0}, N_0 eindeutig als Functionen der Zeit t und der 18 Variabeln (26).

Wenn Reibungscomponenten und Normalwiderstand vom Momente t_0 an beständig diese Werthe R_{x0}, R_{y0}, R_{z0} und N_0 beibehielten, so würden die Differentialquotienten w'_x, w'_y, w'_z und mit ihnen, da sie nach Voraussetzung in diesem Momente Null sind, auch die Geschwindigkeitscomponenten w_x, w_y, w_z selbst beständig Null bleiben. Es würde dann also vom Momente t_0 an die Bewegung des Körpers auf der starren Fläche in ein reines *Rollen* übergehen.

Um die Differentialgleichungen dieser Rollbewegung zu erhalten, braucht man daher nur in den Gleichungen (24) und (25)

$$R_x = R_{x0}, \quad R_y = R_{y0}, \quad R_z = R_{z0}, \quad N = N_0$$

zu setzen. In Folge der Bestimmung von R_{x0}, R_{y0}, R_{z0}, N_0 erhalten hierdurch aber unsre 18 Differentialgleichungen die 3 Integrale:

$$w_x = \text{const}, \quad w_y = \text{const}, \quad w_z = \text{const}$$

und nach (15) bestimmen diese 3 Integrale die 3 Variabeln

$$u_x, \quad u_y, \quad u_z$$

als Functionen der Zeit t und der 15 Variabeln:

$$(58) \qquad p, q, r, g_1, g_2, g_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3.$$

Ueberdies haben in der Rollbewegung die Integrationsconstanten dieser 3 Integrale den gemeinsamen Werth Null. Daraus folgt unmittelbar, *dass die Differentialgleichungen des Rollens sich reduciren auf diejenigen 15 Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den Variabeln (58) und der Zeit t*, die man erhält, wenn man aus den 3 Gleichungen (10), sowie aus den Auflösungen R_{x0}, R_{y0}, R_{z0}, N_0 der Gleichungen (56), also aus den Grössen ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z die Variabeln u_x, u_y, u_z durch die 3 mittelst der Formeln (15) gebildeten Gleichungen

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0$$

eliminirt, mit diesen Werthen von R_{x0}, R_{y0}, R_{z0}, N_0 die 3 Differentialgleichungen bildet:

$$(59) \begin{cases} \frac{1}{a}\frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) qr + L_x + (ny - mz) N_0 + y R_{z0} - z R_{y0}, \\ \frac{1}{b}\frac{dq}{dt} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) rp + L_y + (lz - nx) N_0 + z R_{x0} - x R_{z0}, \\ \frac{1}{c}\frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) pq + L_z + (mx - ly) N_0 + x R_{y0} - y R_{x0}, \end{cases}$$

und endlich noch die 9 Gleichungen (7) hinzufügt; und diese 15 Differentialgleichungen sind dann zu integriren unter Berücksichtigung der vorgeschriebenen 7 particulären Integrale (21) und (27).[1])

Ob nun aber wirklich Rollen eintritt, oder nicht, das hängt von dem Vorzeichen des Werthes Δ_0 ab, den die Differenz:

(60) $$\Delta \equiv R_{x0}^2 + R_{y0}^2 + R_{z0}^2 - f^2 N_0^2$$

im betrachteten Momente t_0 besitzt. Nach Satz III kann die absolute Stärke der Reibung nie die obere Grenze $f|N|$ überschreiten, und daher Rollen nur im Falle

$$\Delta_0 \leqq 0$$

sich einstellen. Zugleich tritt es nach Satz V sicher im Momente t_0 ein, wenn $\Delta_0 < 0$ ist. Die Variabeln (58) genügen dann von diesem Augenblicke an den angegebenen 15 Differentialgleichungen, und das Rollen hält jedenfalls solange an, als für diejenigen Lösungen dieser Gleichungen, welche den bekannten Anfangswerthen jener Variabeln zur Zeit $t = t_0$ entsprechen, $\Delta < 0$ bleibt.

§ 9.

Die Reibung bei entstehender Bewegung. Der Hauptfall $\Delta_0 > 0$.

Wenn dagegen $\Delta_0 > 0$ ist, so können im Momente t_0 Reibungscomponenten und Normalwiderstand nicht diejenigen Werthe

---

1) Handelt es sich ausschliesslich um das *Rollen*, nimmt man also von vornherein an, dass die beiden sich berührenden Flächen vollkommen rauh sind, so ist die Einführung des normalen Widerstandes N unnöthig und bloss ein Umweg. Man kommt dann einfacher zum Ziele, wenn man überall $N_0 \equiv 0$ setzt und damit zugleich unter R_{x0}, R_{y0}, R_{z0} die Componenten des Gesammtwiderstandes der starren Unterlage gegen den auf ihr rollenden Körper versteht. Hierdurch kommt die Bedingung (23) in Wegfall und es bleiben zur Bestimmung von R_{x0}, R_{y0}, R_{z0} nur die 3 Gleichungen übrig, auf die sich die 3 ersten Gleichungen (56) durch die Annahme $N_0 = 0$ reduciren. Nachträglich kann man dann, wenn dies aus irgend welchem Grunde wünschenswerth erscheint, den normalen Widerstand N_0 der starren Fläche als die normale Componente ihres Gesammtwiderstandes aus der Formel:

$$N_0 = lR_{x0} + mR_{y0} + nR_{z0}$$

berechnen, womit man in den Differenzen:

$$R_{x0} - lN_0\,,\ R_{y0} - mN_0\,,\ R_{z0} - nN_0$$

zugleich auch die Componenten der Reibung gefunden hat.

R_{xo}, R_{yo}, R_{zo} und N_0 besitzen, die sich aus der Voraussetzung ergaben, dass in diesem Momente mit w zugleich auch

$$w_1 = \sqrt{w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2}$$

verschwinden sollte, es muss also augenblicklich nothwendig $w_1 > 0$ sein. In diesem Falle gehen daher im Momente t_0 die Richtungscosinus λ_x, λ_y, λ_z der relativen Geschwindigkeit w des berührenden Körperpunktes über in:

$$\frac{w_x'}{w_1},\ \frac{w_y'}{w_1},\ \frac{w_z'}{w_1},$$

nach Satz IV nehmen folglich gleichzeitig die Reibungscomponenten die Werthe an:

$$R_x = -f\varepsilon N\frac{w_x'}{w_1},\ R_y = -f\varepsilon N\frac{w_y'}{w_1},\ R = -f\varepsilon N\frac{w_z'}{w_1},$$

wo wieder das Zeichen $\varepsilon = \pm 1$ der Bedingung $\varepsilon N > 0$ unterliegt, und aus (31) und (29') erhält man zur Bestimmung der augenblicklichen Werthe von w_x', w_y', w_z', N die Gleichungen:

$$w_x' = -\frac{f\varepsilon N}{w_1}(a_{11}w_x' + a_{12}w_y' + a_{13}w_z') + \varrho_x N + \vartheta_x,$$

$$w_y' = -\frac{f\varepsilon N}{w_1}(a_{21}w_x' + a_{22}w_y' + a_{23}w_z') + \varrho_y N + \vartheta_y,$$

$$w_z' = -\frac{f\varepsilon N}{w_1}(a_{31}w_x' + a_{32}w_y' + a_{33}w_z') + \varrho_z N + \vartheta_z,$$

$$lw_x' + mw_y' + nw_z' = 0.$$

Führt man an Stelle der ursprünglichen 4 neue Unbekannte ϖ, ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z durch die Formeln ein:

$$(61)\quad w_1 = f\varepsilon N\varpi,\ f\varepsilon N\frac{w_x'}{w_1} = \varpi_x,\ f\varepsilon N\frac{w_y'}{w_1} = \varpi_y,\ f\varepsilon N\frac{w_z'}{w_1} = \varpi_z,$$

sodass in Folge der Bedingungen $w_1 > 0$ und $\varepsilon N > 0$ nothwendig auch $\varpi > 0$ sein muss, so vereinfachen sich diese Gleichungen zu:

$$(62)\quad \begin{cases} -(\varpi + a_{11})\varpi_x - a_{12}\varpi_y - a_{13}\varpi_z + \varrho_x N + \vartheta_x = 0, \\ -a_{21}\varpi_x - (\varpi + a_{22})\varpi_y - a_{23}\varpi_z + \varrho_y N + \vartheta_y = 0, \\ -a_{31}\varpi_x - a_{32}\varpi_y - (\varpi + a_{33})\varpi_z + \varrho_z N + \vartheta_z = 0, \\ l\varpi_x + m\varpi_y + n\varpi_z = 0, \end{cases}$$

und wegen der Bedeutung von w_1 tritt hierzu noch die Gleichung:

$$\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2 = f^2N^2.$$

Die Gleichungen (62) sind linear in Bezug auf die 4 Unbekannten ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z, N, und besitzen die Determinante:

$$(64)\qquad D(\varpi) \equiv - \begin{vmatrix} \varpi + a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \varrho_x \\ a_{21}, & \varpi + a_{22}, & a_{23}, & \varrho_y \\ a_{31}, & a_{32}, & \varpi + a_{33}, & \varrho_z \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}.$$

Nach (57) reducirt sich diese für $\varpi = 0$ auf $-D_0$, nach (57′) ist daher $D(0)$ sicher > 0. Weiter ist:

$$\begin{aligned}\frac{dD(\varpi)}{d\varpi} \equiv\ & \varrho_x\{l(2\varpi + a_{22} + a_{33}) - m a_{21} - n a_{31}\} \\ & + \varrho_y\{m(2\varpi + a_{33} + a_{11}) - n a_{32} - l a_{12}\} \\ & + \varrho_z\{n(2\varpi + a_{11} + a_{22}) - l a_{13} - m a_{23}\},\end{aligned}$$

und dafür kann man nach (32) schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{dD(\varpi)}{d\varpi} \equiv 2(l\varrho_x + m\varrho_y + n\varrho_z)\varpi + (l\varrho_x + m\varrho_y + n\varrho_z)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\ - (\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2).\end{aligned}$$

Nach (36) und (38) ist nun auch:

$$l\varrho_x + m\varrho_y + n\varrho_z$$

stets positiv, und aus (32) folgt:

$$\begin{aligned}&(l\varrho_x + m\varrho_y + n\varrho_z)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - (\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2) \\ &\equiv (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)(m^2 + n^2) + (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)(n^2 + l^2) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(l^2 + m^2) \\ &+ 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})mn + 2(a_{22}a_{31} - a_{23}a_{21})nl + 2(a_{33}a_{12} - a_{31}a_{32})lm.\end{aligned}$$

Setzt man aber zur Abkürzung:

$$bcx^2 + cay^2 + abz^2 \equiv \varrho,$$

so folgt aus den Werthen (30) der a_{ik}:

$$a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \equiv \frac{1}{M^2} + \frac{1}{M}\{a(y^2 + z^2) + (b + c)x^2\} + \varrho x^2,$$

$$a_{33}a_{11} - a_{31}^2 \equiv \frac{1}{M^2} + \frac{1}{M}\{b(z^2 + x^2) + (c + a)y^2\} + \varrho y^2,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \equiv \frac{1}{M^2} + \frac{1}{M}\{c(x^2 + y^2) + (a + b)z^2\} + \varrho z^2,$$

$$a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} \equiv -\left(\frac{a}{M} + \varrho\right)yz,$$

$$a_{22}a_{31} - a_{23}a_{21} \equiv -\left(\frac{b}{M} + \varrho\right)zx,$$

$$a_{33}a_{12} - a_{31}a_{32} \equiv -\left(\frac{c}{M} + \varrho\right)xy.$$

Unter Beachtung von (35) erhält man hiernach:

$$(l\varrho_x + m\varrho_y + n\varrho_y)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - (\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2)$$

$$\equiv \frac{2}{M^2} + \frac{1}{M}\{[a(y^2+z^2)+(b+c)x^2](m^2+n^2)+[b(z^2+x^2)+(c+a)y^2](l^2+m^2)$$

$$+[c(x^2+y^2)+(a+b)z^2](l^2+m^2)-2ayzmn-2bzxnl-2cxylm\}$$

$$+\varrho\{x^2(m^2+n^2)+y^2(n^2+l^2)+z^2(l^2+m^2)-2yzmn-2zxnl-2xylm\}$$

$$\equiv \frac{2}{M^2} + \frac{1}{M}\{(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2+a(ny-mz)^2+b(lz-nx)^2+c(mx-ly)^2\}$$

$$+(bcx^2+cay^2+abz^2)\{(ny-mz)^2+(lz-nx)^2+(mx-ly)^2\}.$$

In dem Werthe des Differentialquotienten $\frac{dD(\varpi)}{d\varpi}$ sind also beide Coefficienten stets > 0 und damit ist auch dieser Differentialquotient selbst sicher > 0 für jedes $\varpi \geqq 0$.

Wegen $D(o) > 0$ bleibt daher die Determinante $D(\varpi)$ ebenfalls > 0 für jedes solche ϖ, und die Gleichungen (62) bestimmen, so lange ϖ nicht < 0 wird, stets die 4 Unbekannten ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z und N als Functionen von ϖ; und zwar ergeben sie, da von den ersten partiellen Differentialquotienten ihrer Determinante nur die nach ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z (und l, m, n) genommenen quadratisch, die übrigen aber linear in ϖ sind, für diese Unbekannte Werthe von der Form:

$$(65)\quad \begin{cases} D(\varpi)\cdot\varpi_x = \mathfrak{a}_1\varpi + \mathfrak{b}_1, & D(\varpi)\cdot\varpi_y = \mathfrak{a}_2\varpi + \mathfrak{b}_2, \\ D(\varpi)\cdot\varpi_z = \mathfrak{a}_3\varpi + \mathfrak{b}_3, & D(\varpi)N = \mathfrak{a}\varpi^2 + \mathfrak{b}\varpi + \mathfrak{c}. \end{cases}$$

Die Substitution dieser Auflösungen der Gleichungen (62) in die Gleichung (63) liefert dann schliesslich für die letzte Unbekannte ϖ die Gleichung vierten Grades:

$$(66)\quad \chi(\varpi) \equiv f^2(\mathfrak{a}\varpi^2 + \mathfrak{b}\varpi + \mathfrak{c})^2 - (\mathfrak{a}_1\varpi + \mathfrak{b}_1)^2 - (\mathfrak{a}_2\varpi + \mathfrak{b}_2)^2$$
$$- (\mathfrak{a}_3\varpi + \mathfrak{b}_3)^2 = 0.$$

Nun haben, abgesehen von dem neu aufgetretenen ϖ, in den Gleichungen (62) alle Coefficienten dieselben Werthe wie in den Gleichungen (56), da ja beide Systeme sich auf denselben Moment t_0, in welchem $w_x = w_y = w_z = 0$ ist, und auf dieselben augenblicklichen Werthe der Variabeln (58) beziehen. Die Gleichungen (62) reduciren sich aber auf die Gleichungen (56), wenn man:

$$\varpi = 0, \quad \varpi_x = -R_{xo}, \quad \varpi_y = -R_{yo}, \quad \varpi_z = -R_{zo}, \quad N = N_0$$

setzt. Aus den Auflösungen (65) der Gleichungen (62) ergeben sich daher sofort die Formeln:

$$D(o)R_{xo} = -\mathfrak{b}_1,\ D(o)R_{yo} = -\mathfrak{b}_2,\ D(o)R_{zo} = -\mathfrak{b}_3$$
$$D(o)N_0 = \mathfrak{c}$$

als Auflösungen der Gleichungen (56), und in Folge der Voraussetzung, dass die Differenz (60) im Momente t_0 einen positiven Werth besitzen sollte, ist daher:

$$f^2\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{b}_2^2 - \mathfrak{b}_3^2 \equiv \chi(o) < 0.$$

Hiernach besitzt die Gleichung (66) jedenfalls eine positive und eine negative Wurzel ϖ. Wegen der Bedingung. $\varpi > 0$ ist die negative Wurzel von vornherein zu verwerfen. Nehmen wir dagegen für ϖ die positive Wurzel, so liefert die letzte Formel (65) sicher einen von Null verschiedenen Werth von N. Denn dann wird $D(\varpi)$ sicher $\neq 0$; nach (66) und (65) könnte daher N nur gleichzeitig mit ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z verschwinden, und nach (62) könnte dies wieder nur eintreten, wenn ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z im Momente t_0 gleichfalls verschwänden. Dann aber würden die Gleichungen (56) nothwendig auch:

$$R_{xo} = R_{yo} = R_{zo} = N_0 = 0$$

verlangen, und das ist unmöglich, da ja augenblicklich:

$$R_{xo}^2 + R_{yo}^2 + R_{zo}^2 - f^2N_0^2 > 0$$

sein sollte. Von den Werthen von ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z, N, welche die Gleichungen (65) ergeben, wenn man die positive Wurzel ϖ der Gleichung (66) nimmt, ist daher in der That der letzte und zugleich auch wenigstens einer von den drei ersten sicher von Null verschieden. Das Zeichen ε bestimmt sich daher eindeutig aus der Gleichung $\varepsilon N > 0$, oder:

$$(67) \qquad \varepsilon(\mathfrak{a}\varpi^2 + \mathfrak{b}\varpi + \mathfrak{c}) > 0,$$

und damit erhält man aus (61) auch für w_1, w_x', w_y', w_z' eindeutig bestimmte Werthe, von denen der erste > 0 und mindestens einer der 3 letzten $\neq 0$ ist.

In einem Momente t_0, wo $w = 0$ und $\Delta > 0$ ist, wird demnach $w_1 \equiv \frac{dw}{dt}$ keinesfalls Null; in voller Uebereinstimmung mit dem Gesetze V tritt also sicher *Gleiten* ein, und die Bewegung des Körpers gehorcht von $t = t_0$ an wieder den Gleichungen (24) und (25) mit dem durch (67) eindeutig bestimmten Zeichen ε

und den nach (45) und (43) damit zugleich vollständig bestimmten Werthen von N, R_x, R_y, R_z.

Im Gegensatz zu der in § 5 betrachteten ebenen Bewegung, wo in diesem Falle das Gleiten stets eindeutig bestimmt war, erhebt sich nun aber hier die leidige Frage, *ob denn unter der Annahme* $\Delta_0 > 0$ *die Gleichung* (66) *auch stets nur eine einzige positive Wurzel* ϖ *besitzt?* Das negative Zeichen von $\chi(0)$ sagt ja an sich nichts weiter aus, als dass diese Gleichung entweder nur eine oder aber 3 positive Wurzeln zulassen muss. Existirten aber 3 verschiedene positive Wurzeln so würden denselben auch 3 verschiedene zulässige Anfangswerthsysteme von w_1, w_x', w_y', w_z' zugehören, dem Körper also vom Momente t_0 an 3 verschiedene Gleitungsbewegungen offen stehen, die an sich alle 3 vollkommen gleichberechtigt wären. Es ist mir nur im Falle der mit ihrer Ebene auf der starren Fläche gleitenden Scheibe, aber bereits nicht mehr für die Kugel mit dem Schwerpunkt im Centrum, gelungen, die Unmöglichkeit von mehr als einer positiven Wurzel festzustellen, dagegen habe ich allerdings auch noch kein Beispiel gefunden, in welchem wirklich 3 positive Wurzeln vorhanden wären. Ich muss es daher dahingestellt sein lassen, ob unter Umständen hier nicht noch eine grössere Vieldeutigkeit auftreten könnte, als im Falle eines von der Reibung abhängigen Normalwiderstandes bei der Frage nach derjenigen Gleitungsbewegung, die, bei von Null verschiedener Anfangsgeschwindigkeit w, einem gegebenen Anfangszustande des Körpers entspricht. Allerdings liesse sich diese Möglichkeit einer Dreideutigkeit durch eine weitere Ausbildung des Princips VI wieder beseitigen. Man könnte nämlich sagen: Wenn die Reibung wirklich unter allen Umständen stets das Streben hat, den Körperpunkt, welcher gerade die starre Fläche berührt, wenn irgend möglich zu relativer Ruhe zu bringen, so wird sie eben auch im vorliegenden Falle, wo er nicht in Ruhe bleiben kann, doch dafür sorgen, dass er die momentane relative Ruhelage wenigstens nur möglichst zögernd verlässt, dass also der Anfangswerth von $w_1 = \frac{dw}{dt}$ möglichst klein wird. Hiernach würde man, falls wirklich 3 positive Wurzeln existiren sollten, doch immer nur diejenige zu nehmen haben, für welche

$$w_1 = f\varepsilon N\varpi = f\varepsilon \cdot \frac{\mathfrak{a}\varpi^2 + \mathfrak{b}\varpi + \mathfrak{c}}{D(\varpi)}$$

den kleinsten Werth erhält. Indessen erscheint mir diese Ausdehnung des Princips VI doch etwas gewagt, und ich muss es daher dem Gefühle des Lesers überlassen, ob er sie acceptiren oder verwerfen will. —

§ 10.

Fortsetzung. Der Grenzfall $\Delta_0 = 0$. Schliessliche Möglichkeit eines Widerspruchs.

Nachdem in den letzten §§ die beiden Hauptfälle erledigt worden sind, wo in einem Momente t_0, in welchem die relative Geschwindigkeit w des gerade berührenden Körperpunktes Null ist, die Differenz (60) einen negativen oder einen positiven Wert Δ_0 besass, komme ich nunmehr an den Grenzfall $\Delta_0 = 0$, in welchem eine Wurzel ϖ der Gleichung (66) $= 0$ wird.

Auf Grund des Gesetzes V lässt sich über diesen zunächst genau dasselbe sagen, was schon in § 4 bei Gelegenheit der ebenen Bewegung vorgebracht wurde.

Mit Hülfe der in § 8 gewonnenen Differentialgleichungen des Rollens kann man nach einander auch den 1., 2., ... Differentialquotienten der Differenz Δ als Function der Zeit t und der Variabeln (58), und damit im Besondern die Werthe berechnen, welche diese Differentialquotienten in einem solchen Momente t_0 annehmen, in welchem mit w zugleich auch $\Delta = 0$ wird. Jenachdem dann der erste dieser Werthe, der nicht mehr verschwindet, < 0 oder > 0 ist, geht Δ in diesem Momente durch Null ins Negative oder ins Positive über, tritt also Rollen oder Gleiten ein. Falls aber im letzten Falle die Gleichung (66) noch positive Wurzeln zulässt, könnte an sich dies Gleiten ebensowohl mit einem positiven Anfangswerthe von $w_1 = \frac{dw}{dt}$, als auch mit dem Anfangswerte $w_1 = 0$ beginnen. Es ist erst das neue Princip VI, welches die den positiven Wurzeln entsprechenden Gleitungsbewegungen ausschliesst und nur diejenige gestattet, in der w_1 den Anfangswerth Null, also R_x, R_y, R_z, N die Anfangswerthe R_{x0}, R_{y0}, R_{z0}, N_0 erhalten und daher das Zeichen ε unmittelbar durch die Bedingung $\varepsilon N_0 > 0$ bestimmt ist.

Dies Kriterium versagt nur in dem Ausnahmefalle, wo im Momente t_0 mit w und Δ zugleich auch alle Differentialquotienten von Δ für die berechnete Rollbewegung verschwinden, d. h. wenn (wie z. B. für eine schwere homogene Kugel auf fester Ebene)

die Gleichungen (56) in Folge der Bedingungsgleichungen (27) constante Werthe für

$$N_0 \text{ und } R_0 \equiv \sqrt{R_{x0}^2 + R_{y0}^2 + R_{z0}^2},$$

also auch Δ selbst $=$ const. ergeben, und zugleich dem Reibungscoefficienten geradezu der Werth:

$$f = \frac{R_0}{N_0}$$

beigelegt wird, oder allgemeiner, wenn zufällig die Gleichung:

$$\Delta = \Delta_0 = 0$$

eine particuläre Integralgleichung der Differentialgleichungen des Rollens ist. Besitzt dann die Gleichung (66) überhaupt noch positive Wurzeln, so ist an sich ebensowohl Rollen als auch Gleiten möglich, aber das Princip VI gestattet nur das erstere.

Nun aber erhebt sich noch eine *letzte wesentliche Frage,* die ich, um allzuviel Wiederholungen zu vermeiden, überhaupt seit § 2 nicht wieder berührt habe.

Wie bereits angeführt, muss nämlich nach dem Gesetze der Reibung bei entstehender Bewegung auch von einem solchen Momente t_0 an, in welchem w verschwindet und Δ gerade durch Null ins Positive übergeht, Gleiten eintreten und somit $w > 0$ werden, während das Princip VI aussagt, dass in diesem Momente mit w zugleich auch $w_1 \equiv \frac{dw}{dt}$ verschwindet. *Es muss dann also nothwendig im Momente t_0 der erste höhere Differentialquotient von w, der nicht mehr verschwindet, einen positiven Werth erhalten,* und es bleibt zu untersuchen, ob das auch wirklich stets eintritt.

Zu dem Ende hat man zu allernächst den augenblicklichen Werth von:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = w_2 \equiv \sqrt{w_x''^2 + w_y''^2 + w_z''^2}$$

zu berechnen.

Da dem genannten Gesetz zu Folge Gleiten eintreten muss, so müssen vom Momente t_0 an die Formeln (31) mit den Werthen (43) der Reibungscomponenten gelten.* Setzt man für ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z ihre Werthe aus den Relationen (56), sowie für ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z die Werthe (32) ein, und benutzt die Abkürzungen:

$$(68)\qquad \begin{cases} \mu_x \equiv f\varepsilon N\lambda_x + R_{x0} + l\nu_0, \\ \mu_y \equiv f\varepsilon N\lambda_y + R_{y0} + m\nu_0, \\ \mu_z \equiv f\varepsilon N\lambda_z + R_{z0} + n\nu_0, \\ \nu_0 \equiv N_0 - N, \end{cases}$$

so erhalten diese Formeln die einfache Gestalt:

$$(69)\qquad \begin{cases} a_{11}\mu_x + a_{12}\mu_y + a_{13}\mu_z = -w_x', \\ a_{21}\mu_x + a_{22}\mu_y + a_{23}\mu_z = -w_y', \\ a_{31}\mu_x + a_{32}\mu_y + a_{33}\mu_z = -w_z', \end{cases}$$

und zugleich folgt aus den Bedingungsgleichungen (48), denen die Richtungscosinus λ_x, λ_y, λ_z unterworfen sind, unter Beachtung der letzten Relation (56):

$$(70)\qquad l\mu_x + m\mu_y + n\mu_z - \nu_0 = 0.$$

Die Differentiation der zweiten Gleichung (48) endlich giebt:

$$\lambda_x\lambda_x' + \lambda_y\lambda_y' + \lambda_z\lambda_z' = 0.$$

Differentiirt man daher die Formeln (68), multiplicirt sie hierauf mit λ_x, λ_y, λ_z und addirt, so erhält man nach (48) und (68):

$$(71)\qquad \lambda_x(\mu_x' - l'\nu_0) + \lambda_y(\mu_y' - m'\nu_0) + \lambda_z(\mu_z' - n'\nu_0) + f\varepsilon\nu_0' \\ = \lambda_x R_{x0}' + \lambda_y R_{y0}' + \lambda_z R_{z0}' + f\varepsilon N_0'.$$

Alle diese Gleichungen und Formeln gelten überhaupt für jeden Moment t des Gleitens. Wenden wir sie nun aber im Besonderen auf den Entstehungsmoment t_0 des Gleitens an, so wird:

$$w_x = w_y = w_z = w_x' = w_y' = w_z' = 0,$$

und damit zugleich:

$$N = N_0,\ R_x = R_{x0},\ R_y = R_{y0},\ R_z = R_{z0},$$

daher ergeben die Gleichungen (69), deren Determinante $\neq 0$ ist, und hierauf die Gleichung (70):

$$\mu_x = 0,\ \mu_y = 0,\ \mu_z = 0,\ \nu_0 = 0,$$

d. h. nach (68) übereinstimmend mit dem aus (43) für $t = t_0$ folgenden Resultate:

$$(72)\qquad N = N_0,\ -f\varepsilon N_0\lambda_x = R_{x0},\ -f\varepsilon N_0\lambda_y = R_{y0},\ -f\varepsilon N_0\lambda_z = R_{z0},$$

wobei $\varepsilon N_0 > 0$ sein muss.

Hiernach erhält man, wenn man (68), (69), (70) differentiirt, sodann die erhaltenen Gleichungen, sowie nach Multiplication mit $-f\varepsilon N_0$, die Gleichung (71) auf den Moment t_0 anwendet, und die aus (60) folgende Formel:

$$R_{x0}R'_{x0}+R_{y0}R'_{y0}+R_{z0}R'_{z0}-f^2N_0N'_y\equiv\frac{1}{2}\frac{d\Delta}{dt}$$

berücksichtigt:

$$(73)\quad\begin{cases}\mu'_x=f\varepsilon N_0\lambda'_x-R_{x0}\dfrac{N'}{N_0}+R'_{x0}+l\nu'_0,\\ \mu'_y=f\varepsilon N_0\lambda'_y-R_{y0}\dfrac{N'}{N_0}+R'_{y0}+m\nu'_0,\\ \mu'_z=f\varepsilon N_0\lambda'_z-R_{z0}\dfrac{N'}{N_0}+R'_{z0}+n\nu'_0,\\ \nu'_0\equiv N'_0-N';\end{cases}$$

$$(74)\quad\begin{cases}a_{11}\mu'_x+a_{12}\mu'_y+a_{13}\mu'_z=-w''_x,\\ a_{21}\mu'_x+a_{22}\mu'_y+a_{23}\mu'_z=-w''_y,\\ a_{31}\mu'_x+a_{32}\mu'_y+a_{33}\mu'_z=-w''_z,\end{cases}$$

$$(75)\quad\begin{cases}l\mu'_x+m\mu'_y+n\mu'_z-\nu'_0=0,\\ R_{x0}\mu'_x+R_{y0}\mu'_y+R_{z0}\mu'_z-f^2N_0\nu'_0=\frac{1}{2}\dfrac{d\Delta}{dt},\end{cases}$$

und dem Gesetze der Reibung bei entstehender Bewegung zu Folge müssen also diese Gleichungen im Momente t_0 nothwendig erfüllt sein, gleichviel ob augenblicklich $w_2>0$ oder $=0$ ist.

Ist nun im Besondern aber $w_2>0$, so erhalten in diesem Momente die Richtungscosinus λ_x, λ_y, λ_z der augenblicklich gleichzeitig mit ihrem ersten Differentialquotienten w_1 verschwindenden relativen Geschwindigkeit w die Grenzwerthe:

$$\lambda_x=\frac{w''_x}{w_2},\qquad\lambda_y=\frac{w''_y}{w_2},\qquad\lambda_z=\frac{w''_z}{w_2},$$

und nach (72) wird daher:

$$(76)\quad w''_x=-R_{x0}\frac{w_2}{f\varepsilon N_0},\quad w''_y=-R_{y0}\frac{w_2}{f\varepsilon N_0},\quad w''_z=-R_{z0}\frac{w_2}{f\varepsilon N_0}.$$

Versteht man nun unter:

$$2\,\Theta(\lambda,\mu,\nu)$$

die reciproke Function der in den Variabeln l, m, n definit positiven Form zweiten Grades:

$$(40)\qquad \begin{aligned} &2\psi(l, m, n)\\ &= a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}lm, \end{aligned}$$

also diejenige ganze homogene Function zweiten Grades der Variabeln λ, μ, ν, die man erhält, wenn man die 3 linearen Gleichungen:

$$(77)\qquad \psi' l = \lambda, \qquad \psi' m = \mu, \qquad \psi' n = \nu$$

nach l, m, n auflöst und die Auflösungen in die Formel:

$$(78)\qquad 2\Theta(\lambda, \mu, \nu) = l\lambda + m\mu + n\nu = 2\psi(\lambda, \mu, \nu)$$

einsetzt, so ergeben nach Substitution der Werthe (76) die Gleichungen (74)

$$\mu_x' = \frac{w_2}{f\varepsilon N_0}\Theta' R_{x0}, \qquad \mu_y' = \frac{w_2}{f\varepsilon N_0}\Theta' R_{y0}, \qquad \mu_z' = \frac{w_2}{f\varepsilon N_0}\Theta' R_{z0},$$

und wenn man diese Auflösungen in die aus (75) durch Elimination von N_0' folgende Gleichung:

$$R_{x0}\mu_x' + R_{y0}\mu_y' + R_{z0}\mu_z' - f^2 N_0(l\mu_x' + m\mu_y' + n\mu_z') = \frac{1}{2}\frac{d\Delta}{dt}$$

einführt, erhält man auf Grund der bekannten Eigenschaften der ganzen homogenen Functionen zweiten Grades sofort:

$$(79)\qquad \begin{cases} \nabla \dfrac{w_2}{f\varepsilon N_0} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\Delta}{dt}, \\ \nabla = 2\Theta(R_{x0}, R_{y0}, R_{z0}) - f^2 N_0(R_{x0}\Theta' l + R_{y0}\Theta' m + R_{z0}\Theta' n). \end{cases}$$

In diesem Werthe von ∇ ist, als reciproke Function einer definit positiven Form zweiten Grades, das erste Glied $2\Theta(R_{x0}, R_{y0}, R_{z0})$ ebenfalls definit positiv. Bei hinreichend kleinem f ist daher auch ∇ selbst sicher positiv. Dasselbe gilt, sooft vermöge der Gleichung (16) der Körperoberfläche:

$$\Theta' l = \sigma l, \qquad \Theta' m = \sigma m, \qquad \Theta' n = \sigma n$$

wird. Denn wegen der letzten Relation (56) reducirt sich dann ∇ geradezu auf sein erstes Glied. Diese 3 Gleichungen aber sind äquivalent den früheren:

$$(51')\qquad l = \sigma\psi' l, \qquad m = \sigma\psi' m, \qquad n = \sigma\psi' n,$$

und die Forderung, dass sie eine Folge der Gleichung (16) sein sollen, ist somit nichts anderes als die Bedingung, unter der der Normalwiderstand unabhängig wird von der Reibung. In diesem Falle ist also auch ∇ unabhängig von f und stets > 0.

Ist dagegen der Normalwiderstand abhängig von der Reibung, so kann bei hinlänglich grossem Werthe des Reibungscoefficienten unter Umständen ∇ auch < 0 werden. Doch wird dies Negativwerden nicht schon von selbst durch ein hinreichend grosses f herbeigeführt; es tritt vielmehr nur dann ein, wenn überdies auch noch

$$N_0(R_{x0}\Theta' l + R_{y0}\Theta' m + R_{z0}\Theta' n) > 0 \quad \text{ist.} \text{ —}$$

Dies vorausgeschickt sei nun $\nabla > 0$.

Da $f\varepsilon N_0 > 0$ ist und bei unsern Voraussetzungen $\frac{d\Delta}{dt}$ nur $\geqq 0$ sein kann, so lehrt die Formel (79), dass w_2 stets gleichzeitig mit $\frac{d\Delta}{dt} > 0$ ist, und nur dann verschwindet, wenn auch $\frac{d\Delta}{dt}$ verschwindet. Nur im letzteren Falle verschwinden also im Momente t_0 mit w_x, w_x, w_z und w_x', w_y', w_z' zugleich auch w_x'', w_y'', w_z'', und daher ist nur in diesem Falle die Untersuchung noch nicht zu Ende. Auch ihre Weiterführung aber bietet keinerlei Schwierigkeiten dar.

Zunächst nämlich ziehen die Gleichungen:

$$w_x'' = 0, \qquad w_y'' = 0, \qquad w_z'' = 0$$

nach (74) und (75) die Gleichungen nach sich:

(80) $$\mu_x' = 0, \qquad \mu_y' = 0, \qquad \mu_z' = 0, \qquad \nu_0' = 0,$$

Gleichungen, die, da es sich eben nur um den Fall $\frac{d\Delta}{dt} = 0$ handelt, die zweite Gleichung (75) von selbst erfüllen. Der Werth, den

$$\frac{d^3 w}{dt^3} = w_3 = \sqrt{w_x''^2 + w_y''^2 + w_z''^2}$$

im Momente t_0 annimmt, berechnet sich hierauf ganz analog wie vorhin w_2, und dabei ergiebt sich auch die der Formel (79) ganz analoge Formel:

(81) $$\nabla \frac{w_3}{f\varepsilon N_0} = \frac{1}{2}\frac{d^2\Delta}{dt^2},$$

sodass w_3 immer zugleich mit $\frac{d^2\Delta}{dt^2} > 0$ oder $= 0$ ist; u. s. w. Solange also $\nabla > 0$ ist, findet völlige Uebereinstimmung mit dem Gesetze der Reibung bei entstehender Bewegung statt.

Ganz anders dagegen gestalten sich die Verhältnisse, wenn $\nabla < 0$ ist. Da nämlich w_2 nur $\geqq 0$ sein kann, so verlangt

dann die Formel (79), schon wenn augenblicklich $\frac{d\varDelta}{dt} > 0$ ist, nothwendig $w_2 = 0$ und damit auch $w_x'' = w_y'' = w_z'' = 0$, d. h. wieder das Bestehen der Gleichungen (80). Sooft aber $\frac{d\varDelta}{dt} \neq 0$ ist, widersprechen jetzt diese Gleichungen der zweiten Gleichung (75); es tritt also der Conflict ein: Im Momente t_0 muss einerseits w_2 verschwinden, und andrerseits ist dieses Verschwinden doch selbst wieder unmöglich.

Indessen ist hier zweierlei zu bedenken. Einmal nämlich kann, wie schon bemerkt, ∇ nur in dem Falle, wo der Normalwiderstand von der Reibung abhängig ist, bei hinreichend grossem f möglicher Weise < 0 sein, braucht es aber durchaus nicht nothwendig zu sein. Weiter aber, wenn in dem betrachteten Momente t_0, wo w verschwindet und $\varDelta$ durch Null ins Positive übergeht, die Gleichung (66) noch eine positive Wurzel besitzen sollte, so würde der Fall $\nabla < 0$ überhaupt gar keinen wirklichen Widerspruch anzeigen, sondern nur lehren, dass dann das Princip VI nicht mehr anwendbar ist, dass vielmehr der Körper im Momente t_0 nicht mit dem Werthe Null, sondern mit dem, jener positiven Wurzel entsprechenden Werthe von w_1 zu gleiten beginnen muss.

Unsre Betrachtungen constatiren also durchaus nicht etwa das Auftreten eines thatsächlichen Widerspruches, sie lassen vielmehr nur, und zwar ausschliesslich auch nur in denselben Fällen, in denen das Gesetz der Reibung während der Bewegung entweder die letztere nicht eindeutig bestimmt oder aber die gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten selbst für unmöglich erklären muss[1]),

---

1) Dies ist nicht ganz correct ausgedrückt. Erfüllt man nämlich die Gleichung $\varDelta = 0$ durch die Substitutionen

$$R_{x0} = fN_0\xi_0, \qquad R_{y0} = fN_0\eta_0, \qquad R_{z0} = fN_0\zeta_0,$$

was wegen der Bedingung (23)

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1, \qquad l\xi_0 + m\eta_0 + n\zeta_0 = 0$$

verlangt, so wird nach (79)

$$\frac{\nabla}{f^2 N_0^2} = 2\Theta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) - f(\xi_0\Theta' l + \eta_0\Theta' m + \zeta_0\Theta' n),$$

und daher muss

$$2\Theta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) < f[(\xi_0\Theta' l + \eta_0\Theta' m + \zeta_0\Theta' n)]$$

die Möglichkeit eines solchen Widerspruchs offen; es wird aber abzuwarten sein, ob man ein Beispiel finden kann, in welchem derselbe wirklich nachweisbar wäre.

---

sein, wenn der Fall $\nabla < 0$ überhaupt soll eintreten können. Bei der ebenen Bewegung (vgl. § 4 (22)) fällt nun allerdings die entsprechende Forderung unmittelbar mit der zusammen, dass die Bedingung $\varepsilon N > 0$ nicht mehr das Zeichen ε bestimmen soll. Im Raume dagegen vermag ich nicht einzusehen, dass diese beiden Forderungen in demselben Zusammenhange stünden; es scheint mir vielmehr, als ob die eine dem Reibungscoefficienten recht wohl eine andere untere Grenze vorschreiben könnte, als die andere.

Nachträgliche Berichtigung.

Trotz aller auf die Arbeit verwandten Sorgfalt bemerke ich doch erst nachträglich, dass im Vorhergehenden ein, noch dazu wohlbekannter[1] Punkt ausser Acht gelassen wurde, den ich daher nur noch am Schlusse nachholen kann. Er ist immer da zu beachten, wo bei von Null verschiedener relativer Geschwindigkeit des Punktes, der Reibung erfährt, das Zeichen ε aus der Forderung $\varepsilon N > 0$ bestimmt wurde, und wäre am Zweckmässigsten wohl am Ende des § 6 einzuschalten gewesen. An diese Stelle möge denn auch die Berichtigung anknüpfen.

Es ist dort hervorgehoben worden, welche Bedeutung das Zeichen von N in dem Falle besitzt, wo der Körper auf der starren Fläche nur aufliegt. Aber auch im Falle des an die Fläche gebundenen Körpers darf ein Zeichenwechsel von N durchaus nicht übersehen werden. Denn die Bedingung $\varepsilon N > 0$ muss während des ganzen Gleitens beständig erfüllt bleiben, und sie lehrt unmittelbar, dass in einem Momente t, wo N sein Zeichen wechselt, auch das Zeichen ε in das entgegengesetzte zu verwandeln ist. Hiernach ist also z. B. dem ersten, p. 294 cursiv gedruckten Satze noch hinzuzufügen:

„und solange überdies N sein Zeichen nicht wechselt“,

und Entsprechendes gilt für den p. 261 auf die Ungleichung (16) folgenden Satz, sowie für den Satz, der p. 272 sich an die Gleichung (21) anschliesst.

---

1) Vgl. z. B. Appell, Traité de mécanique rationelle II p. 160, Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper I § 159.

Druckfertig erklärt 9. VII. 1901.]

INHALT.

Seite

Gerhard Kowalewski, Ueber Systeme von Pfaff'schen Gleichungen 179
H. Liebmann, Ueber die Verbiegung von Rotationsflächen . . . 215
Ad. Mayer, Zur Theorie der gleitenden Reibung 235

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

L Soc 1726.11

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

V.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1901.

Einzelpreis 2 Mark 80 Pfg.

[library stamp, illegible]

SITZUNG VOM 1. JULI 1901.

Vorträge hielten:

Herr C. Neumann, o. M.: Ueber eine neue Methode zum Beweise der sogenannten Schliessungstheoreme.

Herr Fr. Engel, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn G. Kowalewski: Eine Eigenschaft der Fusspunktcurven von Ovalen mit Mittelpunkt.

Derselbe: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn E. Study-Greifswald: Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie.

Derselbe: Ankündigung einer Abhandlung zur Flächentheorie.

Herr W. His, o. M., kündigte schriftlich eine Abhandlung über wissenschaftliche Centralanstalten und speciell über Centralanstalten zur Förderung der Gehirnkenntniss für die Berichte an.

C. Neumann: *Ueber eine neue Methode zum Beweise der sogenannten Schliessungstheoreme.*

Als Entdecker der Schliessungstheoreme für Kreise und Kegelschnitte dürften Poncelet und Darboux zu nennen sein. Im Folgenden beabsichtige ich nun für diese Theoreme einen neuen Beweis zu geben, der von den Beweisen der genannten und anderer Autoren sich wesentlich dadurch unterscheidet, dass die betreffenden Figuren von mir nicht im Zustande der *Ruhe*, sondern vielmehr im Zustande einer langsam fortschreitenden *Bewegung* betrachtet werden.

Auf den Fall von *Kreisen* habe ich diese neue Beweismethode schon vor langer Zeit (in einer Vorlesung über Functionentheorie, im Sommer-Semester 1882) angewendet. Später habe ich sodann (in einer Vorlesung, im Wintersemester 1900/1901) diese Methode auch auf *confocale Ellipsen* ausgedehnt; wobei aber der von mir eingeschlagene Weg in Bezug auf Einfachheit Manches zu wünschen übrig liess. Erst in letzter Zeit ist es mir gelungen, meine neue Methode bei *ganz beliebigen Kegelschnitten* zur Durchführung zu bringen, und dabei zugleich auch denjenigen

überaus einfachen und elementaren Weg zu entdecken, der in den folgenden Paragraphen angegeben werden soll.

So einfach und elementar der hier mitzutheilende Weg in seinen eigentlichen Grundzügen aber auch sein mag, so werden schliesslich, um denselben vollständig einwandfrei zu machen, doch noch gewisse Schwierigkeiten zu überwinden sein, die der *Analysis Situs* angehören, und von denen in den beiden letzten Paragraphen die Rede sein wird.

§ 1.

Ueber die einem Kegelschnitt umbeschriebenen Polygone.

Irgend drei Tangenten eines *Kreises* bilden zusammengenommen ein dem Kreise umbeschriebenes *Dreieck;* wobei zu beachten ist, dass die Fläche dieses Dreiecks, je nach Auswahl jener Tangenten, bald innerhalb, bald ausserhalb des Kreises liegen wird. — Wir bezeichnen die Ecken des Dreiecks mit A, B, C, und seine Seiten mit

(1) $$AxB, \quad ByC, \quad CzA,$$

wo x, y, z die Berührungspuncte vorstellen sollen. Dabei wird übrigens der Punct x auf der Tangente AB, je nach Umständen, bald *innerhalb*, bald *ausserhalb* der Strecke AB liegen; er mag im ersten Fall als *interner*, im letzten Fall als *externer* Berührungspunct bezeichnet werden. Gleiches ist von y mit Bezug auf BC, und von z mit Bezug auf CA zu sagen.

Liegt die Fläche des Kreises *innerhalb* des Dreiecks ABC, so sind die Puncte x, y, z alle drei interner Natur; wie solches unmittelbar aus der geometrischen Anschauung sich ergiebt. Liegt andererseits die Fläche des Kreises *ausserhalb* des Dreiecks ABC, so sind, wie man ebenfalls leicht erkennt, stets zwei von den Puncten x, y, z externer Natur, während der dritte interner Natur sein wird. *Für ein dem Kreise umbeschriebenes Dreieck ist also die Anzahl der externen Berührungspuncte unter allen Umständen eine gerade Zahl, nämlich entweder* $= 0$ *oder* $= 2$.

Dieser Satz gilt, wie weiterhin gezeigt werden soll, nicht nur für Kreise, sondern auch für Kegelschnitte, und nicht allein für Dreiecke, sondern auch für beliebige Polygone. Er lautet in seiner allgemeinsten Gestalt folgendermassen:

Ist einem Kegelschnitt irgend ein Polygon umbeschrieben, so sind im Ganzen ebensoviele Berührungspuncte vorhanden, als das

Polygon Seiten besitzt. Diese Berührungspuncte sind im Allgemeinen theils interner, theils externer Natur. Dabei aber wird die Anzahl der externen Berührungspuncte unter allen Umständen eine gerade Zahl sein.

Wir werden, wie schon gesagt, diesen allgemeinen Satz erst *später* beweisen, und vorläufig auch keinen Gebrauch von demselben machen. — Was nun unsere augenblicklichen Vorstellungen (1) anbetrifft, so sind offenbar die beiden Tangenten (Ax) und (Az) von gleicher Länge. Es ist also $(Ax) = (Az)$, und ebenso $(By) = (Bx)$, und $(Cz) = (Cy)$, oder ein wenig anders geschrieben*):

$$(xA) = (zA), \quad (yB) = (xB), \quad (zC) = (yC);$$

woraus durch Multiplication sich ergiebt:

(2) $$(xA)(yB)(zC) = (xB)(yC)(zA).$$

Projiciren wir die betrachtete Figur, von irgend welchem Raumpuncte aus, auf irgend welche andere Ebene, so erhalten wir einen Kegelschnitt und ein demselben umbeschriebenes Dreieck. Und die schöne anschauliche und einfache Methode von Poncelet lässt sofort erkennen, dass für die so entstandene neue Figur die Formel (2) ebenfalls noch gelten wird; sodass wir also zu folgendem bekannten und für unsere weiteren Untersuchungen wichtigen Satze gelangen:

An einen gegebenen Kegelschnitt mögen irgend drei Tangenten gelegt werden; sodass in solcher Weise ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Dreieck entsteht. Man bezeichne nun die Ecken dieses Dreiecks mit A, B, C, und seine Seiten mit:

(3) $$AxB, \quad ByC, \quad CzA,$$

wo x, y, z die Berührungspuncte sein sollen. Alsdann wird stets die Formel gelten:

(4) $$(xA)(yB)(zC) = (xB)(yC)(zA).$$

Dabei ist im Auge zu behalten, dass die Schreibweise (3) *nicht unter allen Umständen der Wirklichkeit entspricht. Denn es braucht z. B. der Punct x, wie schon bei* (1) *bemerkt wurde, nicht nothwendig zwischen A und B zu liegen; vielmehr kann er unter Umständen auf der betreffenden Tangente auch ausserhalb der Strecke AB gelegen sein. U. s. w.*

*) Unter dem Symbol (MN) soll stets die *absolute* Länge der Linie MN verstanden werden.

Dass eine der Formel (4) analoge Formel auch für ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Polygon von beliebiger Seiten-Anzahl gelten, und in ganz analoger Art zu beweisen sein wird; — bedarf wohl kaum noch der Erwähnung.

§ 2.

Das Schliessungstheorem für zwei Kegelschnitte, von denen einer ein Kreis ist.

In der Ebene seien gegeben ein *Kreis* S und irgend ein Kegelschnitt s. Wir markiren auf der Kreislinie S irgend einen Punct A, und legen von A aus eine Tangente an den Kegelschnitt s; diese Tangente mag die Kreislinie S zum zweiten Mal in B schneiden. Sodann legen wir, von B aus, eine *neue* (d. h. nicht mit BA zusammenfallende) Tangente an den Kegelschnitt s, welche den Kreis S zum zweiten Male in C schneiden mag. Endlich legen wir, von C aus, eine *neue* Tangente an s, welche den Kreis S zum zweiten Mal in D schneiden mag.

Nun denken wir uns die Curven S und s *völlig fest und unveränderlich*, hingegen den Punct A längs der Kreislinie S *verschiebbar*. Alsdann werden wir, während der Punkt A längs der Kreislinie S fortwandert, die soeben ausgeführten Constructionen AB, BC, CD in jedem Augenblick von Neuem wiederholen können. Mit andern Worten: Wir werden die Linien AB, BC, CD, jener Bewegung des Punctes A entsprechend, ebenfalls in Bewegung begriffen uns denken können. Während dieser Bewegung werden alsdann z. B. die Puncte A und D im Allgemeinen sich einander nähern oder sich von einander entfernen.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung einer *unendlich kleinen* Bewegung und bezeichnen die in Rede stehenden drei geraden Linien zu *Anfang* und zu *Ende* dieser unendlich kleinen Bewegung respective mit AB, BC, CD und mit A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1. Alsdann ist z. B. AA_1 ein unendlich kleines Element der Kreislinie S. Wir bezeichnen dasselbe kurzweg mit $d\alpha$, und bedienen uns in ähnlicher Weise der Bezeichnungen $d\beta$, $d\gamma$ und $d\delta$. Also:

$$(5)\quad d\alpha = (AA_1),\quad d\beta = (BB_1),\quad d\gamma = (CC_1),\quad d\delta = (DD_1).$$

Die Linie AB berührt die Ellipse s in einem gewissen Puncte, der x heissen mag. Und während der in Rede stehenden

unendlich kleinen Bewegung wird die Linie AB um diesen Punct x, um einen unendlich kleinen Winkel sich drehen. Was nun die Lagen dieser Linie vor und nach der kleinen Drehung, d. i. die Lagen AxB und A_1xB_1 betrifft, so wird offenbar, zu Folge des Sehnen-Sehnen- respective des Secanten-Secanten-Satzes, die Formel stattfinden: $(xA)(xB) = (xA_1)(xB_1)$. Folglich sind die beiden Dreiecke xAA_1 und xB_1B einander ähnlich. Folglich ist z. B.:

$$(AA_1) : (B_1B) = (xA) : (xB_1);$$

wofür man, weil (xB_1) nur unendlich wenig von (xB) verschieden ist, auch schreiben kann:

$$(AA_1) : (BB_1) = (xA) : (xB).$$

Bedient man sich also der in (5) eingeführten Bezeichnungsweise, so ist:

(6) $$d\alpha : d\beta = (xA) : (xB).$$

Analoges wird offenbar für die Linien BC, CD und deren Berührungspuncte y, z gelten; so dass man zu folgenden Formeln gelangt:

(7) $$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{(xA)}{(xB)}, \qquad \frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{(yB)}{(yC)}, \qquad \frac{d\gamma}{d\delta} = \frac{(zC)}{(zD)};$$

woraus durch Multiplication sich ergiebt:

(8) $$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{(xA)(yB)(zC)}{(xB)(yC)(zD)}.$$

Im Allgemeinen sind auf der Kreislinie S die Puncte A und D durch irgend welche Bogenlänge von einander getrennt. Nehmen wir nun an, dass *zufälliger Weise* diese Bogenlänge $= 0$ sei, dass also A und D miteinander *coincidiren;* — alsdann wird in der Formel (8) der Buchstabe D durch A, mithin (zD) durch (zA) ersetzbar sein, die Formel also übergehen in:

(9) $$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{(xA)(yB)(zC)}{(xB)(yC)(zA)};$$

woraus, unter Anwendung des Hülfssatzes (4), sich ergiebt:

(10) $$\frac{d\alpha}{d\delta} = 1, \quad \text{d. i.} \quad d\alpha = d\delta.$$

Wir gelangen somit zu dem Resultat, dass die beiden Puncte A und D, falls sie zu *Anfang* der betrachteten unendlich kleinen Bewegung mit einander coincidiren, während dieser Bewegung zwei Wegelemente $d\alpha$ und $d\delta$ durchlaufen werden, die

von *gleicher Länge* sind. Mit andern Worten: Wir gelangen zu der Einsicht, dass, wenn A und D zu *Anfang* der betrachteten unendlich kleinen Bewegung mit einander coincidiren, eine solche Coincidenz auch noch vorhanden sein wird zu *Ende* dieser unendlich kleinen Bewegung.

Hiermit ist das Schliessungstheorem bewiesen für die hier betrachteten Curven s, S d. i. für zwei Kegelschnitte, von denen der eine ein Kreis ist; — allerdings nur für *Dreiecke.* Dass man indessen in genau derselben Art das Theorem für jene Curven s, S auch mit Bezug auf *beliebige Polygone* beweisen kann, übersieht man sofort.

§ 3.

Das Schliessungstheorem für zwei ganz beliebige Kegelschnitte.

In der Ebene seien gegeben zwei beliebige und beliebig zu einander gelegene Kegelschnitte Σ und σ. Alsdann wird man durch Projection den Kegelschnitt Σ in eine *Kreislinie* S, und zugleich den Kegelschnitt σ in einen *neuen Kegelschnitt* s verwandeln können. Für diese neuen Curven S, s ist nun aber das Schliessungstheorem bereits im vorhergehenden Paragraph bewiesen worden. Folglich gilt dasselbe auch für die ursprünglichen Curven Σ, σ.

Nachdem in solcher Art das Schliessungstheorem für zwei ganz beliebige Kegelschnitte Σ, σ *bewiesen ist;* — ergiebt sich nun, beiläufig bemerkt, dass dasselbe auch gelten muss auf der Kugelfläche für *zwei ganz beliebige sphärische Ellipsen;* vorausgesetzt, dass man Polygone anwendet, die aus lauter grössten Kreisbogen zusammengesetzt sind, Denn, durch Projection vom Kugelmittelpunct aus, wird man jene sphärischen Ellipsen stets, in Gestalt von Kegelschnitten, auf eine Ebene werfen können; u. s. w.

Ein Mangel in dem gegebenen Beweise. — Die Betrachtungen dieses und des vorigen Paragraphs sind allerdings zum Beweise des Schliessungstheorems in vielen Fällen bereits vollkommen ausreichend, so z. B. wenn die beiden Kegelschnitte σ und Σ zwei Ellipsen sind, von denen die eine vollständig innerhalb der andern liegt. Im Allgemeinen aber sind sie, wie man wohl schon bemerkt haben wird, noch mit einer gewissen Lücke behaftet. — Es ist nämlich im vorigen Paragraph nur die *gleiche Länge* der beiden Verschiebungen $d\alpha$ und $d\delta$, nicht aber ihre

gleiche Richtung bewiesen worden; was doch nothwendig sein wird, um darzuthun, dass die zu *Anfang* der unendlich kleinen Bewegung vorausgesetzte Coincidenz der beiden Puncte A und D auch noch vorhanden sei zu *Ende* jener kleinen Bewegung.

Es ist nicht ganz leicht, diesem Mangel abzuhelfen. Es bedarf dazu einiger Betrachtungen aus der *Analysis Situs*, von denen in den folgenden Paragraphen die Rede sein wird, und die vielleicht auch an und für sich ein gewisses Interesse in Anspruch zu nehmen geeignet sein dürften.

§ 4.

Einige Sätze, die der Analysis Situs angehören.

Es handelt sich hier im Wesentlichen um die Begründung jenes schon im ersten Paragraph ausgesprochenen Satzes über die Anzahl der externen Berührungspuncte. Dabei bedarf es zunächst gewisser Vorbereitungen. —

Durch einen Kegelschnitt zerfällt die ganze unendliche Ebene in zwei Gebiete, in ein *inneres*, und ein *äusseres* Gebiet. Letzteres kann, falls es beliebt, als dasjenige definirt werden, in welchem sämmtliche Tangenten des Kegelschnittes liegen. Jedweder Punct dieses äusseren Gebietes wird kurzweg als ein *äusserer Punct* zu bezeichnen sein, oder auch als ein Punct, der *ausserhalb* des Kegelschnittes liegt. Ebenso ist andererseits jedweder Punct des inneren Gebietes kurzweg ein *innerer Punct* zu nennen; u. s. w. — Speciell bei der Hyperbel wird man vielleicht das innere Gebiet als aus zwei Theilen bestehend bezeichnen können; worauf es aber hier nicht weiter ankommt.

Unter der positiven Curven- oder Umlaufs-Richtung des Kegelschnittes mag diejenige verstanden werden, in welcher man längs des Kegelschnitts fortwandern muss, falls man während dieser Wanderung das (dem Wege angrenzende) innere Gebiet stets zur Linken haben will. Es versteht sich von selbst, dass diese Definition nur dann einen bestimmten Sinn hat, wenn zuvor eine bestimmte Seite der Ebene als die *obere Seite* festgesetzt ist, auf welcher man (wie auf einem festen Boden) fortwandert.

Die Definition der positiven Curven-Richtung überträgt sich unmittelbar auf die *Tangenten* der Curve. Und es werden also z. B. bei der Ellipse je zwei zu einander parallele Tangenten, hinsichtlich ihrer positiven Richtungen, zu einander entgegen-

gesetzt sein. Genau dasselbe aber gilt, wie man leicht übersieht, auch von der *Hyperbel.* Construirt man z. B. bei der Hyperbel diejenigen beiden Tangenten, die senkrecht sind zur Verbindungslinie der beiden Brennpuncte, so werden die positiven Richtungen dieser beiden Tangenten zu einander entgegengesetzt sein. Zugleich erkennt man, dass die positive Richtung einer Asymptote zweideutig ist, nämlich diese oder jene Orientirung besitzen wird, je nachdem sie als Tangente des einen oder des andern Hyperbelzweiges angesehen wird. Es gilt nun folgender Satz:

Erster Satz. — *Von irgend einem äussern Puncte A aus mögen an den gegebenen Kegelschnitt die beiden Tangenten Au und Av gelegt sein, wo u und v die Berührungspuncte vorstellen sollen. Ferner mögen unter AuU und AvV ebendieselben Tangenten verstanden werden, die eine über u, die andere über v hinaus beliebig verlängert gedacht.*

Geht man nun von U über u nach A, und sodann von A über v nach V, so wird man bei dieser Wanderung $UuAvV$ die Puncte u und v stets, entweder beide in ihren positiven, oder aber beide in ihren negativen Curvenrichtungen passiren.

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man sofort für Ellipse und Parabel. Leicht aber überzeugt man sich davon, dass dieser Satz auch für die Hyperbel gilt, und zwar ganz allgemein, einerlei ob die Puncte u und v demselben Hyperbelzweige oder verschiedenen Hyperbelzweigen angehören. — Es handelt sich nun zunächst um eine möglichst bequeme Ausdrucksweise dieses Satzes durch eine passende Formel, um den Satz in solcher Weise für die Anwendung geschickter zu machen.

Sind irgend zwei Richtungen p und q entweder unter einander *identisch* oder aber unter einander *entgegengesetzt*, so wird man solches in üblicher Weise andeuten können durch die Formel: $p = \pm q$; sodass also der Quotient $\frac{p}{q}$ im ersteren Falle $= +1$, im letztern $= -1$ ist. Ist ferner von irgend zwei Puncten M und N die Rede, so mag die von M nach N gehende Richtung mit $[MN]$ bezeichnet werden, so dass also z. B. $[MN] = -[NM]$ ist. Ueberdies mag noch ein weiteres Symbol: $[M]$ zur Anwendung kommen, falls der Punct M auf der gegebenen Curve liegt. Es soll nämlich in diesem Fall unter $[M]$ die *positive* Richtung der Curve im Puncte M verstanden werden. — Solches festgesetzt, können wir nun jenen Satz folgendermassen aussprechen:

Derselbe Satz in etwas anderer Gestalt. — *Von einem äussern Puncte A aus mögen die beiden Tangenten Au und Av an den gegebenen Kegelschnitt gelegt sein, wo u und v die Berührungspuncte vorstellen sollen. Alsdann gilt stets die Formel:*

$$(1) \qquad \frac{[uA]}{[u]} = \frac{[Av]}{[v]},$$

der Art, dass diese Quotienten, je nach Umständen, entweder beide $= +1$, oder aber beide $= -1$ sind. — *Uebrigens kann man dieser Formel (1) offenbar auch folgende mehr symmetrische Gestalt geben:*

$$(2) \qquad \frac{[Au]}{[u]} + \frac{[Av]}{[v]} = 0;$$

denn es ist $[uA] = -[Au]$.

Dies vorangeschickt, legen wir jetzt an den gegebenen Kegelschnitt n Tangenten, oder (der grösseren Bequemlichkeit willen) etwa nur 4 Tangenten, und bezeichnen dieselben *in irgend welcher Reihenfolge* mit $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_4$. Ueberdies bezeichnen wir den Schnittpunct je zweier solcher Tangenten $\mathfrak{L}_h$ und $\mathfrak{L}_j$ mit A_{hj}. Im Ganzen existiren offenbar 6 solche Puncte A_{hj}. Von diesen aber markiren wir nur allein die 4 Puncte:

$$(3) \qquad A_{12}, \quad A_{23}, \quad A_{34}, \quad A_{41}$$

und erhalten in solcher Weise *ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Viereck*, welches die Tangenten $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_4$ zu Seiten, und die soeben genannten Puncte $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ zu Ecken hat. Die Berührungspuncte jener Tangenten $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_4$ mögen respective mit x_1, x_2, x_3, x_4 benannt werden. Dieselben sind im Allgemeinen theils interner, theils externer Natur. So z. B. wird der Punct x_2 ein *interner*, oder ein *externer* Berührungspunct sein, jenachdem er auf der Tangente $\mathfrak{L}_2$ *innerhalb* der Strecke $A_{12}A_{23}$, oder aber *ausserhalb* dieser Strecke gelegen ist. Analoges ist von x_3, x_4 und x_1 zu sagen. *Es handelt sich nun um die Frage nach der Anzahl der externen Berührungspuncte, nämlich um die Begründung jenes schon früher im ersten Paragraph ausgesprochenen Satzes.*

Zu diesem Zweck mag jedem Berührungspunct x_h eine bestimmte Zahl $f(x_h)$, gewissermassen als *Signatur*, beigelegt werden; und zwar soll diese Zahl $f(x_h) = +1$ oder $= -1$ sein, jenachdem der Punct x_h ein *interner* oder ein *externer* Berührungspunct ist.

Wir betrachten jetzt folgenden aus lauter geradlinigen Strecken $x_1 A_{12}$, $A_{12} x_2$, $x_2 A_{23}$, etc. etc. zusammengesetzten Weg:

$$(4) \qquad x_1 A_{12} x_2 A_{23} x_3 A_{34} x_4 A_{41} x_1 A_{12} x_2 \text{ etc. etc.}$$

Im Allgemeinen wird dieser Weg mit der in sich zurücklaufenden Linie $A_{12} A_{23} A_{34} A_{41} A_{12}$ keineswegs in voller Uebereinstimmung sein, sondern von derselben durch gewisse *Ausläufer* sich unterscheiden, und mit gewissen diesen Ausläufern entsprechenden *Rückkehrpuncten* behaftet sein.

Um näher hierauf einzugehen, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den der Tangente $\mathfrak{L}_2$ entsprechenden Theil $A_{12} x_2 A_{23}$ des Weges (4). Ist x_2 ein *interner* Berührungspunkt, also gelegen *zwischen* A_{12} und A_{23}:

$$A_{12} \ldots . x_2 \ldots . A_{23},$$

so wird man bei Durchlaufung jenes Weges (4) *in constanter Richtung* von A_{12} über x_2 nach A_{23} gelangen. Ist hingegen x_2 ein *externer* Berührungspunct, also auf der Tangente $\mathfrak{L}_2$ *ausserhalb* der Strecke $A_{12} A_{23}$ gelegen:

$$A_{12} \ldots . A_{23} \ldots . x_2,$$

so wird man bei Durchlaufung jenes Weges (4) zuerst *in constanter Richtung* von A_{12} nach x_2, sodann aber *in der entgegengesetzten Richtung* von x_2 nach A_{23} zu gehen haben; sodass also in diesem Fall der Punct x_2 als ein *Rückkehrpunct* jenes Weges (4) zu bezeichnen ist, als ein Punct, in welchem die Richtung jenes Weges plötzlich wechselt, plötzlich in die entgegengesetzte Richtung übergeht.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Bei Verfolgung des Weges (4) hat man von x_1 nach A_{12}, von A_{12} nach x_2, von x_2 nach A_{23} zu gehen, u. s. w. Man hat also successive die *Richtungen* $x_1 A_{12}$, $A_{12} x_2$, $x_2 A_{23}$, etc. etc. einzuschlagen. Und die hier in zweiter und dritter Stelle aufgeführten Richtungen

$$A_{12} x_2 \text{ und } x_2 A_{23}$$

werden unter einander *identisch* sein, falls x_2 ein *interner* Berührungspunct ist; sie werden aber einander *entgegengesetzt* sein, wenn der Punct x_2 ein *externer* Berührungspunct ist. Nach unserer Bezeichnungsweise ist somit:

$$[A_{12} x_2] = \pm [x_2 A_{23}],$$

oder genauer ausgedrückt:

$$(5) \qquad [A_{12}x_2] = f(x_2) \cdot [x_2 A_{23}];$$

denn der Factor $f(x_2)$ ist zufolge der vorhin [zwischen (3) und (4)] gegebenen Definition $= +1$ oder $= -1$, jenachdem x_2 einen internen oder einen externen Berührungspunct vorstellt.

Andererseits können wir nun auf den Weg (4) ohne Weiteres auch den allgemeinen Satz (1) in Anwendung bringen, und gelangen so z. B. zu folgender Formel:

$$(6) \qquad \frac{[x_1 A_{12}]}{[x_1]} = \frac{[A_{12}x_2]}{[x_2]}.$$

Substituirt man hier rechter Hand für $[A_{12}x_2]$ den Werth (5), so erhält man sofort die erste Formel folgenden Systems:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{[x_1 A_{12}]}{[x_1]} = f(x_2)\dfrac{[x_2 A_{23}]}{[x_2]}, \\ \dfrac{[x_2 A_{23}]}{[x_2]} = f(x_3)\dfrac{[x_3 A_{34}]}{[x_3]}, \\ \dfrac{[x_3 A_{34}]}{[x_3]} = f(x_4)\dfrac{[x_4 A_{41}]}{[x_4]}, \\ \dfrac{[x_4 A_{41}]}{[x_4]} = f(x_1)\dfrac{[x_1 A_{12}]}{[x_1]}, \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise sich ergeben. Multiplicirt man aber diese vier Formeln (7) miteinander, so erhält man sofort:

$$(8) \qquad 1 = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdot f(x_4).$$

Die $f(x_h)$ sind nach ihrer Definition alle $= \pm 1$, also im Allgemeinen theils positiv, theils negativ. Und die vorstehende Formel (8) zeigt, dass die Anzahl der *negativen* $f(x_h)$ stets eine *gerade* Zahl sein muss. Mit anderen Worten: Sie zeigt dass die Anzahl der *externen* Berührungspuncte stets eine *gerade* Zahl sein wird. — *Q. e. d.*

Dass der in solcher Art für das Viereck bewiesene Satz in genau derselben Art für jedes beliebige Polygon bewiesen werden kann, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Man wird also sagen können:

Zweiter Satz. — *Einem Kegelschnitt sei irgend ein Polygon umbeschrieben. Und der Berührungspunct einer jeden Polygonseite mag intern oder extern heissen, je nachdem er zwischen den beiden Ecken der Polygonseite, oder aber ausserhalb der von*

diesen beiden Ecken begrenzten Strecke gelegen ist. — *Alsdann wird die Anzahl der im ganzen Polygon vorhandenen externen Berührungspuncte unter allen Umständen eine gerade Zahl sein.*

Ist das betrachtete Polygon ein n-Eck, und werden seine n Berührungspuncte mit $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bezeichnet, so wird dieser allgemeine Satz durch folgende [mit (8) analoge] Formel ausdrückbar sein:

$$1 = f(x_1)\,f(x_2)\,f(x_3)\ \ldots\ f(x_n). \tag{8a}$$

§ 5.

Weitere Sätze aus der Analysis Situs.

Auf Grund der zu Anfang des vorigen Paragraphs gegebenen Definitionen ergeben sich, und zwar unmittelbar aus der geometrischen Anschauung, folgende Sätze:

Dritter Satz. — *Irgend eine Secante $\mathfrak{S}$ des gegebenen Kegelschnitts besitze die beiden Schnittpuncte A und B. Markirt man nun auf $\mathfrak{S}$ zwischen A und B irgend einen Punct x, und lässt man sodann die Secante $\mathfrak{S}$ um diesen Punct x sich drehen, so werden die Puncte A und B in gleichem Sinne längs des Kegelschnitts fortschreiten (nämlich entweder beide in der positiven, oder aber beide in der negativen Umlaufsrichtung).* — Sind $d\alpha$ und $d\beta$ die gleichzeitigen Verschiebungen der Puncte A und B, so wird man also, unter Anwendung der schon früher [in (1), (2)] benutzten Bezeichnungsweise, sagen können, es sei

$$\frac{[d\alpha]}{[A]} = \frac{[d\beta]}{[B]}\,; \tag{9}$$

wo alsdann $[d\alpha]$ und $[d\beta]$ die Richtungen jener Verschiebungen vorstellen, während $[A]$ und $[B]$ die positiven Umlaufsrichtungen des Kegelschnitts respective in den Puncten A und B repräsentiren.

Vierter Satz. — *Markirt man auf der Secante $\mathfrak{S}$ irgend einen ausserhalb der Strecke AB gelegenen Punct x, und lässt man sodann die Secante $\mathfrak{S}$ wiederum um x sich drehen, so werden die Puncte A und B in entgegengesetztem Sinne längs des Kegelschnitts fortschreiten (nämlich einer in der positiven, der andere in der negativen Umlaufsrichtung des Kegelschnitts.)* — Solches kann angedeutet werden durch die Formel:

$$\frac{[d\alpha]}{[A]} = -\,\frac{[d\beta]}{[B]}. \tag{10}$$

Es seien nun in der Ebene irgend zwei Kegelschnitte s und S gegeben, einerlei, ob dieselben einander schneiden oder nicht. Auf der Curve S sei irgend ein Punct A markirt, und von A aus eine Tangente an s gelegt, welche die Curve S zum zweiten Mal in B schneiden mag. Sodann sei von B aus eine *neue* Tangente an s gelegt, welche die Curve S zum zweiten Mal in C schneidet. Endlich sei von C aus eine *neue* Tangente an s gelegt, welche die Curve S zum zweiten Mal in D schneidet.

Die Curven s und S seien *völlig fest*, hingegen der Punct A längs der Curve S *verschiebbar*. Während nun A längs S fortwandert, werden offenbar gleichzeitig auch B, C und D längs dieser Curve S fortschreiten. Die augenblicklichen Berührungspuncte der Linien AB, BC, CD mit der Curve s bezeichnen wir mit x, y, z, sodass wir also folgendes Bild vor Augen haben:

(11) $$AxB, \quad ByC, \quad CzD.$$

Wir beschränken uns auf ein unendlich kleines Zeitelement der in Rede stehenden Bewegung, und bezeichnen die diesem unendlich kleinen Zeitelement entsprechenden Verschiebungen der Puncte A, B, C, D respective mit $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\delta$. Nach den Sätzen (9), (10) ist alsdann z. B.

(12) $$\frac{[d\alpha]}{[A]} = \pm \frac{[d\beta]}{[B]};$$

und zwar wird hier das positive oder negative Vorzeichen anzuwenden sein, jenachdem der Punct x auf der Linie AB *zwischen* A und B, oder aber *ausserhalb* der Strecke AB sich befindet, d. h. jenachdem dieser Punct x einen *internen*, oder aber einen *externen* Berührungspunct repräsentirt. Unter Anwendung der früher [zwischen (3) und (4)] eingeführten Signatur $f(x)$, wird daher die Formel (12) folgendermassen zu schreiben sein:

(13) $$\frac{[d\alpha]}{[A]} = f(x)\frac{[d\beta]}{[B]}.$$

Analoges gilt offenbar für B und C, und auch für C und D; sodass man zu folgendem Formelsystem gelangt:

(14) $$\frac{[d\alpha]}{[A]} = f(x)\frac{[d\beta]}{[B]}, \quad \frac{[d\beta]}{[B]} = f(y)\frac{[d\gamma]}{[C]}, \quad \frac{[d\gamma]}{[C]} = f(z)\frac{[d\delta]}{[D]};$$

woraus durch Multiplication sich ergiebt:

(15) $$\frac{[d\alpha]}{[A]} = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) \cdot \frac{[d\delta]}{[D]}.$$

Zufolge des vorhin aufgestellten allgemeinen Satzes [vgl. (8a)], wird nun aber das Product $f(x)f(y)f(z) = 1$ sein, falls *zufälliger* Weise A und D zu *Anfang* des hier betrachteten unendlich kleinen Zeitelementes miteinander *coincidiren*. In diesem besonderen Fall wird also die Formel (15) übergehen in

$$(16) \qquad \frac{[d\alpha]}{[A]} = \frac{[d\delta]}{[D]},$$

wo in Folge der genannten Coincidenz, das $[D]$ durch $[A]$ ersetzbar ist. In dem in Rede stehenden besonderen Fall wird daher $[d\alpha] = [d\delta]$, d. h. die Richtung der beiden Verschiebungen $d\alpha$ und $d\delta$ *ein und dieselbe* sein.

Hiermit ist jener Mangel, von welchem im dritten Paragraph die Rede war, nicht nur für das *Dreieck*, sondern ganz allgemein für *jedes beliebige Polygon* beseitigt. Denn die hier angewendete Methode ist offenbar der Art, dass sie nicht nur beim Dreieck, sondern in genau derselben Weise bei jedem beliebigen Polygon sich benutzen lässt.

Druckfertig erklärt 3. VIII. 1901.]

Gerhard Kowalewski: *Ueber Fusspunktcurven von Ovalen mit Mittelpunkt.*

In einer Nummer[1]) des „*Intermédiaire*" wird die Aufgabe gestellt, den Flächeninhalt des Gebietes zu berechnen, welches die Fusspunktcurve einer Ellipse (inbezug auf irgend einen Punkt) umgrenzt. Dabei soll aber unter Fusspunktcurve der Ort der Fusspunkte aller Lote verstanden werden, die nicht auf die Tangenten, sondern auf gewisse andere Geraden gefällt sind. Diese Geraden erhält man, wenn man jede Tangente um ihren Berührungspunkt in positivem Sinne eine Drehung ε ausführen lässt, wobei ε für alle Tangenten denselben Werth hat.[2]) Für $\varepsilon = 0$ hat man den gewöhnlichen Fall.

Die genannte Aufgabe lässt sich, wie wir sehen werden, mit ganz geringem Aufwand an Rechnung lösen, und es ist bemerkenswerth, dass man sie auch für ein *beliebiges* Oval mit Mittelpunkt bis zu einem gewissen Grade erledigen kann. Die Methode, welche ich im folgenden anwende, habe ich von Herrn E. CESÀRO[3]) gelernt.

Wir beziehen alles auf das bewegliche Axensystem, welches die Tangente und die Normale in irgend einem Punkte der Randcurve unseres Ovals bilden. Die positive Richtung der Tangente, die wir als x-Axe wählen, soll dem positiven Umfahrungssinn[4]) entsprechen. Bei der y-Axe sei diejenige Richtung die positive, welche in das Innere des Ovals weist. Um die Lage eines

---

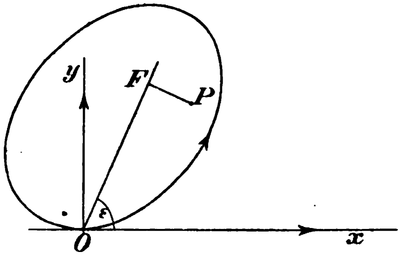
1) April, 1901.

2) Die Aufgabe wird noch etwas allgemeiner gestellt. Anstatt der Lote werden Geraden gewählt, die mit jenen einen constanten Winkel α bilden. Dann tritt aber, wie man leicht erkennt, zu dem Flächeninhalt nur der Factor $\cos^{-2}\alpha$ hinzu.

3) Vgl. dessen Buch „Lezioni di geometria intrinseca".

4) Bei positiver Umkreisung des Ovals liege das Innere zur linken Hand.

solchen Axensystems zu fixiren, genügt es, den Winkel $\varphi (\geq 0)$ anzugeben, um welchen sich die x-Axe dreht, wenn man das System längs der Randcurve aus einer (willkürlich gewählten) Anfangslage in die neue Lage überführt und dabei den Anfangspunkt O den positiven Umfahrungssinn verfolgen lässt.



Die Coordinaten x, y eines in der Ebene festen Punktes P sind Functionen von φ, die den leicht abzuleitenden Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dx}{d\varphi} = y - \varrho, \quad \frac{dy}{d\varphi} = -x$$

genügen, wo ϱ der Krümmungsradius der Randcurve an der durch φ charakterisirten Stelle ist.[1] Ist (x_0, y_0) der Mittelpunkt des Ovals, so wird auch für ihn

$$(1') \qquad \frac{dx_0}{d\varphi} = y_0 - \varrho, \quad \frac{dy_0}{d\varphi} = -x_0$$

sein, und man hat also

$$\frac{d(x - x_0)}{d\varphi} = y - y_0, \quad \frac{d(y - y_0)}{d\varphi} = -(x - x_0),$$

woraus sofort folgt

$$(2) \qquad x = x_0 + c \sin(\varphi + \gamma), \quad y = y_0 + c \cos(\varphi + \gamma).$$

Hier bedeutet die Constante c, welche wir als positiv voraussetzen dürfen, die Entfernung des Punktes (x, y) vom Mittelpunkt.

Durch den Anfangspunkt O (vgl. die Figur) sei nun unter dem constanten Winkel ε gegen die x-Axe eine Gerade gezogen. Ihre Gleichung lautet

$$(3) \qquad \eta \cos \varepsilon - \xi \sin \varepsilon = 0$$

wenn ξ, η die laufenden Coordinaten bedeuten.[2] Der Fusspunkt F des von P auf die Gerade (3) gefällten Lotes beschreibt, wenn

1) Vgl. das zweite Capitel des oben citirten CESÀRO'schen Buches oder Seite 21 der von mir herausgegebenen deutschen Übersetzung (Leipzig, Teubner).

2) Diese Gerade ist mit dem beweglichen Axensystem starr verbunden.

φ von 0 bis 2π zunimmt, eine Fusspunktcurve im oben angegebenen allgemeineren Sinne. Ist F' die Lage von F, welche dem Werte $\varphi + d\varphi$ entspricht, so schliessen PF und PF' augenscheinlich einen Winkel ein, der gleich $d\varphi$ ist, und der Inhalt des elementaren Dreiecks PFF' wird also ausgedrückt sein durch

$$dJ = \tfrac{1}{2} PF^2 \cdot d\varphi .$$

Nun ist aber abgesehen vom Vorzeichen

$$PF = y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon ,$$

mithin

(4) $$dJ = \tfrac{1}{2} (y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon)^2 d\varphi .$$

Wenn wir annehmen, dass niemals die Gerade (3) den Punkt P trifft, so ist der Inhalt J des von der Curve (F)[1]) umgrenzten Gebietes

(4′) $$J = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon)^2 d\varphi .$$

Kommt es vor, dass P von der Geraden (3) getroffen wird, so ist die Formel (4′) nicht ohne weiteres anwendbar. Im allgemeinen würde man den Flächeninhalt von (F) erst definiren müssen. Liegt P im Innern des Ovals, so gilt (4′) jedenfalls für genügend kleine Werte von ε.

Benutzen wir jetzt die Formeln (2) und setzen zur Abkürzung $\gamma' = \gamma + \varepsilon$ und

$$J_0 = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y_0 \cos \varepsilon - x_0 \sin \varepsilon)^2 d\varphi ,$$

so kommt

$$J = J_0 + c \int_0^{2\pi} (y_0 \cos \varepsilon - x_0 \sin \varepsilon) \cos (\varphi + \gamma') d\varphi + \tfrac{1}{2} c^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 (\varphi + \gamma') d\varphi .$$

Die Coordinaten (x_0, y_0) des Mittelpunktes sind nun aber Functionen von φ mit der Periode π, während $\cos(\varphi + \gamma')$ bei Vermehrung von φ um π sein Vorzeichen ändert. Daraus folgt

---

1) Die von einem Punkt beschriebene Curve bezeichne ich mit Herrn E. Cesàro durch den Punkt in Klammern.

$$\int_0^{2\pi} (y_0 \cos\varepsilon - x_0 \sin\varepsilon) \cos(\varphi + \gamma') d\varphi = 0.$$

Ferner hat man

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi + \gamma') d\varphi = \pi,$$

so dass also

(4*) $$J = J_0 + \tfrac{1}{2}\pi c^2$$

wird. Aus dieser Formel erkennen wir, dass *J bei gegebenem ε nur von der Entfernung c abhängt, welche der Punkt P* (von dem aus die Fusspunktcurve gebildet ist) *vom Mittelpunkte des Ovals hat.*

Um J_0 zu berechnen, bemerken wir, dass

$$J_0 = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2\varepsilon \int_0^{2\pi} y_0^2 d\varphi - 2\cos\varepsilon\sin\varepsilon \int_0^{2\pi} x_0 y_0 d\varphi + \sin^2\varepsilon \int_0^{2\pi} x_0^2 d\varphi\right)$$

ist. Nach (1′) ist aber

$$\int_0^{2\pi} x_0 y_0 d\varphi = -\int_0^{2\pi} y_0 dy_0 = -\tfrac{1}{2}(y_0^2)_0^{2\pi} = 0,$$

ferner können wir auf Grund von (1′) schreiben[1])

$$\int_0^{2\pi} x_0^2 d\varphi = -\int_0^{2\pi} x_0 dy_0 = \int_0^{2\pi} y_0 dx_0 = \int_0^{2\pi} y_0(y_0 - \varrho) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} y_0^2 d\varphi - \int_0^{2\pi} y_0 ds,$$

wobei wir mit ds das Bogenelement der Randcurve bezeichnen. Das letzte Integral stellt $2A$, den doppelten Flächeninhalt des Ovals, dar. Wir setzen noch

$$B = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} y_0^2 d\varphi$$

---

1) Hierbei ist benutzt $\int_0^{2\pi} d(x_0 y_0) = 0$.

und bemerken, dass B der Flächeninhalt des Gebietes ist, welches die vom Mittelpunkt des Ovals aus in der gewöhnlichen Weise ($\varepsilon = 0$) gebildete Fusspunktcurve umgrenzt. Dann können wir, da $J_0 = B - A\sin^2\varepsilon$ ist, die Formel (4*) definitiv so schreiben:

$$J = B - A\sin^2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\pi c^2. \tag{4}$$

Es ist ein bemerkenswerthes Resultat, dass J nur von A und von B abhängt und *die Differenz* $J - B$ sogar *nur von dem Flächeninhalt des Ovals*, wenn ε und c gegeben sind.

Wir erledigen jetzt noch kurz den Fall der Ellipse, auf den sich die Aufgabe im „Intermédiaire" bezieht. Es handelt sich offenbar nur um die Berechnung von B. Man findet aber leicht, wenn man als Anfangslage für O den einen Endpunkt der grossen Axe der Ellipse wählt,

$$y_0^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

also

$$B = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} y_0^2\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2),$$

und die Formel (4) wird daher im Falle der Ellipse, da $A = \pi ab$ ist,

$$J = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - \pi ab\sin^2\varepsilon. \tag{4'}$$

Man kann sich sogar alle Rechnung ersparen, wenn man den Satz benutzt, dass die (gewöhnliche) Fusspunktcurve der Ellipse in Bezug auf einen Brennpunkt $(c = \sqrt{a^2 - b^2})$ der über der grossen Axe als Durchmesser beschriebene Kreis ist. Da dessen Flächeninhalt gleich πa^2 ist, so wird die Formel (4)

$$\pi a^2 = B + \tfrac{1}{2}\pi(a^2 - b^2),$$

woraus wieder folgt

$$B = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2).$$

Druckfertig erklärt 24. VII. 1901.]

E. Study: *Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie.*

Für die Leichtigkeit, mit der irgend welche Figuren aus der Geometrie einer Gruppe eindeutiger Transformationen behandelt werden können, ist es sehr wesentlich, eine gleichförmige analytische Darstellung dieser Figuren zu kennen, eine Darstellungsart, die alle mit einander äquivalenten Figuren umfasst, und also eine Erörterung von Ausnahmefällen nach Möglichkeit erspart. In der ebenen projectiven Geometrie konnte dies u. A. bei Linienelementen (Elementen 1. O.) leicht erreicht werden durch das Hülfsmittel der homogenen Coordinaten. Doch war der Vortheil in diesem Falle noch nicht allzugross gegenüber der (theilweise homogenen) Darstellung dieser Elemente durch elementare Coordinaten $(x, y,\ dx : dy)$. Grösseren Nutzen dürfte man wohl erwarten, wenn es gelingen sollte, die durch die elementaren Coordinaten (x, y, y', y'') nur in sehr unvollkommener Weise darstellbaren Elemente 2. Ordnung einer erschöpfenden projectiv-invarianten Darstellung zugänglich zu machen. Indessen sind auf Herstellung eines geeigneten Rechnungsapparates dieser Art gerichtete Versuche mehrerer Autoren bis jetzt nicht von Erfolg begleitet gewesen.[1] Es war daher für den Verfasser überraschend, als bei Anwendungen des Cantor'schen Begriffs *abgeschlossenes Continuum* auf Gruppentheorie (insbesondere auf die allgemeine projective Gruppe mit dem Kegelschnitt als Raumelement) sich zeigte, dass eine überaus einfache projectiv-invariante Darstellung der Elemente 2. Ordnung vorhanden ist.

In ihrer ursprünglichen Form sind die neuen Coordinaten der Elemente 2. Ordnung ebenfalls noch nicht erschöpfend.

---

1) Vgl. Fr. Engel, Die höheren Differentialquotienten (§ 2) Leipz. Ber. 1893. S. 468 u. ff. Die dort — für Elemente *n*. Ordnung — angegebenen Coordinaten sind von der Art derer, die wir in § 6 besprechen, aber noch verwickelter.

Allein dieser Mangel fällt hier deshalb wenig ins Gewicht, weil die auszuschliessenden Elemente *invariante* Mannigfaltigkeiten bilden, und überdies ist er sehr leicht auszubessern. Immerhin haben die einzuführenden projectiven Elementcoordinaten etwas Singuläres an sich, was hervorzuheben wir nicht unterlassen wollen. Schon die Elemente 3. O. sind viel schwerer zugänglich, und in der Geometrie des Raumes ist die analoge Theorie von speciellerer Natur.

Ein Theil des Vorzutragenden kann als typisch angesehen werden für eine Gattung von Ueberlegungen, die bei manchen Fragen von principieller Bedeutung, besonders in der Theorie stark transitiver continuirlicher Gruppen Cremona'scher Transformationen mit grossem Vortheil angestellt werden können. Es hat ferner Fr. Engel, dem der Verfasser die Grundgedanken seiner Untersuchung mitgetheilt hatte, die Frage nach einer umfassenden Darstellung der Elemente höherer Ordnung in Ebene und Raum von Neuem aufgenommen, und es ist ihm nunmehr gelungen, einen Theil der damit verknüpften nicht geringen Schwierigkeiten zu überwinden. Dass mit der vorliegenden Untersuchung ein aussichtsreicher Forschungsweg eröffnet ist, dürfte übrigens wohl schon aus dieser selbst hervorgehen. Wir erwähnen als Hauptergebnisse die Einführung des neuen Begriffs der *orientirten* Elemente 2. O., den Nachweis eines bisher unbekannten Zusammenhanges der Elemente 2. O. eines ternären Gebietes mit der Plücker'schen *Liniengeometrie*, insbesondere der Theorie der sogenannten linearen homogenen Gruppe im Raume, endlich *eine neue Classification der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen 2. Ordnung.*

Begriff und Eigenschaften der Elemente 2. O. werden wir von Grund aus entwickeln. Hingegen musste, ausser einigen elementaren Begriffsbildungen aus der Theorie der Transformationsgruppen, die sogenannte *symbolische Methode* der Invariantentheorie als dem Leser geläufig vorausgesetzt werden. Die Vortheile dieser Methode sind so gross, dass auf ihren Gebrauch verzichten einem schliesslich doch nur in Einseitigkeit und Bequemlichkeit wurzelnden Vorurtheil ein zu grosses Opfer bringen hiesse.

§ 1.

Ein erstes Continuum von Elementen 2. Ordnung.

Collineationen oder Correlationen denken wir uns stets dargestellt durch lineare Substitutionen von der Determinante $+1$. Die Transformationscoefficienten sind dann bestimmt bis auf dritte Einheitswurzeln. Ist also die betrachtete Transformation reell, so kann sie nur auf eine Weise mit reellen Coefficienten geschrieben werden.

Ein Element 1. Ordnung kann erklärt werden als der Inbegriff aller analytischen Curven, die in einem Punkte X dieselbe Tangente U haben.[1]) Da dieser Inbegriff durch den Punkt X und die mit ihm vereinigt liegende Gerade U vollkommen bestimmt ist, so kann man auch, nach S. Lie, die Figur des Linienelementes (X, U) selbst als „Element 1. O." bezeichnen: die zweimal drei Verhältnissgrössen

$$(1) \qquad X_1 : X_2 : X_3 \quad ; \quad U_1 : U_2 : U_3$$

sind dessen „Coordinaten", und die Bedingung vereinigter Lage zweier consecutiver Elemente 1. O. ist, in bekannter Bezeichnung

$$(2) \qquad (X d U) = -(U d X) = 0.$$

Vereine von Elementen 1. O. giebt es drei Arten: Die Linienelemente „krummer Curven" (krumme Vereine), ∞^2 Vereine mit festem Punkt (Punktvereine) und ∞^2 Vereine mit fester Geraden (gerade Vereine).

Wir erklären nun, vorläufig noch die Punkte vor den Geraden auszeichnend, ein *eigentliches Element 2. Ordnung* als Inbegriff aller analytischen Curven, die in einem Punkte X mit einer dort sich regulär verhaltenden unter ihnen dreipunktige Berührung, mit der Tangente U dieser Curve im Punkte X aber nur zweipunktige Berührung haben.

Um zu einer analytischen Darstellung dieser von *vier* Constanten abhängigen Figur zu kommen, bemerken wir, dass sich unter den genannten Curven insbesondere ∞^2 irreducibele Kegelschnitte befinden, deren jeder einzelne, zusammen mit X oder U, bereits die ganze Figur definirt und bei der Betrachtung, auf

1) Wir beschränken uns durchaus auf analytische Gebilde. Dass im reellen Gebiet die Voraussetzungen allgemeiner gewählt werden können, ist selbstverständlich.

die es hier ankommt, die zuvor genannte Curve vertreten kann. $(CZ)^2 = 0$ sei die Punktgleichung eines solchen Kegelschnittes, $(WR)^2 = \frac{1}{2}(CC'W)^2 = 0$ seine Liniengleichung, $J = \frac{1}{3}(CR)^2$ seine Invariante. Sind dann die Coordinaten X_1, X_2, X_3 des auf dem Kegelschnitt gelegenen Punktes X übrigens beliebig aber bestimmt gewählt, so kann man den Coordinaten U_1, U_2, U_3 Werthe beilegen, die *vermöge eines gegenüber Collineationen (von der Determinante Eins) invarianten Gleichungssystems* bis auf dritte Einheitswurzeln bestimmt sind:

Man setze $U_i = J^{-\frac{1}{3}} \cdot (CX) C_i$, oder

(3a) $$(UZ) = J^{-\frac{1}{3}} \cdot (CX)(CZ)$$

(für alle Z); X lässt sich dann auf ähnliche Art umgekehrt wieder durch U darstellen: Es wird

(3b) $$(WX) = J^{-\frac{2}{3}} \cdot (UR)(WR)$$

für alle W.

Das hiermit dreideutig bestimmte Werthsystem der Grössen U^i ist nun ganz unabhängig davon, welchen der ∞^2 einander dreipunktig berührenden Kegelschnitte man zu seiner Herstellung benutzt hat.

Man beweist diesen Satz durch eine leichte Rechnung: Sind V_i homogene Coordinaten irgend einer Geraden durch X, so ist

$$(DZ)^2 = (CZ)^2 + (UZ)(VZ) = 0$$

irgend einer der fraglichen Kegelschnitte. Substituirt man dann $(DZ)^2$ an Stelle von $(CZ)^2$, so erhält man an Stelle von (3) wieder dieselben Gleichungen; die Grössen V_i fallen heraus. Umgekehrt tritt dies auch *nur* dann ein, wenn V durch X geht. Betrachtet man also jetzt die Grössen X_i, die nach Voraussetzung nicht sämmtlich verschwinden, und die Grössen U_i, die dann ebenfalls nicht sämmtlich verschwinden können, als gegeben, so definiren die Gleichungen (3) ein System von ∞^2 irreducibelen einander dreipunktig berührenden Kegelschnitten; mit anderen Worten, sie definiren ein eigentliches Element 2. Ordnung. — Wir haben hiermit Folgendes erkannt:

Zur analytischen Darstellung der eigentlichen Elemente 2. Ordnung eines ternären Gebietes kann ein System von sechs homogenen Grössen

(4) $$X_1 : X_2 : X_3 : U_1 : U_2 : U_3$$

benutzt werden, die der Gleichung

$$(5) \qquad (UX) = U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0$$

genügen, mit der Maassgabe, dass nicht nur gleichzeitige Multiplication der sechs Grössen mit einem und demselben Factor ϱ, *sondern ausserdem auch Multiplication der Grössen* U_i *oder* X_i *mit einer dritten Einheitswurzel gestattet ist.*

Die Grössen X_i *und* U_i *sind zugleich Coordinaten des zum Element 2. Ordnung gehörigen Elementes 1. Ordnung (des entsprechenden Linienelementes).*

Ausser den ∞^4 *eigentlichen Elementen 2. Ordnung stellen die genannten homogenen Grössen noch dar die* ∞^2 *Punkte*

$$(6) \qquad X_1 : X_2 : X_3 : 0 : 0 : 0$$

und die ∞^2 *Geraden*

$$(7) \qquad 0 : 0 : 0 : U_1 : U_2 : U_3.$$

Der Inbegriff dieser dreierlei Figuren bildet ein abgeschlossenes projectiv-invariantes Continuum.

Hier vertritt natürlich z. B. eine Gerade den Inbegriff aller analytischen Curven, von denen sie dreipunktig berührt wird.

Neben die Definition von „eigentlichen Elementen 2. Ordnung“, von der wir ausgegangen sind, stellt sich eine zweite zu jener correlativen Begriffsbildung. Diese ist aber, wie man leicht nachweisen kann, von der ersten materiell nicht verschieden. Haben zwei an der Stelle (X, U) sich regulär verhaltende Curven als Oerter von Punkten aufgefasst dreipunktige Berührung, so haben sie, als Oerter von geraden Linien betrachtet, auch dreilinige Berührung; beides lässt sich auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, dass die Curven zwei consecutive Linienelemente gemein haben, oder dass sie einander „osculiren“. Dem entsprechend gehen die Gleichungen (3a) in (3b) über, wenn man X und U vertauscht, und ungleich $(CZ)^2$ durch $(WR)^2$ und also $(WR)^2$ durch $J \cdot (CZ)^2$, J durch J^2 ersetzt: Man erhält, bei correlativem Ausgangspunkt, genau dieselben Coordinaten von „eigentlichen Elementen 2. Ordnung“, und dieselbe Ergänzung des nicht abgeschlossenen Continuums dieser Elemente durch *uneigentliche Elemente 2. O.*, wie wir nunmehr die den eigentlichen Elementen hinzugefügten Figuren (die ∞^2 Punkte und die ∞^2 Geraden) nennen wollen.

Die Ergänzung irgend einer Mannigfaltigkeit geometrischer Figuren zu einem *abgeschlossenen Continuum*, in dem *jede* unendliche Menge

solcher Figuren wohldefinirte Häufungsstellen hat, ist im Princip überall da zu fordern, wo man sich nicht auf eine „Umgebung einer Stelle allgemeiner Lage“ beschränken will (wie man es bei vielen Untersuchungen nothgedrungen thun muss); insbesondere ist sie zu fordern bei *algebraischen* Untersuchungen. Solche Ergänzungen eines nach seiner Definition noch nicht abgeschlossenen Continuums (wie z. B. des Continuums der „im Endlichen“ gelegenen Punkte) lassen sich aber in mannigfacher Weise vornehmen, und es wird weiter zu fordern sein, dass sie da, wo die Ausführung des Gedankens sich als lohnend erweist, nicht nach Willkür, und auch wo möglich nicht nur nach mathematischem Tactgefühl, sondern nach einem wissenschaftlichen Princip geschehen. Wir werden später an dem Beispiel der Elemente 2. Ordnung sehen, wie das in vielen und wichtigen Fällen ausgeführt werden kann. Es kann und wird in der Regel sich zeigen, dass verschiedenartigen Bedürfnissen auch verschiedenartige Ergänzungen desselben Continuums angepasst werden können. Auch das erklärte Continuum eigentlicher und „uneigentlicher“ Elemente 2. Ordnung ist nicht das einzige mögliche. Es entspricht nicht den Forderungen, die vom Standpunkte der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen aus an die Behandlung des Gegenstandes zu stellen sind. Seine Bedeutung liegt auf einem anderen Gebiet, wie sich später finden wird. Wir werden aber noch sehen, wie man jenen Forderungen gerecht werden kann. Kenntniss von Eigenschaften des bis jetzt erklärten „ersten“ Elementcontinuums erleichtert dann sehr Darstellung und wohl auch Verständniss.

§ 2.

Vereine von Elementen 2. Ordnung im ersten Continuum.

Wir entwickeln zunächst noch einige weitere Hülfsmittel.

Vorgelegt sei eine krumme (d. h. von einer Geraden und von einem Punkt verschiedene) analytische Curve in Parameterdarstellung. Gesucht wird das zu einem regulären Punkt (oder einer Geraden) der Curve gehörige Element 2. Ordnung.

Der Punkt der zu betrachtenden Curve habe in Liniencoordinaten W_i die Gleichung $(WP) = 0$. Die Punktcoordinaten P_i seien analytische Functionen eines Parameters t, bestimmt bis auf einen gemeinsamen Factor $\varrho(t)$, und durch gewöhnliche Potenzreihen darstellbar in einer gewissen Umgebung von $t = t_0$. Die (sog. WRONSKI'sche) Determinante $(PP'P'')$ — die einfachste projective Differentialinvariante[1]) — und also auch die Differential-

1) Die Grösse ist relative Differentialinvariante der *unendlichen* Gruppe, die von den linearen Transformationen und den Transformationen $\bar{P}_i = \varrho(t) P_i$, $t = t(\tau)$ erzeugt wird.

Covariante $(PP'Z)$ sei von Null verschieden für $t = t_0$; es werden dadurch der Punkt $t = t_0$ und seine Tangente als *regulär* charakterisirt.

Brechen wir nun die Reihenentwickelung

$$(WP) = (WP_0) + (WP_0')(t - t_0) + \tfrac{1}{2}(WP_0'')(t - t_0)^2 + \cdots$$

nach dem quadratischen Gliede ab, so erhalten wir damit eine Parameterdarstellung eines irreducibelen Kegelschnittes, der mit der vorgelegten Curve bei $t = t_0$ dreipunktige Berührung hat. Die Liniengleichung dieses Kegelschnittes ist, wenn wir für P_0 wieder kürzer P schreiben, offenbar

$$(WR)^2 = 2(WP)(WP'') - (WP')^2 = 0.$$

Da zugleich mit (3), wie bemerkt, auch die correlativen Gleichungen gelten, so kann man, umgekehrt wie in § 1, $(WR)^2$ als Grundform wählen, und $(\bar{C}Z)^2 = \frac{1}{2}(RR'Z)^2$, $\bar{J} = \frac{1}{3}(\bar{C}R)^2$ setzen. Es findet sich dann

$$(\bar{C}Z)^2 = 2(PP'Z)(P'P''Z) - (PP''Z)^2 = 0$$

als Punktgleichung des Kegelschnittes, und

$$\bar{J} = \tfrac{1}{3}(\bar{C}R)^2 = (PP'P'')^2.$$

Mithin ergeben sich, nach der zu (3) correlativen Regel, oder auch — bei Ersetzung von $\bar{J}$ durch J^2 — nach der Regel (3) selbst, die folgenden *Coordinaten des gesuchten Elementes* 2. *Ordnung:*

$$(8)\quad \begin{aligned} &X_1 = (PP'P'')^{\frac{1}{3}} \cdot P_1, \quad X_2 = (PP'P'')^{\frac{1}{3}} \cdot P_2, \quad X_3 = (PP'P'')^{\frac{1}{3}} \cdot P_3, \\ &U_1 = P_2 P_3' - P_3 P_2', \quad U_2 = P_3 P_1' - P_1 P_3', \quad U_3 = P_1 P_2' - P_2 P_1'. \end{aligned}$$

Wir schreiben hierfür kürzer, und für die Rechnung — die ein Sichtbarmachen der einzelnen Coordinaten meistens nicht verlangen wird — bequemer

$$X = (PP'P'')^{\frac{1}{3}} \cdot P, \quad U = \widehat{PP'}.$$

Natürlich gelten bei einer als Ort von Linien gegebenen Curve die hierzu correlativen Formeln.

Ist insbesondere $(PP'P'')^{\frac{1}{3}} = 1$, so wird, wenn $(AZ) = (PP'Z)$ gesetzt wird, umgekehrt $(WP) = (AA'W)$. Die X, U erlangen die Eigenschaft der P, A, wenn man die rechten Seiten in (8) durch Division mit $(PP'P'')^{\frac{2}{3}}$ auf die Dimension Null bringt.

Es wird daher vielfach zweckmässig sein, an Stelle von (8) die Gleichungen

$$(8^*) \qquad X = (PP'P'')^{-\frac{1}{3}} \cdot P, \qquad U = (PP'P'')^{-\frac{2}{3}} \cdot \widehat{PP'}$$

zu benutzen, in denen, abgesehen vom Parameter t, nur noch eine dritte Einheitswurzel willkürlich bleibt. Man hat dann eine von unendlich vielen ausgezeichneten Darstellungsweisen der betrachteten analytischen Curve vor sich: Nicht nur sind die Punkt- und Liniencoordinaten einer regulären Stelle unmittelbar die Coordinaten des zugehörigen Elementes 2. O., sondern es bestehen überdies die Beziehungen

$$(9) \qquad U = \widehat{XX'}, \qquad X = \widehat{UU'}.$$

Wie man aber auch über den Parameter t, über den gemeinsamen Proportionalitätsfactor $\varrho(t)$ der Grössen X_i, U_i, und über die willkürliche dritte Einheitswurzel verfügen möge, immer ist

$$(10) \qquad (XX'X'') = (UU'U'').$$

Umgekehrt ist das Bestehen dieser Gleichung die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die laufenden Coordinaten $X_i(t)$, $U_i(t)$ eines Punktes X und der zugehörigen Tangente U einer in Parameterdarstellung vorgelegten analytischen Curve als homogene Grössen in eine Reihe gestellt und als Coordinaten des zugehörigen Elementes 2. Ordnung betrachtet werden können.

Man hat dann nämlich nur X und U durch $(XX'X'')^{\frac{1}{3}} = (UU'U'')^{\frac{1}{3}}$ zu dividiren, um die für das Bestehen der symbolischen Gleichungen (9) charakteristischen Relationen

$$(10^*) \qquad (XX'X'') = 1 = (UU'U'')$$

herzustellen. —

Beziehungen der eigentlichen Elemente 2. Ordnung zu Elementen 1. Ordnung.

Das eigentliche Element 2. O. mit den Coordinaten (4) — kürzer das Element $(X:U)$ — gehört zu dem Element 1. O. mit den Coordinaten $X_1 : X_2 : X_3$; $U_1 : U_2 : U_3$ — kürzer zum Linienelement (X, U) — und es bestimmt noch ein diesem benachbartes Linienelement, das mit dem Linienelement (X, U) selbst vereinigt liegt. Um dieses Nachbarelement zu finden, nehme man zwei von Null verschiedene Grössen σ, τ nach Belieben an — z. B. $\sigma = \tau = 1$ — und bestimme dann X', U' so, dass identisch, d. h. für alle Z, W

(11) $\sigma^2(XX'Z) = \tau(UZ), \quad \tau^2(UU'W) = \sigma(WX)$

wird. Das gesuchte Nachbarelement ist dann gegeben durch

(12) $(WX_1) = (WX) + (WX')dt, \; (U_1Z) = (UZ) + (U'Z)dt,$

wofür wir auch abkürzend schreiben können

$$X_1 = X + X'dt, \quad U_1 = U + U'dt.$$

Die Gleichungen (11) ziehen nach sich die Gleichungen $(UX') = 0$, $(U'X) = 0$, die die vereinigte Lage der Elemente 1. O. (X, U), (X_1, U_1) aussagen. Sind umgekehrt zwei consecutive Elemente 1. Ordnung in vereinigter Lage gegeben, derart, dass weder ihre Punkte noch ihre Geraden zusammenfallen, so bestimmen sie ein eigentliches Element 2. O., dessen Coordinaten sich von denen des Punktes X und der Geraden U um je einen Factor unterscheiden. Dieser Factor ist leicht zu bestimmen. Man nehme eine Hülfsgerade W und einen Hülfspunkt Z übrigens beliebig, aber so an, dass (UZ) und also auch $(XX'Z)$, sowie (WX) und also auch $(UU'W)$ von Null verschieden sind.

Das durch die vereinigten Elemente 1. Ordnung (X, U) und (X_1, U_1) bestimmte eigentliche Element 2. Ordnung wird dann

(13) $\left(\sqrt[3]{(UZ)(UU'W)} \cdot X : \sqrt[3]{(XX'Z)(WX)} \cdot U\right).$

Das Verhältniss der beiden dritten Wurzeln ist von Z und W unabhängig. —

Die Bedingung dafür, dass zwei consecutive eigentliche Elemente 2. O. $(X : U)$ und $(X_1 : U_1) = (X + X'dt : U + U'dt)$ derselben Curve angehören können, besteht darin, dass die zugehörigen Elemente 1. O. (X, U) und (X_1, U_1) derart vereinigt sind, dass sie zusammen das Element 2. O. $(X : U)$ bestimmen. Es muss dann also möglich sein, einen Proportionalitätsfactor $\varrho\ (\neq 0)$ so zu wählen, dass

$$\varrho^2(XX'Z) = \varrho(UZ), \quad \varrho^2(UU'W) = \varrho(WX)$$

wird für alle Z, W.

Die gestellte Forderung führt also zu den Gleichungen

(14a) $(UX') = 0, \quad (U'X) = 0,$

(14b) $(XX'Z)(WX) = (UU'W)(UZ).$

Umgekehrt sind diese Bedingungen auch *hinreichend* für die verlangte Lage der beiden Elemente 2. O., wenn man die weitere Forderung hinzufügt, dass nicht der Punkt X_1 mit X oder die

Gerade U_1 mit U zusammen fallen soll. Lässt man hingegen die letzte Forderung fallen, so können die Gleichungen (14a) und (14b) noch auf andere Art erfüllt werden: Wir bilden daher nunmehr den weiteren Begriff der *vereinigten Lage* zweier consecutiver Elemente 2. O. im betrachteten („ersten") Continuum (§ 1), zu dessen *Definition* wir eben die Gleichungen (14) erheben.

Zwei consecutive Elemente 2. O. des ersten Continuums sind in vereinigter Lage:

Erstens, falls beide Elemente eigentlich sind, und ihre Punkte X, X_1 und Geraden U, U_1 nicht zusammenfallen, wenn sie durch eine krumme Curve (und folglich durch unendlich viele Curven) verbunden werden können.

Zweitens, falls beide Elemente eigentlich sind, wenn ihre Punkte X, X_1 und folglich (nach 14b) auch ihre Geraden U, U_1 zusammen fallen.

Drittens, falls das Element $(X : U)$ sich auf einen Punkt $(X : 0)$ reducirt, dann, wenn die Gerade des Nachbarelementes U_1 durch X geht, und dessen Punkt mit X selbst zusammenfällt.

Viertens und letztens unter den Voraussetzungen, die zu den soeben genannten correlativ sind.

Man kann, wie unschwer zu erkennen, von jedem eigentlichen oder uneigentlichen Element 2. O. innerhalb des von diesen gebildeten, vierfach ausgedehnten Continuums in ∞^1 Richtungen zu benachbarten und mit ihm vereinigten fortschreiten.

Wir nennen nunmehr Verein von Elementen 2. O. des betrachteten Continuums jede analytische Mannigfaltigkeit von ∞^r solchen Elementen, in der (innerhalb einer gewissen Umgebung eines Elementes allgemeiner Lage) je zwei consecutive Elemente vereinigt sind.

Um alle möglichen Vereine zu finden, nehmen wir zuerst an, es sei in einem solchen weder der Punkt X noch die Gerade U eines Elementes allgemeiner Lage unveränderlich. Dann sagen die Gleichungen (14a) aus, dass jedenfalls ∞^1 Elemente des Vereins vorhanden sind, deren Linienelemente (X, U) eine krumme Curve umhüllen. Solche Elemente erhält man nämlich immer dann, wenn man die r Parameter des betrachteten Vereins als analytische Functionen irgend einer Grösse t so darstellt, dass der Punkt X bei veränderlichem t seine Lage ändert. Es folgt nun aus (14a) weiter, dass für diese Elemente 2. O. $(UX'') = -(U'X') = (U''X), \neq 0$ sein muss; und dann ergiebt sich aus (14b)

durch die Substitution $W = U''$, $Z = X''$ die Gleichung (10). Der betrachtete eindimensionale Verein besteht also aus ∞^1 Elementen 2. O. einer krummen analytischen Curve. Dass die Annahme $r > 1$ unmöglich ist, wird nunmehr evident.

Nehmen wir zweitens an, in dem gesuchten Verein sei entweder der Punkt X oder die Gerade U fest, so folgt aus (14 b), dass beides zugleich eintreten muss. Es ist also auch in diesem Falle $r = 1$. Ebenso sagen die Gleichungen (14 b), dass es Vereine, die blos aus uneigentlichen Elementen beständen, nicht giebt.

Es sind also im ersten Continuum zwei Arten von Vereinen zu unterscheiden, nämlich erstens die krummen Vereine, deren jeder von ∞^1 Elementen 2. O. irgend einer krummen Curve gebildet wird, zweitens ∞^3 Vereine, deren ∞^1 Elemente je zu demselben Linienelement gehören.

Die letzte Art von Vereinen spielt eine besondere Rolle in unserer Untersuchung. Es ist daher erwünscht, ein besonderes Wort für sie zu haben. Wir können sie, wegen ihres später zu erörternden Verhaltens gegenüber Collineationen, *„systatische Vereine“* nennen. Indessen ist ihre wichtigste Eigenschaft, nämlich die, zu demselben Linienelement zu gehören, invariant nicht nur gegenüber Collineationen, sondern gegenüber Berührungstransformationen überhaupt. Wir werden daher einer Bezeichnung den Vorzug geben, die auch noch in weiterem Umfang brauchbar bleibt: Wir nennen sie *triviale Vereine.*

Natürlich kann ein Verein, wie irgend eine andere analytische Mannigfaltigkeit, im Allgemeinen zunächst nur für eine gewisse Umgebung eines seiner Elemente definirt werden. Er ist dann durch analytische Fortsetzung, nach den von Weierstrass und G. Cantor eingeführten Principien, zu einem innerhalb des Elementcontinuums verlaufenden abgeschlossenen Continuum zu ergänzen. Die hinzuzufügenden Elemente können eigentlich oder uneigentlich sein. So gehören zu dem durch ein Linienelement bestimmten trivialen Verein der Punkt und die Gerade dieses Elementes; zu einer als Verein von Elementen 2. O. betrachteten sogenannten punktallgemeinen algebraischen Curve gehören deren Wendepunktstangenten. (Vgl. Nachtrag, S. 402.)

Bei der Ergänzung eines Vereins, oder einer Curve, zu einem abgeschlossenen Continuum werden im Allgemeinen Schwierigkeiten bieten die Stellen, die an der Grenze des Existenzbereiches der Functionen $P_i(t)$ liegen. Es ist dabei besonders darauf zu achten, dass diese

Stellen nicht nothwendig singuläre Stellen der Curve $(UP) = 0$ sein müssen; denn es kann ja der Parameter t betrachtet als Function des Ortes auf der irgendwie anders dargestellten Curve eine natürliche Grenze haben. Die hiernach, wenn auch nicht überall erforderliche, so doch erwünschte Unterscheidung zwischen „singulären (insbesondere wesentlich singulären) Stellen einer Curve“ und „singulären Stellen eines zugehörigen Parameters“ kann ausgeführt werden mit Hülfe eines *natürlichen Parameters*, der sich in jeder regulären Stelle der Curve regulär verhält, und an ausserwesentlich singulären Stellen (solchen, die bei algebraischen Curven auftreten können) nicht anders als das Integral einer algebraischen Function. Dieser Parameter, der dem Bogen einer Curve in der Maassgeometrie verglichen werden kann, ist bestimmt bis auf eine additive Constante und einen Factor, der eine dritte Einheitswurzel ist. Er existirt bei jeder krummen $\{(PP'P'') \neq 0\}$ analytischen Curve *mit alleiniger Ausnahme der Kegelschnitte.* Er ist die einfachste Integralinvariante der in der Anmerkung auf S. 343 erwähnten unendlichen Gruppe.

Schreiben wir zur Abkürzung (lmn) für $(P^{(l)}P^{(m)}P^{(n)})$ oder $\left|\frac{d^lP_1}{dt^l}\frac{d^mP_2}{dt^m}\frac{d^nP_3}{dt^n}\right|$, und setzen wir dann

$$\Psi(t) = 9\cdot(012)^2\cdot\{(015) + 10\cdot(123) + 5\cdot(024)\} -$$
$$- 45\cdot(012)\cdot(013)\cdot\{2(023) + (014)\} + 40\cdot(013)^3,$$

so ist der fragliche Parameter

$$\omega = \int\frac{\sqrt[3]{\Psi(t)}}{(012)}\cdot dt\cdot$$

$\Psi = 0$ ist *die Differentialgleichung der Kegelschnitte* (vgl. § 4), die bisher nur unter sehr viel specielleren Voraussetzungen abgeleitet worden zu sein scheint, $(012) = 0$ oder $(PP'P'') = 0\{(PP'Z) \neq 0\}$ die Differentialgleichung der geraden Linien.

Benutzen wir ω an Stelle von t als unabhängige Veränderliche, und setzen wir dann

$$X = (PP'_\omega P''_\omega)^{-\frac{1}{3}}\cdot P, \quad U = (PP'_\omega P''_\omega)^{-\frac{2}{3}}\cdot \widehat{PP'_\omega},$$

so bestehen die Gleichungen (9) und (10*). Wir haben dann eine Parameterdarstellung der Curve und ihrer Elemente 2. Ordnung vor uns, die bei gegebenem Coordinatensystem völlig bestimmt ist bis auf eine in sie eingehende dritte Einheitswurzel und bis auf die Integrationsconstante im Ausdruck von ω.

Wir behalten uns vor, auf diesen Gegenstand, der hier nur anhangsweise berührt werden konnte, und damit zusammenhängende Fragen, näher einzugehen in einer auf dem Gebrauch homogener Coordinaten beruhenden, und daher die *ganze* Ebene umfassenden Theorie der Differentialinvarianten, die der Verfasser für die allgemeine projective Gruppe und die wichtigsten ihrer Untergruppen schon vor Jahren in den Grundzügen entwickelt, bis jetzt aber aus Mangel an Zeit für den Druck nicht ausgearbeitet hat. —

Wie aus unserer Darstellung hervorgeht, beruht die im Texte entwickelte Modification des Lie'schen Begriffes *Verein* von Elementen 2. O. auf der Art, wie wir die nicht abgeschlossene Mannigfaltigkeit der eigentlichen Elemente 2. O. zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt haben, und sie ist gerechtfertigt durch die *Existenz* dieses Continuums, aus der sie sich mit Nothwendigkeit ergiebt. Wir werden aber weiterhin neben dem erklärten Begriff des Vereins noch einen anderen näher besprechen. (Vgl. die Schlussbemerkung zu § 1.) — Wo mehrere Begriffsbildungen denkbar nicht nur, sondern, jede in ihrem Kreise, offenbar auch zweckmässig sind, da versuchen wir, nach Möglichkeit ihnen *allen* gerecht zu werden, nach dem Princip:

Non esse minuendas entium varietates.

§ 3.

Imprimitivität der Elemente 2. Ordnung.

Die Gruppe g_8 aller Collineationen in der Ebene, mit dem Element 2. Ordnung als Raumelement, ist auf mehrere Arten *imprimitiv*, und sie ist überdies *systatisch*. Die eigentlichen Elemente 2. Ordnung lassen sich invariant anordnen erstens und zweitens zu ∞^2 Schaaren von ∞^2 Elementen, die zu je einer Geraden oder je einem Punkt gehören, drittens zu ∞^3 Schaaren von je ∞^1 Elementen, deren jede mit demselben Element 1. O. verbunden ist. Ein besonderes Interesse haben die Schaaren der letzten Art, die ∞^3 trivialen Vereine (§ 2). Bleibt bei einer Collineation ein eigentliches Element eines solchen Vereins in Ruhe, so bleiben auch alle übrigen einzeln in Ruhe, und es wird auf diese Art eine leicht zu ermittelnde viergliedrige Untergruppe der fünfgliedrigen projectiven Gruppe eines Elementes 1. O. definirt, die aus zwei getrennten continuirlichen Schaaren g_4, h_4 von Collineationen besteht. Diese Gruppe g_4, h_4 ist innerhalb g_8 gleichberechtigt mit der Gruppe affiner Transformationen, die ein Parallelenbüschel in Ruhe lassen, und ausserdem die Flächeninhalte irgend welcher Dreiecke entweder ungeändert lassen (g_4) oder mit dem Factor -1 reproduciren (h_4). g_4 kann, wie die Gruppe der flächentreuen affinen Transformationen und die mit ihr gleichberechtigten Untergruppen von g_8 überhaupt, auch dadurch charakterisirt werden, dass die Bahncurven (oder besser Bahn*vereine* von Linienelementen) ihrer eingliedrigen Untergruppen Kegelschnitte, oder im besonderen Falle Gerade (und Punkte) sind. Zu g_4 gehören u. A. die beiden zweigliedrigen

Gruppen vertauschbarer Collineationen, die durch die Gerade und durch den Punkt des Elementes definirt werden, zu h_4 die zweigliedrigen Schaaren projectiver Spiegelungen, die ihr Centrum auf der Geraden des Elementes haben und ihre Axe durch den Punkt des Elementes schicken.

Man kann jeden beliebigen trivialen, oder, wie bemerkt, wegen der eben besprochenen Eigenschaft hier wohl auch als *systatisch* zu bezeichnenden Verein aus den Coordinaten eines seiner eigentlichen Elementen $(X : U)$ ableiten, wenn man in den Ausdrücken

$$(15) \qquad \sqrt[3]{\sigma}X_1 : \sqrt[3]{\sigma}X_2 : \sqrt[3]{\sigma}X_3 : \sqrt[3]{\tau}U_1 : \sqrt[3]{\tau}U_2 : \sqrt[3]{\tau}U_3$$

die binären Parameter $\sigma : \tau$ variirt. Es bestimmen daher je zwei Elemente eines trivialen Vereins zwei zu einander reciproke Doppelverhältnisse $\frac{\sigma_1 \tau_2}{\tau_1 \sigma_2}$ und $\frac{\tau_1 \sigma_2}{\sigma_1 \tau_2}$, die mit Hülfe von Büscheln doppelt berührender Kegelschnitte als gewöhnliche Doppelverhältnisse gedeutet werden können. (Vgl. § 4.) Besonders bemerkt zu werden verdient der Werth -1 dieser absoluten Invarianten, der „harmonischer Lage" der beiden Elemente im trivialen Verein zum Punkt X und zur Geraden U entspricht:

Mit jedem eigentlichen Element 2. Ordnung ist ein anderes gegenüber Collineationen und Correlationen invariant verbunden, das zu ihm „conjugirte" Element.[1] *Man erhält dessen Coordinaten aus den Coordinaten des gegebenen Elementes durch einen Vorzeichenwechsel der Grössen X_i oder U_i.*

Es ist sehr leicht, dieses Element auch geometrisch zu construieren: Irgend eine involutorische Collineation, deren Axe die Gerade des vorgelegten Elementes ist, oder deren Centrum in den Punkt des Elementes fällt, vertauscht die beiden conjugirten Elemente.

Die uneigentlichen Elemente (Punkte und Gerade) sind natürlich zu sich selbst conjugirt.

Fassen wir die obigen Ausdrücke (15) als die Definition einer Transformation

$$(16) \qquad \overline{X}_i = \sqrt[3]{\sigma} \cdot X_i, \quad \overline{U}_i = \sqrt[3]{\tau} \cdot U_i,$$

indem wir die Geraden X_i, U_i als veränderlich, $\sigma : \tau$ aber als constant betrachten, so erkennen wir:

---

1) Nach Analogie der Ausdrucksweise: „Zwei Punkte sind conjugirt in Bezug auf einen Kegelschnitt".

Die Gruppe g_8 aller Collineationen kann aufgefasst werden als invariante Untergruppe einer durch sie bestimmten continuirlichen Gruppe g_9, deren Raumelemente die Elemente 2. Ordnung sind. Diese Gruppe g_9 kann zerlegt werden in die Gruppe g_8 und eine zweite continuirliche invariante Untergruppe g_1, die mit g_8 vertauschbar ist.

Die eingliedrige Gruppe g_1 lässt jeden einzelnen trivialen Verein von Elementen 2. Ordnung in Ruhe. Sie enthält eine involutorische Transformation, die je zwei conjugirte Elemente 2. Ordnung vertauscht.

Diese für die projective Geometrie der Elemente 2. O. offenbar sehr wichtigen Thatsachen scheinen sich bisherigen Betrachtungen völlig entzogen zu haben; sie sind aber selbstverständlich im Rahmen unserer Theorie.

Natürlich kann man entsprechend auch die Schaar der Correlationen erweitern.

Man kann unmittelbar die Bedingungen dafür aufstellen, dass eine analytische Schaar von ∞^1 eigentlichen Elementen durch eine Transformation von g_1 in einen Verein übergeführt werden kann:

$$(17)\qquad \begin{gathered} (UX') = 0, \quad (U'X) = 0, \\ (XX'X'')(UU'U''') = (XX'X''')(UU'U''). \end{gathered}$$

§ 4.

Die absolute Invariante zweier Elemente 2. Ordnung.

Für unsere weiteren Untersuchungen bedürfen wir einer Reihe specieller Sätze, die wir nunmehr darlegen wollen.

Um zunächst die nach dem Vorhergehenden auf der Hand liegende absolute projective Invariante zweier Elemente zweiter Ordnung geometrisch zu deuten, stellen wir folgende Aufgabe:

Man soll die Bedingung dafür ermitteln, dass ein vorgelegtes eigentliches Element 2. Ordnung mit drei Punkten (oder Geraden) durch einen Kegelschnitt verbunden werden kann.

Man wird diese Aufgabe am einfachsten fassen als Grenzfall von der, die verlangt, die Bedingung für sechs Punkte auf einem Kegelschnitt anzugeben. Die zu benutzende zuerst von Reiss (Math. Ann. Bd. II) in brauchbare Form gebrachte Gleichung

ergiebt sich aus dem Pascal'schen Satz, wenn die sechs Punkte mit 0 ... 5 bezeichnet werden, u. A. in folgender Gestalt:

$$(18)\quad (024)\cdot(501)(123)(345) - (135)\cdot(012)(234)(450) = 0.$$

Lässt man etwa die Punkte 0, 1, 2 zusammenrücken, so entsteht die Gleichung

$$(00'3)(00'4)(00'5)(345) - \tfrac{1}{2}(00'0'')(034)(035)(045) = 0,$$ [1]

oder nach Einführung von Coordinaten eines Elementes 2. O. für die drei consecutiven Punkte (Nr. 8),

$$(U3)(U4)(U5)(345) + \tfrac{1}{2}(X45)(X53)(X34) = 0.$$

Als Grenzfall hiervon ergiebt sich *die Punktgleichung des Kegelschnittes, der ein eigentliches Element 2. Ordnung* $(X:U)$ *mit einem Element 1. Ordnung* (Y, V) *verbindet:*

$$(19)\quad (UY)^2(UZ)(VZ) - \tfrac{1}{2}(VX)(XYZ)^2 = 0,$$

ferner *die Bedingung dafür, dass zwei zu verschiedenen Punkten und Geraden gehörige eigentliche Elemente 2. Ordnung* $(X:U)$, $(Y:V)$ *durch einen Kegelschnitt verbunden werden können:*

$$(20)\quad (UY)^3 - (VX)^3 = 0.$$

Im Grenzfall consecutiver Elemente 2. O. wird diese Bedingung identisch mit der der vereinigten Lage der entsprechenden Elemente *erster* Ordnung. *Kegelschnittlage consecutiver Elemente 2. O. schliesst also nicht nothwendig vereinigte Lage dieser Elemente ein,* was ausdrücklich bemerkt zu werden verdient. Eine Erklärung dieser zunächst wohl etwas paradoxen Erscheinung geben wir weiter unten.

Es seien nun vorgelegt zwei eigentliche Elemente 2. O. $(X:U)$, $(Y:V)$. Wir können dann, bei hinreichend allgemeiner Lage der beiden Elemente, ein jedes mit dem zum anderen gehörigen Linienelement durch einen bestimmten Kegelschnitt verbinden, und wir erhalten auf diese Weise zwei einander doppelt berührende Kegelschnitte, die als Curven 2. Ordnung oder 2. Classe aufgefasst, durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$(19b)\quad \begin{cases}(AZ)^2 = (UY)^2\cdot(UZ)(VZ) - \tfrac{1}{2}(VX)\cdot(XYZ)^2 = 0,\\ (WP)^2 = (VX)^2\cdot(WX)(WY) - \tfrac{1}{2}(UY)\cdot(UVW)^2 = 0,\end{cases}$$

1) Durch Fortsetzung der Differentiation erhält man die auf S. 349 angeführte Differentialgleichung der Kegelschnitte.

$$(19c)\quad \begin{cases}(BZ)^2=(VX)^2\cdot(UZ)(VZ)-\frac{1}{2}(UY)\cdot(XYZ)^2=0,\\ (WQ)^2=(UY)^2\cdot(WX)(WY)-\frac{1}{2}(VX)\cdot(UVW)^2=0.\end{cases}$$

Die absolute Invariante $(VX)^3 : (UY)^3$ zweier eigentlicher Elemente 2. Ordnung kann hiernach, sofern sie nicht in unbestimmter Form 0 : 0 erscheint, als ein Doppelverhältniss von vier Curven 2. Ordnung oder 2. Classe gedeutet werden, die in einem Büschel oder einer Schaar einander doppelt berührender Curven dieser Art liegen.

Es wird nämlich in einer wohl ohne Weiteres verständlichen Bezeichnung

$$\frac{(VX)^3}{(UY)^3}=$$

$$(22)\quad =(A^2,\ B^2,\ U\cdot V,\ \widehat{XY^2})=\frac{(A^2,\ U\cdot V)\cdot(B^2,\ \widehat{XY^2})}{(B^2,\ U\cdot V)\cdot(A^2,\ \widehat{XY^2})}$$

$$=(Q^2,\ P^2,\ X\cdot Y,\ \widehat{UV^2})=\frac{(Q^2,\ X\cdot Y)\cdot(P^2,\ \widehat{UV^2})}{(P^2,\ X\cdot Y)\cdot(Q^2,\ \widehat{UV^2})}.$$

Von der hiermit nachgewiesenen Beziehung lassen sich verschiedene Anwendungen machen, die wir nunmehr darlegen wollen.

Ausgezeichnete Werthe der absoluten Invariante (22) sind zunächst die Werthe 0 und ∞, deren geometrische Deutung auf der Hand liegt, ferner die unter der unbestimmten Form 0 : 0 erscheinenden Werthe, auf die wir weiterhin zurückkommen werden, endlich die Werthe + 1 und — 1. Dem Werthe + 1 entspricht, wie wir bereits gefunden haben, *Kegelschnittlage* der beiden Elemente 2. O. (Nr. 20), dem Werthe — 1 eine Lagenbeziehung, die wir als *verkehrte Kegelschnittlage* bezeichnen können.

Befindet sich von zwei eigentlichen Elementen 2. Ordnung das eine in Kegelschnittlage mit dem Element, das zu dem zweiten conjugirt ist, so befindet sich das zweite in Kegelschnittlage mit dem Element, das zum ersten conjugirt ist.

Die Bedingung für diese Lagenbeziehung ist, wie gesagt

$$(23)\qquad (UY)^3+(VX)^3=0.$$

Wir betrachten nun den Inbegriff der ∞^2 eigentlichen Elemente 2. Ordnung, deren Linienelemente eine krumme analytische Curve umhüllen. Von singulären Stellen abgesehen, gehen die genannten Elemente 2. Ordnung aus denen $(X:U)$, $(Y:V)$, $\cdots$

der Curve selbst hervor durch Transformationen der Gruppe g_1, und sie werden dadurch auf ∞^1 Schaaren $(\sqrt[3]{\sigma}X:\sqrt[3]{\tau}U)$, $(\sqrt[3]{\sigma}Y:\sqrt[3]{\tau}V)$, $\cdots$ vertheilt, von denen wir sagen können, dass sie die Curve *begleiten.* (Vgl. Nr. 17.) Die absolute Invariante von zweien dieser Elemente, die aus beliebigen begleitenden Schaaren $\sigma_1:\tau_1$, $\sigma_2:\tau_2$ entnommen sind, hat den Werth

$$\frac{\sigma_1\tau_2}{\sigma_2\tau_1}\cdot\frac{(VX)^3}{(UY)^3}.$$

Ist die betrachtete Curve insbesondere ein irreducibeler Kegelschnitt, so giebt es singuläre Stellen nicht, man erhält auf dem beschriebenen Wege *alle* eigentlichen Elemente 2. O., deren Linienelement der Curve angehört, und gleichzeitig wird der zweite Factor im letzten Ausdruck gleich der Einheit. Lässt man dann noch das Element $(Y:V)$ längs des Kegelschnittes wandern und schliesslich mit dem Element $(X:U)$ zusammenfallen, so erkennt man:

Die ∞^2 eigentlichen Elemente 2. O., die mit denen eines irreducibelen Kegelschnittes ∞^1 triviale Vereine bilden, sind ausserdem invariant auf ∞^1 Schaaren vertheilt, deren jede aus den ∞^1 Elementen des Kegelschnittes selbst durch eine bestimmte Transformation der Gruppe g_1 entsteht, und also den Kegelschnitt „begleitet".

Der Werth der absoluten Invariante von zweien der ∞^2 Elemente bleibt constant, wenn jedes von ihnen in der begleitenden Schaar variirt, der es angehört, und dieser Werth ist gleich dem Doppelverhältniss, das irgend zwei entsprechend geordnete Elemente der beiden Schaaren bilden, die demselben trivialen Verein angehören.

Insbesondere befinden sich je zwei Elemente 2. O. derselben begleitenden Schaar in Kegelschnittlage. Ferner ist jede Schaar zu einer anderen „conjugirt", d. h. jede enthält alle Elemente 2. O., die zu denen einer anderen begleitenden Schaar conjugirt sind. Zwei aus conjugirten Schaaren entnommene Elemente befinden sich also in verkehrter Kegelschnittlage.

Man kann sehr leicht aus irgend einem der ∞^2 Elemente alle anderen ableiten, die derselben begleitenden Schaar angehören, z. B. dadurch, dass man das Element den involutorischen Collineationen (Spiegelungen) unterwirft, die den Kegelschnitt in Ruhe lassen. Da diese Spiegelungen bekanntlich die ganze Gruppe des Kegelschnitts erzeugen, so ergiebt sich weiter:

Die ∞^3 *Collineationen, die den betrachteten Kegelschnitt in Ruhe lassen, lassen jede einzelne der* ∞^1 *begleitenden Schaaren von Elementen 2. O. in Ruhe.*

Die Kegelschnitte, die Elemente einer begleitenden Schaar verbinden, lassen sich daher sehr einfach deuten:

Besteht die begleitende Schaar nicht aus den Elementen 2. O. des Kegelschnittes selbst, so erscheinen bei der zugehörigen Nicht-Euklidischen Maassbestimmung die ∞^2 *Kegelschnitte, die je zwei getrennte Elemente der Schaar verbinden, als congruente Kreise.*

Man erkennt nun auch ohne besondere Rechnung, was vor sich geht, wenn die beiden Elemente der begleitenden Schaar zusammenfallen: Der verbindende Kegelschnitt artet aus. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass „Kegelschnittlage“ consecutiver Elemente nicht zugleich auch vereinigte Lage dieser Elemente bedeutet. (S. oben S. 353.)

Tritt der im letzten Satze ausgeschlossene Fall ein, so giebt es ebenfalls ∞^2 Kegelschnitte, die gewissermaassen je zwei Elemente der Schaar verbinden. Getrennte Elemente zwar können jetzt nur noch durch den Kegelschnitt selbst verbunden werden. Dafür aber gehen nunmehr durch je zwei consecutive Elemente ∞^1 Kegelschnitte. Es entstehen so die ∞^2 vierpunktig berührenden Kegelschnitte oder die *Grenzkreise* der Nicht-Euklidischen Geometrie, die bekanntlich alle zu einander congruent und invariant auf ∞^1 Büschel (oder Schaaren) vertheilt sind.

Die ∞^1 Schaaren von begleitenden eigentlichen Elementen 2. O. werden zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt, wenn man die Schaar aller Punkte und die Schaar aller Tangenten des Kegelschnittes hinzufügt. (Vgl. S. 348 unten.)

Lässt man den betrachteten Kegelschnitt zerfallen, in zwei verschiedene Gerade, oder in zwei verschiedene Punkte, so ergeben sich noch theilweise entsprechende Sätze; für die ∞^2 Elemente 2. O., deren Gerade allein gegeben ist, findet sich aber nur *eine* invariante Vertheilung auf ∞^1 Schaaren, nämlich die Vertheilung auf triviale Vereine.

Die absolute Invariante zweier Elemente 2. O., die zur selben Geraden, aber nicht zum selben Punkt gehören (oder umgekehrt) ist nicht nur der Form nach, sondern wirklich unbestimmt; d. h., solche Elemente haben *keine* absolute Invariante. Sie haben, wenn man will, Kegelschnittlage und zugleich auch verkehrte Kegelschnittlage.

Wir kommen auf den behandelten Gegenstand noch zurück; hier fügen wir einen weiteren Satz hinzu, der dem obigen an die Seite gestellt werden kann.

Bilden wir aus den Coordinaten von drei eigentlichen Elementen 2. O. $(X:U)$, $(Y:V)$, $(Z:W)$ die Invariante

$$(24)\quad (UVW)(XYZ) = (VZ)(WX)(UY) + (VX)(WY)(UZ),$$

und setzen wir sie gleich Null, so ergiebt sich:

Wenn von drei eigentlichen Elementen 2. O., die ihre Punkte auf derselben Geraden haben, oder ihre Geraden durch denselben Punkt schicken, eines verkehrte Kegelschnittlage hat zu den beiden anderen, so haben auch diese verkehrte Kegelschnittlage.

Ebenso folgt verkehrte Kegelschnittlage für die beiden letzten Elemente, wenn das erste zu ihnen selbst Kegelschnittlage hat.

Es lassen sich also die ∞^3 eigentlichen Elemente 2. O., die ihre Punkte auf einer gegebenen Geraden haben, durch einen invarianten Process auf ∞^1 Schaaren von je ∞^2 Elementen vertheilen. Je zwei Elemente einer solchen Schaar haben verkehrte Kegelschnittlage, und jedes Element hat zu jedem Element einer bestimmten anderen Schaar Kegelschnittlage. Jede Schaar ist durch eines ihrer eigentlichen Elemente vollkommen bestimmt.

Die ∞^1 Schaaren sind also paarweise „conjugirt“: Die conjugirte Schaar einer gegebenen enthält alle zu deren Elementen conjugirten Elemente 2. O.

Die ∞^1 Schaaren werden durch die Transformationen der Gruppe g_1 unter einander vertauscht. Daher ergeben sich, als Grenzlagen, den beiden ausgearteten Transformationen von g_1 entsprechend, zwei besondere Schaaren von Elementen 2. O., deren eine aus allen Geraden der Ebene besteht, während zu der anderen alle eigentlichen Elemente 2. O. gehören, deren Gerade mit der gegebenen zusammenfällt, und alle Punkte, die auf der Geraden liegen. (Vgl. § 1, S. 342, und § 10, S. 379.)

Jede der ∞^1 Schaaren wird zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt, wenn man die vorgelegte Gerade hinzurechnet, und der Inbegriff der ∞^1 Schaaren wird ein abgeschlossenes Continuum, wenn man die beiden ausgearteten Schaaren hinzurechnet.

Wir wollen irgend eine der definirten Schaaren von ∞^2 Elementen 2. O. des ersten Continuums ein *Feld* von Elementen 2. O. nennen. Es giebt danach ∞^3 Felder; zu jeder vorgelegten Geraden der Ebene gehören ihrer ∞^1, die paarweise conjugirt

sind. Das aus allen Geraden der Ebene bestehende *ausgezeichnete Feld*[1]) gehört zu jeder Geraden. Ausserdem giebt es ∞^2 *singuläre* Felder; jedes von diesen gehört zu einer bestimmten Geraden, und umfasst den Inbegriff aller ∞^2 eigentlichen Elemente 2. O., deren Gerade eben die gegebene ist, und aller ∞^1 Punkte, die diese Gerade erfüllen. Das ausgezeichnete Feld und jedes der singulären Felder ist zu sich selbst conjugirt.

Jedes Feld ist ein abgeschlossenes Continuum, und der Inbegriff aller Felder bildet, wie wir später (§ 10) *sehen werden, ebenfalls ein abgeschlossenes Continuum.*

Den zum Begriff des Feldes correlativen Begriff nennen wir *Bündel* von Elementen 2. O.

Die Bündel und Felder verhalten sich, wie wir zeigen werden, zu einander annähernd so, wie die Punkte und Ebenen in der projectiven Geometrie des Raumes. (Genaueres § 10.)

Mit Hülfe der Felder (Bündel) kann man die fünfgliedrige invariante continuirliche Untergruppe der sechsgliedrigen projectiven Gruppe einer Geraden (eines Punktes) definiren. Wir drücken den fraglichen Satz der bequemeren Ausdrucksweise wegen in specieller Form aus:

Bei der Gruppe g_5 der eigentlich-flächentreuen affinen Collineationen (der sogenannten speciellen linearen Gruppe) bleiben alle ∞^1 Felder einzeln in Ruhe, die durch die unendlich ferne Gerade definirt sind; und die Schaar h_5 der uneigentlich-flächentreuen affinen Collineationen vertauscht jedes dieser Felder mit seinem conjugirten. Die zuerst genannte continuirliche Gruppe, und die nur das Quadrat jeder Dreiecksfläche nicht ändernde sogenannte gemischte Gruppe g_5, h_5 sind dadurch definirt, dass ihre Transformationen irgend eines der genannten Felder, oder ein Paar conjugirter Felder in Ruhe lassen.

Wir übergehen den Beweis dieses Satzes, der weiterhin ziemlich selbstverständlich erscheint, übrigens aber von uns nicht benutzt werden wird.

Um sich von der Vertheilung der Elemente 2. O. in einem Feld oder Bündel eine anschauliche Vorstellung zu machen, unterwerfe man ein (reelles) eigentliches Element 2. O., dessen Punkt im Endlichen liegt, allen Schiebungen der Euklidischen

---

1) Die Terminologie ist gewählt mit Rücksicht auf den Inhalt des § 9.

Geometrie. Die so entstehenden Elemente 2. O. schicken ihre Geraden durch denselben unendlich fernen Punkt, und sie definiren ein *Bündel*. In der That braucht man nur die Kegelschnitte zu betrachten, die zwei der construirten ∞^1 parallelen Geraden berühren, um zu erkennen, dass von den gefundenen Elementen 2. O. jedes mit dem conjugirten des anderen durch einen Kegelschnitt verbunden werden kann. Die zur Construction benutzte zweigliedrige Gruppe der Schiebungen ist eine von ∞^1 gleichberechtigten Untergruppen der fünfgliedrigen continuirlichen Gruppe, die zu dem genannten unendlich fernen Punkt gehört. Zugleich ergiebt sich aus dieser Betrachtung, dass die ∞^2 Bündel, deren definirende Punkte auf einer gegebenen Geraden liegen, Systeme der Imprimitivität sind für die sechsgliedrige Gruppe von Collineationen, die diese Gerade in Ruhe lassen.

Der Hilbert'sche Satz von der Endlichkeit der Invariantensysteme lässt sich leicht so erweitern, dass er auch Elemente 2. O. umfasst. Wir verzichten aber auf Erörterung solcher Allgemeinheiten, angesichts des Umstandes, dass schon eine so einfache absolute Invariante wie

$$\frac{(UVW)^3}{(XYZ)^3}$$

eine einfache geometrische Deutung nicht zuzulassen scheint.

§ 5.

Orientirte Elemente 2. Ordnung.
Algebraische Complexe von Elementen 2. Ordnung im ersten Continuum.

Betrachten wir nunmehr irgend eine analytische Schaar von ∞^1, ∞^2 oder ∞^3 eigentlichen, und falls nöthig durch Zufügung von weiteren eigentlichen Elementen 2. O., oder auch von Punkten und Geraden zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzten Elementen 2. O., so erkennen wir, dass diese Mannigfaltigkeiten in jedem der genannten drei Fälle auf zwei grosse Familien vertheilt werden können. Es kann nämlich eintreten, dass man bei geeigneter Wahl der zu verwendenden Parameterdarstellung (vgl. § 2, Schlussbemerkung) von den Coordinaten $(X:U)$ eines eigentlichen Elementes allgemeiner Lage der betrachteten Mannigfaltigkeit durch analytische Fortsetzung zu den beiden anderen Systemen von Coordinaten $(\varepsilon X:U)$, $(\varepsilon^2 X:U)$ $\left\{\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}$ desselben Elementes kommen kann; es

können aber auch die drei Darstellungen desselben Elementes der betrachteten Mannigfaltigkeit stets analytisch getrennt sein. Im zweiten Falle, der als der allgemeinere anzusehen ist, können wir die betrachtete Mannigfaltigkeit *einzählig*, im ersten Falle *dreizählig* nennen.[1])

Verstehen wir unter *Orientirung* eines eigentlichen Elementes 2. O. die Entscheidung für eine der drei möglichen Darstellungen durch Verhältnissgrössen $X_i : U_i$, so wird durch den Orientirungsprocess die Mannigfaltigkeit der Elemente 2. O. mit drei Blättern überdeckt, die in den uneigentlichen Elementen zusammenhängen. Jede einzählige analytische Mannigfaltigkeit von Elementen 2. O. erscheint als Überlagerung von drei analytisch-getrennten Schaaren orientirter Elemente 2. O. Eine dreizählige Mannigfaltigkeit dagegen wird durch den Orientirungsprocess mit drei Blättern überdeckt, die in gewissen uneigentlichen Elementen analytischen Zusammenhang haben.

Bei Mannigfaltigkeiten, die ganz in einer der beiden Verzweigungsmannigfaltigkeiten verlaufen (also bei Mannigfaltigkeiten von Punkten oder Geraden), wird der Orientirungsprocess natürlich gegenstandslos: Diese kann man nach Belieben als einzählig oder als dreizählig betrachten, und man kann sie ebensowohl dem Continuum der orientirten als auch dem Continuum der nicht-orientirten Elemente hinzurechnen.

Betrachtet man als Raumelemente die *orientirten* Elemente 2. O., so wird es nothwendig, die sonst in der Geometrie der Ebene als äquivalent geltenden Collineationen und Correlationen von der Determinante Eins, deren Coefficienten sich um dritte Einheitswurzeln unterscheiden, auseinanderzuhalten. Auf diese Weise wird die Gruppe g_8 der Collineationen zu einer ebenfalls continuirlichen Gruppe γ_8 umgestaltet, die auf jene (3-1) deutig-isomorph bezogen ist, im reellen Gebiete übrigens mit ihr zusammenfällt. Wir nennen die Transformationen dieser Gruppe

1) Man könnte, mit ebenso gutem Rechte, die Bezeichnungen auch gerade umgekehrt wählen. Wir entscheiden uns nach der Analogie des Terminus *Doppelflächen*, worunter man, in der Analysis situs, solche reelle Flächen im Raume versteht, deren beide Seiten continuirlich zusammenhängen, oder die — wenn man will — nur „eine Seite" haben, während die gewöhnlichen dann als zweiseitig zu betrachtenden Flächen, im Gegensatz zu den Doppelflächen, „einfache Flächen" genannt werden.

γ_8 *orientirte Collineationen.* Analog gehen aus den Gruppen g_9, g_1 (S. 352) Gruppen γ_9, γ_1 „orientirter" Transformationen hervor.

Neben das genannte Classificationsprincip stellt sich als zweites natürlich eine Eintheilung der analytischen Mannigfaltigkeiten in algebraische und transcendente, wobei man den Begriff der algebraischen Mannigfaltigkeit, wie üblich, so fassen wird, dass er auch eine Gesammtheit von mehreren analytisch-getrennten Mannigfaltigkeiten umspannt. („*Reducibele*" algebraische Mannigfaltigkeiten.) Wir betrachten insbesondere *algebraische Complexe*, algebraische Systeme von ∞^3 Elementen 2. O. des ersten Continuums. Von ihnen gilt der Satz:

In dem durch die Mannigfaltigkeiten der ∞^2 Geraden und ∞^2 Punkte ergänzten Continuum der eigentlichen orientirten oder nicht-orientirten Elemente 2. O. kann jeder algebraische Complex durch eine einzige zu der Gleichung $(UX) = 0$ hinzutretende algebraische homogene Gleichung zwischen den Coordinaten $X_1 : X_2 : X_3 : U_1 : U_2 : U_3$ rein (und natürlich auch vollständig) dargestellt werden.[1])

Hieraus, und aus der Theorie der ersten GORDAN'schen Reihenentwickelung[2]), ergiebt sich eine analytische Darstellung irgend eines algebraischen Complexes von Elementen 2. O., die wir als *Normalform* von dessen Gleichung bezeichnen.

Wir verstehen unter $(AX)^m(UP)^n$ irgend eine ternäre sogenannte Normalform, eine Form also, deren Covariante $(AP)(AX)^{m-1}(UP)^{n-1}$ identisch verschwindet. Wir erhalten dann *jeden* der betrachteten Complexe dargestellt durch die Verbindung der Gleichung $(UX) = 0$ mit einer Gleichung der Form

$$(25)\quad \Phi = \sum \Phi_k = \sum\nolimits^k (A_k X)^{m_k}(UP_k)^{n_k} = 0, \quad (m_k + n_k = l = \text{const.})$$

Die Summe Φ ist bis auf einen allen Formen Φ_k gemeinsamen Proportionalitätsfactor völlig bestimmt, wenn der Complex dreizählig ist; es gehören drei verschiedene Functionen Φ zum selben Complex, wenn dieser einzählig ist; endlich kann jeder algebraische Complex orientirter Elemente 2. O. nur auf *eine* Art durch eine Gleichung der Form (25) dargestellt werden, abgesehen von einem willkürlich bleibenden Factor.

---

1) S. F. KLEIN, Math. Ann. Bd. 22, S. 231.
2) S. des Verfassers „Methoden" (Leipzig 1889) II, § 3.

Ist der Complex $\Phi = 0$ *reducibel*, d. h. besteht er aus mehreren analytisch getrennten dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten von Elementen 2. O., so braucht nicht etwa die homogene Function Φ als Product von anderen ganzen homogenen Functionen Ψ, Ψ' darstellbar zu sein. Es ist vielmehr zur Reducibilität nur erforderlich das Bestehen einer *Congruenz*:

$$\Phi \equiv \Psi \cdot \Psi' \operatorname{mod.} (UX).$$

Unterwirft man den Complex $\Sigma\Phi_k = 0$ einer Collineation, so erhält man einen Complex $\Sigma\Phi_k' = 0$, der ohne Weiteres wieder durch eine Normalform seiner Gleichung dargestellt ist, da jedes einzelne Glied der Summe $\Sigma\Phi_k$ in das entsprechende Glied der Summe $\Sigma\Phi_k'$ übergeht. Hieraus ergiebt sich eine weitere gegenüber Collineationen invariante Classification, da in dem Ausdruck $\Sigma\Phi_k$ ja nicht jede mögliche Zerlegung der ganzen Zahl l in zwei andere ganze Zahlen m_k, n_k durch ein nicht identisch-verschwindendes Glied vertreten zu sein braucht. Lässt man irgend welche der möglichen Zerlegungen zu, unter Ausschluss der übrigen, so wird dadurch eine *Gattung* algebraischer Complexe definirt.

Die linke Seite der Gleichung des einzelnen Complexes einer vorgelegten Gattung hängt *linear und homogen* von

$$\sum \tfrac{1}{2}(m_k + 1)(n_k + 1)(m_k + n_k + 2)$$

Constanten ab, wobei die Summe sich auf alle zugelassenen Zerlegungen einer gegebenen Zahl l erstreckt; insbesondere, wenn alle $l+1$ möglichen Zerlegungen gleichzeitig zugelassen werden, von

$$\tfrac{1}{12}(l + 1)(l + 2)^2(l + 3)$$

Constanten. Die Zahl l kann in allen Fällen als *Grad* des Complexes bezeichnet werden.

Schliesst man die trivialen Fälle aus, in denen die Gleichung (25) nur eines der $l + 1$ möglichen Glieder Φ_k wirklich enthält, so kann diese Gleichung aufgefasst werden als eine (im engeren Sinne sogenannte) *algebraische Differentialgleichung 2. Ordnung*. Das Integrationsproblem besteht dann in der Forderung, die Elemente des Complexes zu Vereinen anzuordnen. Umgekehrt kann jede solche Gleichung auf eine Art, oder auf drei Arten, in die Form (25) gesetzt werden, mit Ausnahme natürlich der Differentialgleichung ($y'' = 0$) der Geraden (und der Differentialgleichung der Punkte, wenn man — nach der Anschauungsweise von S. Lie — von einer solchen reden will). Unsere

Classification der Complexe von Elementen 2. O., und deren Zusammenfassung zu linearen Mannigfaltigkeiten, enthält also eine entsprechende *projectiv-invariante Classification und Zusammenfassung der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen 2. Ordnung.*

Wir kommen weiterhin auf diesen Gegenstand zurück (§ 9). Wir werden auch zeigen, wie man eine vorgelegte Differentialgleichung $f(x, y, y', y'') = 0$ in die Normalform (25) setzen kann (§ 14).

Ein weiteres gleichfalls projectiv-invariantes Eintheilungsmerkmal kann übrigens aus dem Verhalten einer solchen Gleichung gegenüber periodischen Transformationen der Gruppe g_1 (γ_1) überhaupt geschöpft werden, wie wohl kaum näher ausgeführt zu werden braucht. Dazu treten noch Classificationen, die auf dem Verhalten der Gleichung gegenüber *continuirlichen* Untergruppen von g_9 (γ_9) beruhen.

§ 6.

Abbildung der eigentlichen Elemente 2. Ordnung auf Punkte gewisser rationaler Mannigfaltigkeiten M_4.

Wir stellen jetzt die Aufgabe:

„Es sollen alle vierfach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten M_4 *gefunden werden, denen folgende Eigenschaften zukommen:*

1) *Die projectiven Coordinaten* $x_1 \cdots x_N$ *eines Punktes allgemeiner Lage von* M_4 *sollen rationale und (wie man dann ohne Beschränkung annehmen darf) ganze homogene Functionen der Coordinaten* $X_i : U_i$ *eines eigentlichen orientirten Elementes 2. Ordnung sein.*

2) *Durch die hiermit gegebene Abbildung soll die Gruppe* γ_8 *der orientirten Collineationen in eine gleichzusammengesetzte projective Gruppe übergeführt werden.“*

Die Lösung ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung des vorigen §. Ein ebenes Gebiet $u_1 \cdots u_N$ $(N-1)^{\text{ter}}$ Stufe wird aus der zu suchenden Mannigfaltigkeit M_4 eine M_3 ausschneiden, deren Bild in der Ebene ein Complex l. Grades von Elementen 2. O. ist. Dieser Complex kann durch eine einzige Gleichung rein dargestellt werden, und es darf angenommen werden, dass alle diese Complexe keinen gemeinsamen Bestandtheil haben, der selbst ein Complex wäre. Die Gleichung des ausgeschnittenen Complexes kann auf eine einzige Weise in die Normalform $\Sigma\Phi_k = 0$ gesetzt werden. Dabei befinden sich unter den Gliedern der Reihe $\Sigma\Phi_k$ mindestens zwei nicht identisch verschwindende, da den orientirten Elementen $(X : U)$ die Punkte

einer Mannigfaltigkeit von vier und nicht weniger Dimensionen entsprechen sollen. Da zwischen den Coefficienten einer oder mehrerer nicht identisch verschwindender ternärer Normalformen mit verschiedenen Ordnungszahlen eine invariante lineare Gleichung oder ein System solcher Gleichungen bekanntlich nicht bestehen kann, so folgt, dass jedes nicht identisch verschwindende Glied Φ_k die allgemeine ternäre Normalform mit den Ordnungszahlen m_k, n_k $(m_k + n_k = l)$ ist.

Man erhält also alle Mannigfaltigkeiten M_4 *auf folgende Weise:*

Man nimmt zunächst den Grad des ausgeschnittenen Complexes, also eine positive ganze Zahl l $(\geqq 1)$ nach Belieben an. Hierauf stellt man von den ganzzahligen Zerlegungen $l = m_k + n_k$ zwei oder mehrere nach Belieben zusammen, wodurch eine Gattung von Complexen bezeichnet wird. Hierauf deutet man die den zugelassenen Zerlegungen entsprechenden Producte m_k^{ten} Grades der Grössen X_i und n_k^{ten} Grades der Grössen U_i als überzählige homogene Punktcoordinaten in einem Gebiete der Stufe

$$N = \sum \tfrac{1}{2}(m_k + 1)(n_k + 1)(m_k + n_k + 2):$$

Damit ist jedem orientirten eigentlichen Element 2. O. der Ebene ein Punkt einer rationalen Mannigfaltigkeit M_4 im Gebiete N^{ter} Stufe zugeordnet, und diese Mannigfaltigkeit M_4 ist eine beliebige unter denen, die die verlangten Eigenschaften 1), 2) haben.

Die Umkehrung der gefundenen Abbildung der orientirten Elemente 2. O. auf die Punkte von M_4 ist nicht nothwendig eindeutig. Dies wird vielmehr nur dann, aber auch immer dann eintreten, wenn die vorkommenden Differenzen $m_k - m_{k'}$ (oder $n_k - n_{k'}$) theilerfremd sind. Haben alle diese Differenzen den gemeinsamen Theiler 3, ohne ein Vielfaches von 3 als gemeinsamen Theiler zuzulassen, so erhält man eine M_4, deren Punkte allgemeiner Lage eindeutig umkehrbar zugeordnet sind den *nicht*-orientirten eigentlichen Elementen 2. Ordnung.

Aus der unbegrenzten Zahl von Mannigfaltigkeiten M_4 heben wir aus einem Grunde, der weiterhin deutlich werden wird, die folgenden hervor, die alle *zweigliedrigen* Ausdrücken $\Sigma\Phi_k$ entsprechen:

I. *Abbildungen orientirter Elemente 2. O.*

A.	$l = 1$;	$1 = 1 + 0$,	$1 = 0 + 1$.	$N = 6$.
B_1.	$l = 2$;	$2 = 2 + 0$,	$2 = 1 + 1$.	$N = 14$.
B_2.	$l = 2$;	$2 = 1 + 1$,	$2 = 0 + 2$.	$N = 14$.
C.	$l = 3$;	$3 = 2 + 1$,	$3 = 1 + 2$.	$N = 30$.

II. *Abbildungen nicht-orientirter Elemente 2. O.*

A.	$l = 3$;	$3 = 3 + 0$,	$3 = 0 + 3$.	$N = 20$.
B_1.	$l = 4$;	$4 = 4 + 0$,	$4 = 1 + 3$.	$N = 39$.
B_2.	$l = 4$;	$4 = 3 + 1$,	$4 = 0 + 4$.	$N = 39$.
C.	$l = 5$;	$5 = 4 + 1$,	$5 = 1 + 4$.	$N = 70$.

Durch die gefundenen Abbildungen orientirter und nicht-orientirter Elemente 2. O. werden die Gruppen $\gamma_9, \gamma_8, \gamma_1$ (S. 361) — g_9, g_8, g_1 — isomorph, und zwar in der Regel mehrstufig-isomorph (endlich-deutig-isomorph), im Falle gegenseitig eindeutiger Abbildung der eigentlichen Elemente aber durchaus ein-eindeutig auf gewisse projective Gruppen Γ_9, Γ_8, Γ_1 — G_9, G_8, G_1 — des Gebietes N^{ter} Stufe bezogen. Uebrigens gestatten gewisse der Mannigfaltigkeiten M_4 noch umfassendere projective Gruppen, die unschwer zu bestimmen sind, hier aber nicht betrachtet zu werden brauchen.

§ 7.

Natürliche Continua von Elementen 2. Ordnung.

Heben wir aus den im vorigen §. gefundenen Mannigfaltigkeiten M_4 z. B. die heraus, deren Punkte allgemeiner Lage den eigentlichen *nicht* orientirten Elementen 2. O. *eindeutig*-umkehrbar entsprechen, so folgt, dass diese M_4 auch auf einander im Allgemeinen-eindeutig abgebildet sind. Es ergiebt sich aber weiter, dass die Eindeutigkeit dieser Bezeichnung sich nicht auf alle Punkte der mit einander verglichenen M_4 erstreckt. Vielmehr erkennt man, dass diese M_4 auf *vier* verschiedene Familien vertheilt werden können, derart, dass zwei Angehörige derselben Familie in ihrer *ganzen* Erstreckung eindeutig und stetig auf einander bezogen sind, niemals aber zwei aus verschiedenen Familien entnommene M_4.

Ordnen wir den Ausdruck $\Sigma\Phi_k$ nach fallenden Werthen von m_k, und schreiben wir ihn dann abgekürzt so:

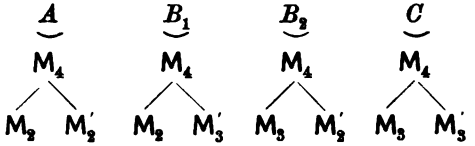
$$(26)\qquad (A_1X)^{m_1}(UP_1)^{n_1}+\cdots\cdots\cdots+(A_fX)^{m_f}(UP_f)^{n_f}$$

$$(l=m_1+n_1=\ldots=m_f+n_f,\ m_1\neq m_f,\ m_i-m_j\equiv 0 \bmod 3,\ \not\equiv 0 \bmod 3\mu),$$

so sind diese Familien wie folgt zu unterscheiden:

$A.$	$n_1=0,$	$m_f=0,$	$(l\equiv 0 \bmod. 3)$
$B_1.$	$n_1=0,$	$m_f>0,$	
$B_2.$	$n_1>0,$	$m_f=0,$	
$C.$	$n_1>0,$	$m_f>0.$	

Die Mannigfaltigkeiten M_4 der ersten Familie A allein werden durch die Parameter $(X_i:U_i)$ erschöpfend dargestellt; jede dieser Mannigfaltigkeiten ist eindeutig-umkehrbar bezogen auf das durch die Punkte und Geraden ergänzte Continuum der nicht-orientirten eigentlichen Elemente 2. O. (§ 1). In allen anderen Fällen treten specielle Elemente auf, die sich der Parameterdarstellung entziehen; und zwar bilden diese speciellen Elemente dreifach-ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die ihrerseits stetig abgebildet sind auf das Continuum aller Linienelemente in der Ebene. Die Structur der betrachteten Mannigfaltigkeiten M_4 kann kurz bezeichnet werden durch je eines der Schemata



Bei Collineationen werden jedesmal die Punkte allgemeiner Lage von M_4, d. h. solcher Punkte, die keiner der kleineren invarianten Mannigfaltigkeiten angehören, transitiv unter einander vertauscht, und ebenso unter einander die Punkte der letzten Mannigfaltigkeiten (die zweifach oder dreifach ausgedehnte sogenannte Normal-Mannigfaltigkeiten sind). Diese selbst werden in den Fällen A und C bei Correlationen mit einander vertauscht, während die Familien B_1 und B_2 im Ganzen mit einander vertauscht werden.

Die Processe, deren wir uns bei diesen Entwickelungen bedient haben, sind durchweg *invarianter* Natur. Wir erkennen also, dass man das nicht-abgeschlossene Continuum der eigent-

lichen Elemente 2. O. auf mehrere, und zwar auf *vier* Arten so erweitern kann, dass das erweiterte Continuum abgeschlossen wird und gleichzeitig auf einen Punktraum M_4 mit projectiver Gruppe G_8 (oder G_9) durchweg-rational abgebildet werden kann. Wir wollen dies so ausdrücken:

Die nicht-abgeschlossene Mannigfaltigkeit der ∞^4 verschiedenen eigentlichen Elemente 2. Ordnung eines ternären Gebietes lässt sich auf vier Arten durch „uneigentliche Elemente 2. O." zu einem abgeschlossenen und zugleich (in Bezug auf die Gruppe g_8) „natürlichen" Continuum ergänzen.

Von diesen Ergänzungen hat grösseres Interesse die von uns schon betrachtete erste, als die einfachste, und die letzte, als die Art der Ergänzung, die in vollkommenster Weise den Anschauungen gerecht wird, die mit Rücksicht auf die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen entwickelt worden sind.[1]) Man erkennt ohne Mühe, welche Bedeutung die Mannigfaltigkeiten M_3, M_3' für die ebene projective Geometrie selbst haben. Die Punkte der Mannigfaltigkeit M_3' entsprechen je einem System analytischer Curven, die mit einer Geraden U dreipunktige Berührung haben; dabei werden die ∞^1 Berührungsstellen X auf der Geraden U, oder die zugehörigen Systeme von Curven, oder endlich die zur selben Geraden gehörigen ∞^1 „uneigentlichen" Elemente 2. O. nunmehr unterschieden. Die correlative Bedeutung hat M_3. Um eine vollständige analytische Darstellung z. B. für das letzte C der genannten natürlichen Continua zu erhalten, kann man u. A. als (überzählige) Parameter statt der Grössen X_i, U_k alle Producte dieser Grössen benutzen, die homogen sind in der durch die beiden folgenden Schemata angezeigten Weise:

$$\overset{(4)}{X}, \overset{(1)}{U}; \quad \overset{(1)}{X}, \overset{(4)}{U}.$$

Die unschwer anzugebenden Relationen zwischen diesen $2 \cdot 3 \cdot 15$ Grössen werden dann nicht nur dadurch identisch befriedigt, dass man sie alle Producten von Grössen X_i, U_k gleichsetzt, zwischen denen die Gleichung $(UX) = 0$ stattfindet, sondern ausserdem auch noch dadurch, dass man das eine System von 45 Grössen solchen Producten gleich, alle Grössen des anderen aber gleich Null setzt: diese beiden besonderen Grössensysteme

1) Vgl. Fr. Engel a. a. O.

sind die Coordinaten oder Parameter der beiden Schaaren von je ∞^3 „uneigentlichen“ Elementen 2. O., die, im Falle C, den Punkten der beiden Mannigfaltigkeiten M_3, M_3' zugeordnet sind.

Das über Continua von nicht-orientirten Elementen 2. Ordnung und deren Abbildung auf Punktmannigfaltigkeiten M_4 Gesagte lässt sich fast unverändert auf orientirte Elemente übertragen. Natürlich fallen dann die Congruenzen $m_i - m_j \equiv 0$ mod. 3 weg. Es ergeben sich wieder vier verschiedene Continua, die mit A, B_1, B_2, C bezeichnet werden. Die in jedem Continuum auftretenden uneigentlichen Elemente unterscheiden sich nicht von denen, die in den Continuis nicht-orientirter Elemente vorkommen. Sie fungiren bei Vergleichung beider Arten von Continuis als Verzweigungsstellen.

Die einfachsten, nämlich zu möglichst kleinen Werthen der Zahl N gehörigen Mannigfaltigkeiten M_4, auf die die verschiedenen Continua orientirter und nicht-orientirter Elemente abgebildet werden können, haben wir bereits im vorigen § unter I und II zusammengestellt.

§ 8.

Complexe und Vereine von Elementen 2. Ordnung im vierten Continuum (C).

Die eingeführten überzähligen Coordinaten eines Elementes eines der Continua A, B_1, B_2, C enthalten ein möglichst geringes Maass von Willkür; abgesehen vom Falle A aber sind sie zu verwickelt, als dass ihre Brauchbarkeit sich viel über Erwägungen ganz allgemeiner Art hinaus erstrecken könnte. Es ist daher von Bedeutung, dass man, wenn auch mit höherem Maasse von Willkür, viel einfachere Parameterdarstellungen der Elementcontinua und ihrer Bilder M_4 angeben kann. Man erhält sie, wenn man in den Ausdrücken (15) nicht nur, wie zuvor, die Grössen σ, τ, oder die Grössen X_i, U_i, sondern alle diese Grössen zugleich als veränderlich betrachtet. So wird das Continuum C *nicht-orientirter* Elemente erschöpfend dargestellt durch 8 Coordinaten

$$(27) \qquad \sigma,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \tau,\ U_1,\ U_2,\ U_3,$$

zwischen denen die Gleichung $(UX) = 0$ besteht.[1])

---

1) Eine andere Herleitung dieser Elementcoordinaten wird Fr. Engel demnächst veröffentlichen. Sie bilden den Ausgangspunkt für die werthvollen weitergehenden Untersuchungen, deren wir in der Einleitung gedacht haben.

Auszuschliessen ist gleichzeitiges Verschwinden der Grössen X_i, der Grössen U_i, endlich der Grössen σ, τ.

Dasselbe Element des Continuums C stellt alle die Werthsysteme der Coordinaten (27) dar, die aus einem unter ihnen hervorgehen erstens durch Multiplication der X_i: U_i mit demselben Factor ϱ, zweitens durch Multiplication der Grössen σ, X_1, X_2, X_3 mit Factoren der Form ϱ_1^{-3}, ϱ_1, ϱ_1, ϱ_1, drittens durch Multiplication der Grössen τ, U_1, U_2, U_3 mit Factoren der Form ϱ_2^{-3}, ϱ_2, ϱ_2, ϱ_2.

Will man ebenso das Continuum C *orientirter* Elemente behandeln, so treten an Stelle der Coordinaten σ, τ die dritten Wurzeln aus diesen Grössen. Es dürfte zweckmässig sein, für diese dritten Wurzeln besondere Zeichen zu gebrauchen. Wir setzen $\sqrt[3]{\sigma} = \Xi$, $\sqrt[3]{\tau} = \Omega$, bedienen uns also des folgenden durch die Gleichung $(UX) = 0$ verbundenen Systems von Coordinaten:

$$(27^*) \qquad \Xi,\ X_1,\ X_2,\ X_3;\quad \Omega,\ U_1,\ U_2,\ U_3.$$

Ein und dasselbe orientirte Element stellen solche Coordinatenwerthe dar, die durch Multiplication von Ξ, X_1, X_2, X_3 mit Factoren $\varrho_1^{-1}, \varrho_1, \varrho_1, \varrho_1$ hervorgehen, u. s. w.

Der Begriff des Complexes, insbesondere des algebraischen Complexes, erfährt natürlich bei dem Uebergang vom Continuum A zum Continuum C eine entsprechende Aenderung. Jeder Complex ist von seinen eigentlichen Elementen aus in die Mannigfaltigkeiten M_3, M_3' hinein fortzusetzen. Diese selbst kommen neu hinzu. Es kommen also neu hinzu die beiden *ausgezeichneten* irreducibelen Complexe $\Xi = 0$ und $\Omega = 0$ von je ∞^3 Elementen 2. Ordnung, die mit dem ausgezeichneten Feld und dem ausgezeichneten Bündel (§ 4) verbunden sind. In dem Continuum C der orientirten oder nicht-orientirten Elemente 2. O. kann dann natürlich ein nicht speciell gewählter algebraischer Complex auch nicht mehr durch eine einzige Gleichung der Form $\Phi(X:U) = 0$ rein dargestellt werden, und keiner kann durch eine solche Gleichung vollständig dargestellt werden. Dies ändert sich aber offenbar, wenn man die Coordinaten (27*) oder (27) benutzt:

Im Continuum C z. B. der orientirten Elemente lässt sich jeder algebraische Complex durch eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten (27*) *rein und vollständig darstellen.*

Abgesehen von den beiden ausgezeichneten Complexen $\Xi = 0$ und $\Omega = 0$, und von den diese umfassenden reducibelen Com-

plexen, kann *jeder* algebraische Complex dargestellt werden durch einen gleich Null gesetzten Ausdruck der Form $\overline{\Phi} =$

$$\begin{aligned} &\Xi^{m_1 - m_f} \cdot (A_1 X)^{m_1} (UP_1)^{n_1} + \Xi^{m_1 - m_f - 1} \cdot \Omega \cdot (A_2 X)^{m_1 - 1} (UP_1)^{n_1 + 1} \\ (26^*) \quad &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\ &+ \Xi \cdot \Omega^{n_f - n_1 - 1} \cdot (A_{f-1} X)^{m_f + 1} (UP_{f-1})^{n_f - 1} + \Omega^{n_f - n_1} \cdot (A_f X)^{m_f} (UP_f)^{n_f}, \end{aligned}$$

wobei natürlich die mittleren Glieder theilweise oder sämmtlich fehlen können (Vgl. § 7.) Die Coefficienten der Producte von Ξ und Ω sind sämmtlich ternäre Normalformen. Der Complex $\overline{\Phi} = 0$ (Nr. 26*) ist *reducibel* oder *irreducibel*, je nachdem der entsprechende Complex des Continuums A die eine oder andere Eigenschaft hat (§ 7).

Erwähnt sei noch, dass man bei Gebrauch der Coordinaten (27*) die Beschränkung auf lineare Transformationen von der Determinante Eins fallen lassen kann.

Wir entwickeln nun den *Begriff des Vereins von Elementen 2. Ordnung im vierten natürlichen Continuum C.* Dabei ist es ziemlich gleichgültig, ob wir von orientirten oder nicht-orientirten Elementen reden, da man sich bei einer solchen Untersuchung auf Betrachtung consecutiver Elemente beschränken muss, über Einzähligkeit oder Dreizähligkeit eines Vereins aber erst durch Betrachtung des ganzen Vereins entschieden werden kann. Wir beziehen uns indessen auf orientirte Elemente, die bei anders gearteten Ueberlegungen einen tieferen Einblick gewähren, auch hier, benutzen also die Elementcoordinaten (27*).

So lange es sich um consecutive *eigentliche* Elemente handelt, ist der Begriff der vereinigten Lage natürlich genau so zu fassen, wie in § 2. Beim Uebergang zu uneigentlichen, oder wie wir nunmehr lieber sagen wollen, *ausgezeichneten* Elementen der Typen

(M_3') $\quad (0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \Omega,\ U_1,\ U_2,\ U_3)$

(M_3) $\quad (\Xi,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ 0,\ U_1,\ U_2,\ U_3)$

erfährt dieser Begriff aber, bei Anwendung übrigens des gleichen Verfahrens wie in § 2, eine sehr wesentliche Aenderung.

An Stelle der Gleichungen (14) treten die Gleichungen

(14a*) $\quad (UX') = 0, \quad (U'X) = 0,$

(14b*) $\quad \Xi^3 \cdot (XX'Z)(WX) - \Omega^3 \cdot (UU'W)(UZ) = 0,$

und diese haben wir jetzt allgemein als *Definition der vereinigten Lage consecutiver Elemente 2. O. im Continuum C* hinzustellen.

Es folgt, dass man innerhalb dieses vierfach ausgedehnten Continuums von jedem Element in ∞^1 Richtungen (die ein zweigliedriges System Pfaff'schen Gleichungen definiren, vgl. Engel a. a. O.) zu vereinigten Elementen weitergehen kann. Insbesondere kann man von einem der ausgezeichneten Elemente $\Xi = 0$ zu mit ihm vereinigten (nur) in der Weise weitergehen, dass man die Gerade U_1 des Nachbarelementes mit U selbst zusammenfallen lässt und dessen Punkt X_1 auf U verlegt.

Als ein *Verein* orientirter Elemente im Continuum C ist zu erklären eine analytische Schaar von ∞^r dieser Elemente, deren jedes mit allen benachbarten Elementen der Schaar vereinigt ist. Unmittelbar folgt:

Im Continuum C der orientirten (oder nicht-orientirten) Elemente 2. Ordnung giebt es folgende Arten von Vereinen, die sämmtlich von je ∞^1 Elementen gebildet werden:

1. *Die Vereine, die aus Elementen je einer krummen Curve bestehen (krumme Vereine).*

2. *Die ∞^3 Vereine aller Elemente, die je zu demselben Linienelement gehören (triviale Vereine).*

3. *∞^2 Vereine ausgezeichneter Elemente mit fester Geraden (gerade Vereine) und*

4. *∞^2 Vereine ausgezeichneter Elemente mit festem Punkt (Punktvereine).* —

Es gehört also (abweichend von den im ersten, zweiten oder dritten Continuum bestehenden Verhältnissen) zu *jedem* Verein von Elementen 1. O. ein Verein von Elementen 2. O., ausserdem aber giebt es noch die ∞^3 trivialen Vereine. Jeder Verein von Elementen 2. O. des Continuums C, mit Ausnahme der trivialen, entsteht, wie wir sagen können, aus einem Verein von Elementen 1. O. durch *Erweiterung*. (Vgl. Nachtrag, S. 402.)

§ 9.

Begriff und Begriff der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung im vierten Continuum (C).

Wir haben bereits erwähnt, dass eine mindestens zweigliedrige algebraische Gleichung $\Phi(X:U) = 0$ zwischen den durch die Gleichung $(UX) = 0$ verbundenen Elementcoordinaten X_i, U_i

als eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung aufgefasst werden kann. Betrachtet man continuirliche Schaaren solcher Gleichungen $\Phi = 0$, so wird man es nicht verhindern können, dass darin unter Umständen auch nur eingliedrige Gleichungen auftreten, solche, die bei gewöhnlicher Auffassung Gleichungen zwischen x, y, y' allein, also Differentialgleichungen *erster* Ordnung oder gar nur krummen Curven, Geraden oder Punkten entsprechen. Es ergiebt sich daher die Möglichkeit einer Weiterbildung des Begriffs einer Differentialgleichung 2. O., die allerdings nicht im gleichen Grade als eine Nothwendigkeit angesehen werden kann, wie die von S. Lie ausgeführte Erweiterung des Begriffs einer Differentialgleichung 1. O. (da sie nicht wie diese für die Theorie der Berührungstransformationen völlig unentbehrlich ist), die aber immerhin den Vorzug der Consequenz haben dürfte. Wir betrachten nur *algebraische* Gleichungen, da bei diesen schon das, worum es sich handeln wird, klar hervortritt, und weil durch solche Beschränkung Verwickelungen erspart werden, die in der sonst nöthigen Erörterung von Grenzstellen ihre Quelle haben.

Wir definiren allgemein:

„Eine algebraische Differentialgleichung 2. Ordnung vollständig integriren" heisst: Aus einem algebraischen Complex (§ 8) *von Elementen 2. O. des vierten Continuums C auf alle möglichen Arten Vereine herausgreifen.*

Jeden solchen Verein nennen wir einen *Integralverein* des Complexes, oder auch eine *„Lösung der Gleichung"*; und wenn der Verein krumm ist (§ 8), brauchen wir dieses Wort, wie üblich, auch für die zugehörige Curve, die dann auch *Integralcurve* heisst. Ein Missverständniss kann hierdurch nicht wohl hervorgerufen werden, da beide Gebilde einander ein-eindeutig oder ein-dreideutig bestimmen.

Es genügt hier, den betrachteten Complex als *irreducibel* anzunehmen; schliesst man dann die besonders zu besprechenden Complexe $\Xi = 0$ und $\Omega = 0$ aus, so wird der Complex dargestellt durch eine Gleichung $\overline{\Phi} = 0$ der Form (26*), die aus einer Gleichung $\Phi(\Xi X : \Omega U) = 0$ der Form (26) durch Unterdrückung der vor den Ausdruck Φ tretenden Factoren Ξ, Ω hervorgegangen ist.

Die Lösungen, und auch die zugehörigen Gleichungen und Complexe selbst, können nun nach verschiedenen Gesichtspunkten

eingetheilt werden, und zwar in unserem Zusammenhange nach solchen, die zum Theil abweichen von sonst üblichen.

Wir nennen zunächst eine Lösung *regulär*, wenn ein ihr angehöriges Element 2. O. allgemeiner Lage nur in dieser einen Lösung enthalten ist, *singulär* im entgegengesetzten Falle. Eine singuläre Lösung kann als „*Enveloppe*" von (wenigstens) einer Schaar anderer Lösungen bezeichnet werden. Ist sie Grenzlage einer einen willkürlichen Parameter enthaltenden regulären Lösung, so kann man, wenn man will, sie, bei erweitertem Sinne des Wortes, zugleich auch zu den „regulären" Lösungen rechnen. Reguläre Lösungen sind immer, singuläre nicht nothwendig vorhanden.

Wir nennen ferner eine Lösung *trivial*, wenn sie von einem trivialen Verein gebildet wird. Die Ermittelung der trivialen Lösungen irgend einer Gleichung $\overline{\Phi} = 0$, falls es solche giebt, erfordert nur algebraische Operationen, da die Forderung sich mit der deckt, dass aus der Gleichung $\Phi(\Xi X : \Omega U) = 0$ die Parameter Ξ, Ω ganz herausfallen. Tritt dies für alle Werthe der Grössen X_i, U_i $\{(UX) = 0\}$ ein, so nennen wir die Gleichung selbst *trivial*.

Eine *triviale Gleichung* $\Phi(X, U) = 0$ hat in der Reihenentwickelung $\Sigma \Phi_k$ ihrer linken Seite nur ein einziges Glied. Sie kann von dreierlei Beschaffenheit sein. Sie kann entweder X und U wirklich enthalten, oder nur X, oder nur U. Im ersten Falle definirt die Gleichung ∞^2 Linienelemente, und damit ∞^2 *reguläre* Lösungen, die triviale Vereine sind. Dazu kommen als *singuläre* Lösungen die zu Vereinen von Elementen 2. O. erweiterten ∞^1 regulären Lösungen der Differentialgleichung erster Ordnung, als die man, nach CLEBSCH, in diesem Falle die Gleichung $\Phi(X, U) = 0$ ebenfalls auffassen kann; schliesslich eventuell noch ∞^0 gleichfalls singuläre Lösungen, die durch Erweiterung aus den „singulären" Lösungen der genannten Gleichung 1. O. (Enveloppen von deren regulären Lösungen, Punktvereinen, geraden oder krummen Vereinen von Elementen *erster* Ordnung) hervorgehen. Hat die vorgelegte Gleichung zweitens z. B. die Form $\Phi(X) = 0$, so giebt es ebenfalls ∞^2 reguläre Lösungen; nämlich die ∞^2 trivialen Vereine, die ihren Punkt auf der Curve $\Phi(X) = 0$ haben. Dazu kommt als (einzige) *singuläre* Lösung die zu einem Verein von Elementen 2. O. erweiterte Curve $\Phi(X) = 0$ selbst.

Eine triviale Gleichung $\Phi(X, U) = 0$ hat also immer ∞^2 reguläre Lösungen, und die dieser zugehörigen Elemente 1. O. haben *sämmtlich* specielle Lage.

Eine *nicht-triviale (also mindestens zweigliedrige) Gleichung* $\overline{\Phi} = 0$ hat, nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen 2. Ordnung, ebenfalls ∞^2 reguläre Lösungen, durch die, in einer Umgebung eines Elementes allgemeiner Lage die ∞^3 der Gleichung genügenden Elemente 2. O. zu Vereinen angeordnet werden. Durch ein Linienelement *allgemeiner* Lage geht eine discrete Zahl (nämlich im Continuum C der *orientirten* Elemente 2. O. $m_1 - m_f = n_f - n_1$, nach der Bezeichnung des § 7) von solchen Lösungen. (Vgl. Nr. 26*.) Linienelemente von specieller Lage können aber unendlich vielen regulären und auch singulären Lösungen angehören. Es giebt höchstens ∞^1 singuläre Lösungen; ausser diesen unter Umständen noch isolirte singuläre Lösungen, die algebraisch ermittelt werden können.[1])

Eine Lösung mit zwei willkürlichen wesentlichen Parametern heisst *allgemeine* Lösung.

Wir nennen drittens eine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung $\overline{\Phi} = 0$ *ausgezeichnet*, wenn sie ein Verein ausgezeichneter Elemente, also ein Verein mit fester Geraden oder festem Punkt ist. Auch die ausgezeichneten Lösungen, falls es solche giebt, erfordern zu ihrer Bestimmung nur *algebraische* Operationen. Der zur Geraden $U = \widehat{YZ}$ gehörige ausgezeichnete Verein ist nämlich Lösung dann und nur dann, wenn die Gleichung

$$\{\mu(A_f Y) + \nu(A_f Z)\}^{m_f}(UP_f)^{n_f} = 0$$

---

1) Die Unterscheidung von nicht-trivialen und trivialen Differentialgleichungen 2. O. gehört nicht eigentlich der projectiven Geometrie, sondern der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen an. Bekannte Sätze von S. Lie über Differentialgleichungen 1. und 2. O. lassen sich so ausdrücken:

Durch geeignete Berührungstransformationen kann jede nicht-triviale Differentialgleichung 2. O. in jede andere, und auch jede triviale Gleichung 2. O. in jede andere übergeführt werden, nicht aber eine Gleichung der einen Classe in eine Gleichung der anderen.

Dabei treten natürlich in den Continuis $A \ldots C$ stets singuläre Elemente auf, wenn die Berührungstransformation weder eine Collineation noch eine Correlation ist. Die Theorie der trivialen Gleichungen ist im Wesentlichen schon enthalten in der Theorie der Differentialgleichungen *erster* Ordnung.

identisch besteht für alle Werthe der binären Parameter $\mu : \nu$. (Vgl. § 7, Nr. 26.) ∞^1 ausgezeichnete Lösungen giebt es dann und nur dann, wenn wenigstens eine der in § 7 mit n_1 und m_f bezeichneten Zahlen den Werth Null hat; und zwar werden die zu diesen Lösungen gehörigen ∞^1 Punkte oder ∞^1 Geraden alsdann dargestellt durch die Gleichung

$$(A_1 X)^{m_1} = 0 \quad \text{oder} \quad (UP_f)^{n_f} = 0. \text{ —}$$

Schliesslich werden wir auch die durch X oder U wirklich enthaltende Gleichungen $\overline{\Phi} = 0$ nicht darstellbaren ausgezeichneten irreducibelen Complexe $\Xi = 0$ und $\Omega = 0$ der ausgezeichneten Elemente als „Differentialgleichungen" auffassen. Da die ∞^2 in diesen Complexen enthaltenen Vereine, oder die „Lösungen" der Gleichungen $\Xi = 0$, $\Omega = 0$ (Gerade und Punkt-Vereine) sämmtlich ausgezeichnet sind, so nennen wir diese Gleichungen selbst *ausgezeichnet.*

Die vorausgehenden Begriffsbildungen und die daran geknüpften summarischen Bemerkungen scheinen uns erforderlich zur *präcisen* und zugleich kurzen Formulirung eines weiterhin (in § 12) aufzustellenden Satzes über Differentialgleichungen 2. O. Dieser Satz möchte sonst wohl auch als specieller erscheinen, als er in der That ist. Diese Begriffsbildungen können aber auch vielleicht sonst noch vortheilhaft sein. Denn sie lassen in der Gesammtheit aller algebraischen Differentialgleichungen, die zu einem und demselben Werthe der in § 6 definirten Zahl l gehören, und überhaupt derer, die von einer der erklärten Gattungen *umfasst* werden (in ihr wenn nicht eigentlich enthalten, so doch als Grenzfälle eingeschlossen sind), ein *abgeschlossenes Continuum* erkennen. Die Herstellung eines solchen Continuums ist natürlich völlig unmöglich, wenn man, wie üblich, und wie auch S. Lie noch gethan hat, die trivialen Gleichungen 2. O. von der Betrachtung ausschliesst.

In Bezug auf die Lösungen einer vorgelegten Gleichung wird Aehnliches wohl in der Regel nicht leicht und nicht allgemein zu erreichen sein. Aber es muss sich erreichen lassen, wo immer die Lösungen einer algebraischen Differentialgleichung 2. O. selbst algebraisch sind. Wir geben weiterhin einige Beispiele. (§ 15.)

Die durch Anwendung des Begriffs „abgeschlossenes Continuum" von uns im Falle der *projectiven* Geometrie und der Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung herbeigeführte Vervollständigung der Theorie ist natürlich auch unter anderen Voraussetzungen möglich. *Es ist überall wünschenswerth, nach Möglichkeit die Zahl der dunkeln Ecken zu mindern, in denen bei algebraischen oder anderen Processen Dinge vor sich gehen, die man nicht recht übersehen kann. Dazu wird erforderlich sein, dass neben den sogenannten allgemeinen Theorien in viel weiterem Umfange als bisher geschehen speciellere ausgebildet werden, die besonderen Classen von Problemen angepasst sind.*

§ 10.

Beziehungen zwischen der projectiven Geometrie der Elemente 2. Ordnung und der Plücker'schen Liniengeometrie.

Von den eingeführten Punktmannigfaltigkeiten M_4 sind alle die geradlinig, die aus einer zweigliedrigen Gleichung $\Sigma\Phi_k = 0$ entspringen. Die ∞^3 Vereine systatischer Elemente 2. O. werden bei den zugehörigen Abbildungen auf gerade Linien der M_4 bezogen. Entsprechen insbesondere die Punkte von M_4 eindeutig-umkehrbar den nicht-orientirten Elementen 2. Ordnung in irgend einem der vier Continua, so werden conjugirte Elemente als Paare von Punkten auf einer solchen Geraden abgebildet, die harmonisch getrennt sind durch zwei ausgezeichnete Punkte, die Bilder der beiden uneigentlichen Elemente des Büschels. Sind ferner die Punkte von M_4 eindeutig-umkehrbar den orientirten Elementen 2. O. zugeordnet, so entsprechen je drei über einander liegenden orientirten eigentlichen Elementen Figuren von drei Punkten, die, in dem binären Gebiet der betrachteten Geraden, angesehen werden können als Nullpunkte je einer cubischen Form. Es entstehen auf diese Art Büschel cubischer Formen mit gemeinsamer Hesse'scher Covariante. Die Nullpunkte der cubischen Covariante irgend einer Form eines dieser Büschel gehören in gleicher Weise zu den drei einander deckenden orientirten Elementen, die zu den drei ersten conjugirt sind. Die Nullpunkte der Hesse'schen Covariante der cubischen Form sind die ausgezeichneten Punkte auf der Geraden, die Bilder der uneigentlichen Elemente in dem gerade betrachteten natürlichen Continuum, die Stellen, in denen die Gruppen von je drei über einander liegenden orientirten Elementen sammt den dazu conjugirten zusammenfallen. Dies gilt insbesondere auch von der einfachsten der betrachteten Mannigfaltigkeiten M_4, der auf S. 365 unter Ia) aufgeführten. Diese Mannigfaltigkeit wird durch eine einzige quadratische Gleichung $(UX) = 0$ dargestellt; sie trägt zwei bei Transformationen von Γ_9 invariante Ebenen M_2, M_2', die eben durch die Gleichung $(UX) = 0$ correlativ auf einander bezogen sind, und die Bilder der Punkte und die Bilder der Geraden des untersuchten ternären Gebietes tragen. Von jedem Punkt von M_2 z. B. geht ein ebenes Büschel gerader Linien aus, das diesen Punkt mit den Punkten einer bestimmten Geraden von M_2' verbindet; die so construirten ∞^3 Geraden sind die

Bilder der trivialen oder systatischen Vereine von Elementen 2. O. und auf jeder sind, wie angegeben, die Punkte allgemeiner Lage zu Tripeln angeordnet (wobei natürlich in einem reellen Tripel, einem Tripel mit reellem Polarsystem, nur *ein* reeller Punkt vorkommt). Die invarianten Ebenen M_2, M_2' können als zwei beliebige einander nicht schneidende Ebenen eines Gebietes 6. Stufe angesehen werden, und ebenso die Gleichung $(UX) = 0$ als die Gleichung einer beliebigen Correlation zwischen beiden Ebenen. Durch diese Correlation ist die Gruppe Γ_9 der Figur vollkommen bestimmt.

Die zuletzt betrachtete Mannigfaltigkeit M_4 ist identisch mit der, die nach dem Vorgange von PLÜCKER in der projectiven Geometrie des Raumes zur Abbildung der ∞^4 geraden Linien benutzt wird. Offenbar kann man auch unmittelbar die orientirten Elemente 2. O. im ersten Continuum A Geraden des dreifach ausgedehnten Raumes zuordnen. Wir wollen diese Zuordnung in besonderer Weise ausführen, indem wir unter $x_0 = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Ebene verstehen, $\mathfrak{X}_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ setzen, und dann die Grössen X_i, U_i als PLÜCKER'sche Liniencoordinaten auffassen:

$$(28) \qquad \begin{cases} X_1 = \mathfrak{X}_{01}, & X_2 = \mathfrak{X}_{02}, & X_3 = \mathfrak{X}_{03}, \\ U_1 = \mathfrak{X}_{23}, & U_2 = \mathfrak{X}_{31}, & U_3 = \mathfrak{X}_{12}. \end{cases}$$

Ohne Weiteres erkennt man jetzt:

Das (die ∞^2 Punkte und ∞^2 Geraden umfassende) erste natürliche Continuum A von orientirten Elementen 2. O. der ebenen projectiven Geometrie lässt sich ausnahmslos eindeutig-umkehrbar abbilden auf das PLÜCKER'sche Liniencontinuum.

Die Gruppen γ_9, γ_8, γ_1 werden durch diese Abbildung bei geeigneter Verfügung über die willkürlich bleibenden Constanten übergeführt in Gruppen Γ_9, Γ_8, Γ_1 affiner Transformationen des Raumes. nämlich in die sogenannte allgemeine lineare homogene Gruppe, die specielle lineare homogene Gruppe, und in die zugehörige eingliedrige Gruppe von perspectiven Aehnlichkeitstransformationen.

Wir wollen, um uns kurz ausdrücken zu können, den bei den Transformationen von Γ_9 in Ruhe bleibenden Punkt $u_0 = 0$ oder $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ den *Hauptpunkt* der Gruppe Γ_9 nennen, ebenso die uneigentliche Ebene $x_0 = 0$ die *Hauptebene* von Γ_9. Gerade, die sich auf der unendlich fernen Hauptebene schneiden, heissen wie üblich *parallel*; analog wollen wir Gerade, die mit dem

Hauptpunkt durch eine Ebene verbunden werden können, *pseudoparallel* nennen. Dann können wir weiter sagen:

Den ∞^3 trivialen oder systatischen Vereinen orientirter Elemente entsprechen die ∞^3 Büschel von Geraden, die zugleich parallel und pseudoparallel sind. Die Geraden aller dieser Büschel sind zu Tripeln angeordnet (deren jedes höchstens eine reelle Gerade enthält), derart, dass die durch den Hauptpunkt und die Hauptebene bestimmten perspectiven Aehnlichkeitstransformationen von der Periode drei jedes Tripel als Ganzes in Ruhe lassen. Jedem Tripel entspricht, in dem natürlichen Continuum A, ein nicht orientirtes Element 2. Ordnung der Ebene. Die Geraden der genannten Büschel können ferner unter Anderem zu Paaren geordnet werden, derart, dass zwei Gerade desselben Paares durch den Hauptpunkt und die Hauptebene harmonisch getrennt sind, oder also einander zugeordnet werden durch die projective Spiegelung an Hauptpunkt und Hauptebene. Jedem Paar entspricht ein Paar conjugirter orientirter Elemente 2. O., und jedem Tripel solcher Paare oder je zwei gepaarten Tripeln ein Paar conjugirter nicht-orientirter Elemente 2. O.

Den Geraden durch den Hauptpunkt entsprechen, als uneigentliche („orientirte" oder „nicht-orientirte") Elemente 2. O., die Punkte, und den Geraden in der Hauptebene ebenso die Geraden des betrachteten ternären Gebietes.

Parallelen Geraden des Raumes sind Elemente 2. O. zugeordnet, die zu demselben Punkt, pseudoparallelen solche, die zur selben Geraden gehören.

Von Geraden, die in der Spiegelung an Hauptpunkt und Hauptebene einander entsprechen, kann man ebenfalls sagen, sie seien (in Bezug auf diese beiden Figuren) *conjugirt*. Andrerseits lassen sich die Begriffe der *Kegelschnittlage* und der *verkehrten Kegelschnittlage* für orientirte Elemente 2. O. bestimmter fassen dadurch, dass man als ihre Definitionen allgemein die Gleichungen

(29) $$(UY) - (VX) = 0 \quad \text{(vgl. Nr. 20)},$$

(30) $$(UY) + (VX) = 0 \quad \text{(vgl. Nr. 23)}$$

hinstellt. Dann ergibt sich:

Zwei orientirten Elementen 2. O. in verkehrter Kegelschnittlage entsprechen im Raume gerade Linien, die einander schneiden, und umgekehrt.

Zwei orientirten Elementen 2. O. in Kegelschnittlage entsprechen im Raume gerade Linien, deren jede die zur anderen conjugirte schneidet, und umgekehrt.

Wir haben bereits auf die durch die Gleichungen (29) und (30) in Evidenz gesetzte Thatsache hingewiesen, dass die Orientirung *eines* eigentlichen Elementes 2. O. in einem nicht singulären Büschel oder Feld eine bestimmte Orientirung aller übrigen nach sich zieht. Nunmehr sehen wir:

Jedem Bündel (jedem Feld) von orientirten Elementen 2. O.[1] *des ternären Gebietes entspricht im Raume ein Bündel (ein Feld) gerader Linien, und umgekehrt.*

Darnach liegt die Möglichkeit vor, (die ganze projective Geometrie im Raume, insbesondere aber) die Geometrie der allgemeinen linearen homogenen Gruppe auf eine neue Art in die Ebene zu übertragen, und zwar durch ein natürliches Verfahren, unter Gebrauch von Figuren, die nicht ad hoc construirt sind, sondern ein selbstständiges Interesse haben.[2])

Vorausgesetzt ist dabei, dass man das orientirte Element 2. O. als eine „geometrische Figur" gelten lassen will.

Dies wird mit Bezug auf geometrische Figuren im engeren Sinne des Wortes, nämlich *reelle* Figuren, ohne Weiteres zugegeben werden müssen: Von den drei Orientirungen eines reellen Elementes ist nur eine reell; man braucht daher bei Beschränkung auf das reelle Gebiet den Begriff der Orientirung, der der geometrischen Deutung schwer zugänglich zu sein scheint, gar nicht erst einzuführen.

Wir werden weiterhin noch die räumlichen Bilder von Kegelschnitten und anderen analytischen Curven betrachten, verzichten aber auf solche Ausführungen, die, wie z. B. Begriff und Eigenschaften der *Büschel* von orientirten oder nicht-orientirten Elementen 2. O., sich von selbst ergeben.

Zur Geometrie der allgemeinen linearen homogenen Gruppe, mit der Geraden als Raumelement, bemerken wir noch, dass die übliche Auffassungsweise *nicht* erschöpfend ist. Es sind vielmehr *vier* natür-

---

1) Das Bündel aller Punkte z. B. muss hier natürlich auch als Bündel „orientirter" Elemente 2. O. betrachtet werden, zu deren Continuum es gerechnet wird.

2) Wir erinnern an die analoge Abbildung der Kreise einer Ebene auf die Punkte im Raume, die allerdings sehr viel näher liegt und ganz elementaren Charakter hat.

liche Continua von „Geraden" zu betrachten (die leicht auch geometrisch zu erklären sind). Wählt man den Punkt oder die Ebene als Raumelement, so ergeben sich analog je *zwei* „natürliche" Continua.[1])

§ 11.

Fortsetzung: Die Bilder der Kegelschnitte.

Der Untersuchung über die Abbildung der Kegelschnitte im Liniencontinuum schicken wir einige Bemerkungen über Flächen 2. Grades voraus. Wir betrachten eine solche Fläche, von nicht verschwindender Discriminante, als gegeben durch ihre Punktgleichung

$$(ax)^2 = (a'x)^2 = \dots = 0,$$

und setzen in bekannter Weise

$$(u\alpha)^2 = \tfrac{1}{6}(aa'a''u)^2, \quad D = \tfrac{1}{4}(a\alpha)^2 = \tfrac{1}{24}(aa'a''a''')^2,$$

so dass

$$D^2 \cdot (ax)^2 = \tfrac{1}{6}(\alpha\alpha'\alpha''x)^2, \quad D^3 = \tfrac{1}{24}(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''')^2.$$

Wir nennen ferner den Hauptpunkt o, die Hauptebene ω, und setzen insbesondere

(31) $$(uo) = u_0, \quad (\omega x) = x_0.$$

Unter dem *Covolumen*[2]) der Fläche 2. Grades verstehen wir dann die folgende absolute irrationale Invariante der speciellen linearen

---

1) Man vergleiche auch den Satz des Verfassers bei Lie u. Engel Transformationsgruppen III, S. 788. Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, dass auch zu der (wegen ihrer Beziehung zur Theorie der Cremona-schen Transformation wichtigen) projectiven Geometrie auf einem sogenannten rationalen Normalkegel *zwei* natürliche Punktcontinua gehören. Das eine ist das bekannte, bei dem anderen treten an Stelle des Scheitels des Kegels ∞^1 „Punkte". Andere Anwendungen des Begriffs „natürliches Continuum" denkt der Verfasser bei späteren Gelegenheiten darzulegen.

2) Das Volumen eines Ellipsoids entsteht aus dem Covolumen, wenn man dieses mit $\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}$ multiplicirt, das Volumen zwischen dem Asymptotenkegel eines geradlinigen Hyperboloids und irgend einem dieses in einer Ellipse berührenden Cylinder durch Multiplication mit $\frac{\pi}{3}$. Eine interessantere Interpretation des Covolumens ergiebt sich aus einem Satze von G. Bauer (Münch. Academieber. 5. Juni 1880. Vgl. H. Schröter, Math. Ann. Bd. 18, 1881). — Zu bemerken ist, dass von den Vorzeichen der beiden als Volumen und Covolumen zu bezeichnenden Grössen das eine an sich noch nicht das andere bestimmt, dass aber die Entscheidung

Gruppe (der Gruppe aller eigentlich-volumentreuen affinen Transformationen)

$$(32)\qquad CV = \frac{D\sqrt{D}}{[(\omega\alpha)^2]^2},$$

unter dem *Contravolumen* den in Bezug auf den Hauptpunkt o (an Stelle von ω) gebildeten dazu correlativen Ausdruck

$$(33)\qquad C'V = \frac{\sqrt{D}}{[(ao)^2]^2}.$$

Beide Grössen sind nach ihrer Definition absolute Invarianten der speciellen linearen homogenen Gruppe; sie haben reciproke Werthe bei Flächen, die die Spiegelung an Hauptpunkt und Hauptebene zulassen (also bei Mittelpunktsflächen mit dem Mittelpunkt o), da nach (31) $(\omega o) = 1$ und, unter der genannten Voraussetzung

$$(34)\qquad D = (ao)^2 \cdot (\omega\alpha)^2,$$

also

$$(35)\qquad CV = \frac{(ao)^2 \cdot \sqrt{(ao)^2}}{\sqrt{(\omega\alpha)^2}} = \frac{1}{C'V}.$$

Die Irrationalität, die in den Ausdruck (32) eingeht, ist nun dieselbe, von deren Adjunction, nach einer Bemerkung des Verfassers, die Trennung der beiden Schaaren von Erzeugenden einer durch ihre Punkt- oder Ebenengleichung gegebenen Fläche 2. Grades abhängt. Man kann also sich die Vorstellung bilden, dass jedesmal, wenn man dem Covolumen einen bestimmten unter seinen beiden Werthen ertheilt, damit zugleich eine der beiden Schaaren von Erzeugenden auf der Fläche ausgezeichnet wird, und man kann diese Geraden als *linksseitige Erzeugende* denen der anderen Schaar, als rechtsseitigen Erzeugenden gegenüberstellen. Dabei bleibt es mit Bezug auf eine Fläche gegebenen Covolumens willkürlich, welche ihrer Geraden linksseitig genannt werden sollen. Ist aber diese Entscheidung einmal getroffen, so ist sie auch getroffen u. A. für alle anderen Flächen desselben Covolumens: Durch (eigentlich-) volumentreue affine Transformationen können irgend zwei Flächen gleichen Covolumens nur so zur Deckung gebracht werden, dass die linksseitigen Erzeugenden der einen in eine *bestimmte* Schaar von Erzeugenden der anderen übergehen.

über dieses Vorzeichen bei einer Fläche 2. Grades die entsprechende Entscheidung für alle übrigen nach sich zieht.

Anders ausgedrückt: Eine Vertauschung der beiden Schaaren von Erzeugenden einer Fläche 2. Grades kann nur durch uneigentlich-volumentreue affine Transformationen erfolgen, solche, bei denen alle Volumina ihre Vorzeichen wechseln, und auch das Covolumen der Fläche einen Vorzeichenwechsel erleidet.

Nach diesen Vorbereitungen können wir sagen:

Den ∞^1 (reellen) orientirten Elementen 2. Ordnung irgend eines irreducibelen Kegelschnittes entsprechen im Raume die „linksseitigen" Erzeugenden einer völlig bestimmten (geradlinigen) Fläche 2. Grades, die die Spiegelung an Hauptpunkt o und Hauptebene ω zulässt (also einer Mittelpunktsfläche mit dem Mittelpunkt o), und deren Covolumen oder Contravolumen den numerischen Werth Eins[1]) hat, und umgekehrt. Den ∞^1 Elementen, die zu denen des Kegelschnittes conjugirt sind, entsprechen die rechtsseitigen Erzeugenden derselben Fläche. Den ∞^1 Paaren conjugirter Schaaren orientirter Elemente 2. O., die den Kegelschnitt begleiten, sind allgemein zugeordnet die Paare von Erzeugendenschaaren der ∞^1 Flächen 2. Grades, die aus der betrachteten durch die Transformationen der Gruppe Γ_1 (durch die zum Hauptpunkt gehörigen perspectiven Aehnlichkeitstransformationen) hervorgehen.

Es liegt in diesem Satze das Problem, die Punkt- oder Ebenengleichung der Fläche 2. Grades zu finden, die einem in Parameterdarstellung oder durch eine Punkt- oder Liniengleichung gegebenen Kegelschnitt zugeordnet ist. Indem wir diese Aufgabe nunmehr in Angriff nehmen, ergänzen wir zugleich einige zuvor angestellte Betrachtungen dadurch, dass wir zur Parameterdarstellung des Kegelschnittes nunmehr ebenfalls homogene Veränderliche verwenden. Die zu entwickelnden Formeln sind auch noch für andere Zwecke nützlich; namentlich sind sie von Bedeutung für die Theorie des sogenannten Hesse'schen Uebertragungsprincips.

Wir gehen aus von einer ternär-linearen und binär-quadratischen Form, die wir symbolisch bezeichnen mit

$$(WM)(\mu\sigma)^2 = (W_1M_1 + W_2M_2 + W_3M_3)(\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1)^2:$$

binäre Veränderliche werden durch kleine Lettern des griechischen Alphabets, σ, τ, $\cdots$ bezeichnet, ternäre wie bisher durch grosse

1) Unmittelbar klar ist nur, dass das Covolumen constant, unabhängig von der Wahl des Kegelschnittes ist. Dass es gerade den Werth Eins hat, wird sofort nachgewiesen werden. Man kann das natürlich auch durch Berechnung eines Zahlenbeispiels zeigen.

Lettern des lateinischen, U, V, W, ··· (Geraden entsprechend) und X, Y, Z, ·· (Punkten zugeordnet).

Das *vollständige Formensystem*[1]) der genannten Grundform enthält eine Invariante

$$\mathfrak{J} = \tfrac{1}{12}(MM'M'')(\mu\mu')(\mu\mu'')(\mu'\mu''),$$

die wir als von Null verschieden annehmen, und ausserdem neben der identischen Covariante (WZ) noch vier Covarianten, die theils paarweise zu einander oder zur Grundform correlativ, theils zu sich selbst correlativ sind, und sammt mehreren dieses Reciprocitätsverhältniss ausdrückenden Relationen in den folgenden Formeln zusammengestellt sind:

$$(36a)\qquad (WM)(\mu\sigma)^2 = \mathfrak{J}^{-1}\cdot\tfrac{1}{2}(NN'W)(\nu\nu')(\nu\sigma)(\nu'\sigma),$$

$$(36b)\qquad (NZ)(\nu\sigma)^2 = \tfrac{1}{2}(MM'Z)(\mu\mu')(\mu\sigma)(\mu'\sigma),$$

$$(37)\qquad (WM)(NZ)(\mu\nu)(\mu\sigma)(\nu\sigma),$$

$$(38a)\qquad (WA)^2 = \mathfrak{J}^{-2}\cdot\tfrac{1}{2}(LL'W)^2 = \tfrac{1}{2}(WM)(WM')(\mu\mu')^2,$$

$$(38b)\qquad (LZ)^2 = \tfrac{1}{2}(AA'Z)^2 = \tfrac{1}{2}(NZ)(N'Z)(\nu\nu')^2.$$

Zwischen ihnen, der identischen Covariante (WZ) und der obigen Invariante

$$(39)\qquad \mathfrak{J} = \tfrac{1}{6}(NM)(\mu\nu)^2$$

besteht eine (einzige) identische Relation, die, wenn die Formen (36a), (36b) und (37) kurz mit M, N und $[M, N]$ bezeichnet werden, so lautet:

$$(40)\qquad [M,N]^2 + (LZ)^2\cdot M^2 - 2\mathfrak{J}\cdot(WZ)\cdot M\cdot N + (WA)^2\cdot N^2 = 0.$$

Die bei Ableitung dieser und anderer Beziehungen zu benutzenden Reductionsformeln sind:

$$(41)\qquad (NZ)(WM)(\mu\nu)^2 = 2\mathfrak{J}\cdot(WZ),$$

$$(42)\qquad (NM)(\mu\sigma)^2(\nu t)^2 = 2\mathfrak{J}\cdot(\sigma\tau)^2,$$

$$(43)\qquad (LA)(LZ)(WA) = \mathfrak{J}^2\cdot(WZ),$$

$$(44)\qquad \begin{cases}(MM'Z)(\mu\sigma)^2(\mu'\tau)^2 = 2(\sigma\tau)\cdot(NZ)(\nu\sigma)(\nu\tau),\\ (NN'W)(\nu\sigma)^2(\nu'\tau)^2 = 2\mathfrak{J}\cdot(\sigma\tau)\cdot(WM)(\mu\sigma)(\mu\tau),\end{cases}$$

---

1) Von der Vollständigkeit des anzuführenden Formensystems werden wir nicht, und von den zugehörigen Reductionsformeln nur zum Theil Gebrauch zu machen haben. Um aber einigermaassen Abgerundetes zu bieten, gehen wir im Texte etwas über das unmittelbar Nöthige hinaus.

$$(45)\quad \begin{cases} (MM'M'')(\mu\varrho)^2(\mu'\sigma)^2(\mu''\tau)^2 = 4\mathfrak{J}\cdot(\varrho\sigma)(\varrho\tau)(\sigma\tau), \\ (NN'N'')(\nu\varrho)^2(\nu'\sigma)^2(\nu''\tau)^2 = 4\mathfrak{J}^2\cdot(\varrho\sigma)(\varrho\tau)(\sigma\tau), \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} (UM)(VM')(WM'')(\mu\mu')(\mu\mu'')(\mu'\mu'') = 2\mathfrak{J}\cdot(UVW), \\ (NX)(VM')(WM'')(\nu\mu')(\nu\mu'')(\mu'\mu'') = 2\quad\cdot(LX)(LVW), \\ (UM)(N'Y)(N''Z)(\mu\nu')(\mu\nu'')(\nu'\nu'') = 2\mathfrak{J}\cdot(U\Lambda)(\Lambda YZ), \\ (NX)(N'Y)(N''Z)(\nu\nu')(\nu\nu'')(\nu'\nu'') = 2\mathfrak{J}^2\cdot(XYZ). \end{cases}$$

Setzt man $\mathfrak{J} = 1$, so wird die Reciprocität zwischen den Formen (36, a, b) und (38, a, b) vollkommen; und dies wird erreicht, wenn man statt der Formen M, N solche benutzt, die aus ihnen durch Multiplication mit $\mathfrak{J}^{-\frac{1}{3}}$ und $\mathfrak{J}^{-\frac{2}{3}}$ hervorgehen. Auf diese Weise, also durch Adjunction einer *numerischen* (von dem Parameter $\sigma_1 : \sigma_2$ unabhängigen) Irrationalität, wird aber, wie man unmittelbar findet, zugleich die Orientirung der Elemente 2. O. des Kegelschnittes $(LZ)^2 = 0$ oder $(U\Lambda)^2 = 0$ bewirkt, so dass die Substitution

$$(47)\qquad X = \mathfrak{J}^{-\frac{1}{3}}\cdot(\mu\sigma)^2 M,\quad U = \mathfrak{J}^{-\frac{2}{3}}\cdot(\nu\sigma)^2 N$$

ohne Weiteres die orientirten Elemente des Kegelschnittes liefert.

Wir deuten nunmehr die durch (47) erklärten Grössen X_i, U_i als Plücker'sche Liniencoordinaten, nach Nr. (28). Wir erhalten dann, bei veränderlichem σ, die eine („linksseitige") Schaar von Erzeugenden einer Fläche 2. Grades; die Aufgabe ist, die Punkt- oder Ebenengleichung dieser Fläche zu finden.

Indem wir, wie zuvor, Punkte und Ebenen im Raume durch Lettern des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnen, ersetzen wir der Gleichförmigkeit wegen in diesem Zusammenhang die Zeichen M, N, L, Λ durch die Zeichen m, n, l, λ, die ganz dasselbe bedeuten sollen, wie jene. Die Punktgleichung z. B. der zu suchenden Fläche muss dann offenbar in der Form

$$\varkappa\cdot z_0^2 + (lz)^2 = 0$$

erscheinen. Es muss also möglich sein, und die Aufgabe reducirt sich darauf, den Parameter $\varkappa$ derart zu bestimmen, dass jede der ∞^1 Geraden (47) auf der Fläche liegt. Dies läuft auf die Forderung hinaus, dass Substitution der Coordinatenwerthe

$$\begin{aligned} z_0 &= \quad * \quad - X_1 u_1 - X_2 u_2 - X_3 u_3, \\ z_1 &= X_1 u_0 \quad * \quad - U_3 u_2 + U_2 u_3, \end{aligned}$$

$$z_2 = X_2 u_0 + U_3 u_1 \quad * \quad - U_1 u_3 ,$$
$$z_3 = X_3 u_0 - U_2 u_1 + U_1 u_2 \quad *$$

die angeführte Gleichung zu einer Identität macht, die besteht für *alle* Werthe der Grössen U_i und der Grössen $\sigma_1 : \sigma_2$.

Die Substitution der angeführten Werthe liefert nun zunächst die Gleichung

$$\varkappa\Big[(um)(\mu\sigma)^2\Big]^2 + \Big[(lm)(\mu\sigma)^2 \cdot u_0 + \mathfrak{J}^{-\frac{1}{3}} \cdot (lnu)(\nu\sigma)^2\Big]^2 = 0.$$

Reducirt man das zweite Glied auf der linken Seite mit Hülfe der Identitäten (42) und (44), so findet sich, dass diese Gleichung in der That zu einer Identität wird, wenn man $\varkappa = \mathfrak{J}^{\frac{4}{3}}$ setzt.

Die Punktgleichung der dem Kegelschnitt $(LZ)^2 = 0$ zugeordneten Fläche 2. Grades wird also

$$(48\text{a}) \qquad (az)^2 = \mathfrak{J}^{\frac{4}{3}} \cdot (\omega z)^2 + (lz)^2 = 0;$$

und ebenso die Ebenengleichung

$$(48\text{b}) \qquad \mathfrak{J}^{-\frac{10}{3}} \cdot (w\alpha)^2 = \mathfrak{J}^{\frac{2}{3}} \cdot (wo)^2 + (w\lambda)^2 = 0.$$

Nunmehr folgt

$$(ao)^2 = \mathfrak{J}^{\frac{4}{3}}, \quad (\omega\alpha)^2 = \mathfrak{J}^4, \quad D = \mathfrak{J}^{\frac{16}{3}},$$

und

$$(CV)^2 = (C'V)^2 = 1.$$

Dass wir den Werth $\sqrt{1}$ des Covolumens gerade $= +1$ und nicht $= -1$ setzen, ist natürlich willkürlich. Ist aber die Entscheidung für eine der betrachteten Flächen getroffen, so muss sie für alle in gleicher Weise erfolgen. — Betrachtet man $(lz)^2 = (LZ)^2$ als Grundform, so muss man an Stelle von $\mathfrak{J}$ die Invariante $J = \frac{1}{6}(LL'L'')^2 = \mathfrak{J}^2$ einführen.

§ 12.

Eine neue geometrische Deutung des Integrationsproblems der gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Von den vorausgehenden Betrachtungen lässt sich eine bemerkenswerthe Anwendung machen, bei deren Darlegung wir uns nach den in § 9 und 11 getroffenen Vorbereitungen ziemlich kurz fassen können.

Als Bild der Elemente 2. O. einer krummen analytischen Curve erhalten wir im Raume eine Regelfläche. Als Bild eines irreducibelen Kegelschnittes, der die Curve dreipunktig berührt, entsteht eine Fläche 2. Grades, von der beschriebenen besonderen Beschaffenheit, die eine Gerade der Regelfläche zur linksseitigen Erzeugenden hat. Als Bild eines Kegelschnittes, der die Curve vierpunktig berührt, entsteht dann eine Fläche 2. Grades, von der zwei consecutive linksseitige Erzeugende jener Regelfläche angehören; bei fünfpunktiger Berührung des Kegelschnittes endlich entsteht eine Fläche 2. Grades, die drei consecutive Erzeugende mit der Regelfläche gemein hat, oder die Fläche längs einer Geraden osculirt. So kommt man ohne weitere Rechnung zu folgenden Sätzen:

Zwei weder mit o noch ∞ vereinigte consecutive Gerade des Raumes, die einander nicht schneiden, von denen aber jede die conjugirte der anderen schneidet, bilden zusammen mit ihren Conjugirten die Basis eines Büschels (oder einer Schaar) von Flächen 2. Grades mit constantem Covolumen (und Contravolumen), deren jede die Spiegelung an Hauptpunkt und Hauptebene zulässt.

Ist dieses Covolumen insbesondere gleich der Einheit, und sind die Geraden linksseitige Erzeugende, so sind sie Bilder von zwei consecutiven orientirten eigentlichen Elementen 2. O., die sich in vereinigter Lage befinden, aber nicht demselben trivialen (systatischen) Verein angehören.

Bild irgend eines krummen Vereins eigentlicher (orientirter) Elemente 2. O. ist irgend eine nicht abwickelbare Regelfläche, die längs jeder ihrer Erzeugenden allgemeiner Lage von einem Büschel der genannten Flächen so berührt wird, dass die genannte Gerade eine linksseitige Erzeugende aller dieser Flächen ist.

Hat eine analytische Regelfläche die angegebene Eigenschaft, so hat sie von selbst die weitere, längs jeder Erzeugenden allgemeiner Lage von einer Fläche 2. Grades des bezeichneten Büschels osculirt zu werden.

Es würden sich auch diese Sätze durch Rechnung begründen lassen; wir verzichten aber auf weitere Ausführungen, um nur noch die jetzt unmittelbar sich ergebende Folgerung hervorzuheben:

Das Problem, alle weder trivialen noch ausgezeichneten Lösungen einer weder trivialen noch ausgezeichneten algebraischen

Differentialgleichung 2. *O.*[1]) *zu finden, deckt sich* *vollständig* *mit dem anderen:*

„Aus einem algebraischen Liniencomplex, der durch eine mindestens zweigliedrige Gleichung $\Phi = 0$ *(oder* $\overline{\Phi} = 0$*) dargestellt wird, auf alle möglichen Arten Regelflächen von der zuvor bezeichneten Beschaffenheit zu entnehmen."*

Wir können daher diese Regelflächen als *integrirende Regelflächen* des Complexes bezeichnen.

Mit Bezug auf einander nicht-schneidende consecutive Gerade erinnern wir noch daran, dass jede solche Figur bekanntlich zu einer projectiven nicht-ausgearteten Zuordnung zwischen Punkten und Ebenen einer Geraden gehört. In unserem Falle ist dem Schnittpunkt der Geraden mit der Hauptebene ω zugeordnet die Verbindungsebene der Geraden mit dem Hauptpunkt o. Ein beliebiger Punkt der Geraden und die ihm zugeordnete Ebene bilden ein Flächenelement für alle ∞^1 Flächen constanten Covolumens durch die consecutiven Geraden und deren Spiegelbilder in Bezug auf o, ω.

Der reducibelen Curve in einem Büschel (oder, was dasselbe ist, einer Schaar) vierpunktig berührender Kegelschnitte entspricht natürlich eine (z. B. als Ort von Punkten in eine doppelt zählende Ebene) ausgeartete Fläche des zugeordneten Büschels.

Die Flächen 2. O. eines Büschels, dessen Basis zwei nicht-benachbarte einander schneidende Gerade und ihre Conjugirten sind, haben *nicht* constantes Covolumen.

Bei der gewählten Formulirung des letzten Satzes ist es gleichgültig, auf welches der vier Continua $A \cdots C$ man sich bezieht. Im Vorhergehenden (§ 7 und § 10, Schlussbemerkung) sind aber die Hülfsmittel entwickelt, die erforderlich dazu sind, diesen Satz so auszugestalten, dass er z. B. in Bezug auf das Continuum C auch die in seiner Formulirung noch ausgeschlossenen Fälle umfasst.

§ 13.

Krümmung und Krümmungskreis eines Elementes 2. Ordnung in der ebenen oder sphärischen Maassgeometrie.

Wir betrachten zunächst eine beliebige *Euklidische Maassbestimmung,* und verstehen nunmehr unter $(LX) = 0$ die

1) Wegen dieser Begriffe vgl. § 9.

Gleichung der zugehörigen unendlich fernen Geraden, unter $(U|U) = (UA)^2 = 0$ die Gleichung des Paares der sogenannten unendlich fernen Kreispunkte, so dass $\overline{J} = \frac{1}{6}(AA'A'')^2 = 0$ und $\frac{1}{2}(AA'X)^2 = (LX)^2$.[1]) Dann ist, wenn (A, B) den Winkel zweier Geraden A, B und $\overline{PQ}$ die Entfernung zweier Punkte P, Q bezeichnet,

$$\sin(A, B) = \frac{(LAB)}{\sqrt{A|A}\sqrt{B|B}} = -\sin(B, A),$$

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{PQ|PQ}}{(LP)(LQ)} = -\overline{QP}.$$

Hieraus ergeben sich für *Contingenzwinkel* $d\sigma$ und *Bogenelement* ds einer krummen Curve die Ausdrücke

$$(49) \qquad d\sigma = \frac{(LAA')}{(A|A)} \cdot dt, \qquad ds = \frac{\sqrt{PP'|PP'}}{(LP)^2} \cdot dt.$$

Dabei entscheidet die Quadratwurzel im Zähler von ds über die *Orientirung* der Curve, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, der verlangt, der Tangente $(AZ) = (PP'Z) = 0$ eine bestimmte Richtung beizulegen. Schreiben wir dann U und X an Stelle von A und P, und nehmen wir der Einfachheit halber gleich an, dass das Element 2. O. $(X : U)$ der Curve gemäss der Bedingung (10*) normirt sei, so erhalten wir an Stelle der Ausdrücke (49) die folgenden

$$(50) \qquad d\sigma = \frac{(LX)}{(U|U)} \cdot dt, \qquad ds = \frac{\sqrt{U|U}}{(LX)^2} \cdot dt.$$

Wir bezeichnen nun als *Krümmung* des (zunächst eigentlichen) Elementes 2. O. $(X : U)$, dessen absolute Bewegungsinvariante

$$(51) \qquad K = \frac{d\sigma}{ds} = \left\{\frac{(LX)}{\sqrt{U|U}}\right\}^3.$$

Der Werth dieser Krümmung nun, der sichtlich von der oben besprochenen Orientirung des zugehörigen Elementes erster Ordnung, nicht aber von der zuvor erklärten Orientirung des Elementes zweiter Ordnung abhängt, ist gleich dem reciproken Werthe vom Radius des Kreises, der das Element 2. Ordnung enthält. Dieser Kreis kann, als Kegelschnitt, der das Element 2. O. mit den genannten unendlich fernen Kreispunkten verbindet, mit Hülfe der Gleichung (18) gefunden werden; oder auch durch

---

1) Wegen der Bezeichnungen vgl. Leipz. Ber. 1896, S. 649 u. ff.

sonst übliche Methoden. Man ermittelt z. B. dann zunächst die Normale des Elementes 1. O. im Punkte X: $(U|XZ)=0$; hierauf die Gleichung des Schnittpunktes zweier consecutiver Normalen oder *die Gleichung des Krümmungsmittelpunktes:*

$$(52)\qquad (WX_1)=(LX)^2(WX)+(U|U)(U|W)=0.$$

Der Abstand dieses Punktes X_1 von der durch Adjunction von $\sqrt{U|U}$ orientirten Geraden U ist

$$(53)\qquad r=\frac{(UX_1)}{\sqrt{U|U}(LX_1)}=\left\{\frac{\sqrt{U|U}}{(LX)}\right\}^3=\frac{1}{K}.$$

Die Gleichung des soeben definirten Kreises oder *die Gleichung des Krümmungskreises des Elementes 2. O.* $(X:U)$ endlich wird

$$(54)\qquad (LX)(XZ|XZ)-2(U|U)(LZ)(UZ)=0.$$

Alle die angeführten Ausdrücke zeigen schon durch ihre Form an, unter welchen Umständen sie illusorisch werden, so dass eine Erörterung hierüber, wie auch über die uneigentlichen Elemente 2. O. erspart werden kann.

Wir übertragen nun das Gesagte auf den Fall Nicht-Euklidischer Maassbestimmung, indem wir wiederum absehen von der üblichen Specialisirung des Coordinatensystems, die bei zweckmässiger Wahl der Bezeichnung eine Vereinfachung der Formeln keineswegs bewirkt.

Die Discriminante des absoluten Kegelschnittes setzen wir, um vollkommene symmetrische Formeln zu erhalten, von vorn herein gleich der Einheit, so dass dieser Kegelschnitt selbst bezeichnet werden kann mit

$$(55)\quad (LX)^2=\tfrac{1}{2}(AA'X)^2=0,\quad (UA)^2=\tfrac{1}{2}(LL'U)^2=0$$

Führen wir dann für die nach Reduction vermöge

$$(LA)(LA)(UA)=(UX)$$

(Nr. 43) Symbole L und A noch enthaltenden Klammerfactoren besondere Zeichen ein, nämlich

$$(56)\quad \begin{matrix}(XY)=(LX)(LY), & (UV)=(UA)(VA),\\ (XUV)=(LX)(LUV), & (UXY)=(UA)(AXY),\end{matrix}$$

so fällt der in der allgemeinen Theorie der ternären Formen bestehende algebraische Unterschied zwischen Symbolen von Punkten und Geraden hinweg. Die elementaren Bewegungsinvarianten

$$(57)\qquad \begin{array}{c}(UV),\ (UX),\ (XY),\\ (UVW),\ (XVW),\ (UVZ),\ (XYZ)\end{array}$$

von Punkten und Geraden (aus denen, wie sich zeigen lässt, alle anderen rational und ganz zusammengesetzt werden können) rubriciren sich unter zwei Typen, die man als gerade und schiefe Invarianten bezeichnen kann, und zwischen denen dieselben beiden aus der Theorie der ternären Formen bekannten Identitäten bestehen, unabhängig davon, ob man mit dem Zeichen U z. B. die Vorstellung einer Geraden oder die Vorstellung eines Punktes (des Poles der Geraden) verknüpfen will.[1])

Wir entscheiden uns nun, willkürlich, für eine unter zwei Möglichkeiten, indem wir der zum absoluten Kegelschnitt gehörigen Maassbestimmung *positive Krümmung*, und zwar der Einfachheit halber sogleich *die Krümmung Eins* beilegen. Die Cosinus der Entfernung zweier Punkte P, Q und des Winkels zweier Geraden A, B sind dann gegeben durch die Ausdrücke

$$(58)\qquad \cos(A, B) = \frac{(AB)}{\sqrt{AA}\sqrt{BB}}, \qquad \cos(P, Q) = \frac{(PQ)}{\sqrt{PP}\sqrt{QQ}},$$

die sich von bekannten Formeln nur durch die etwas einfachere Bezeichnung unterscheiden.

Um die in diesen Ausdrücken liegende Unbestimmtheit zu mindern, schreiben wir den Punkten sowohl wie den Geraden der Nicht-Euklidischen Ebene eine *Orientirung* zu, die für irgend einen Punkt P durch Adjunction der Quadratwurzel $\sqrt{PP}$, für irgend eine Gerade A durch Adjunction der analog gebildeten Wurzelgrösse $\sqrt{AA}$ erfolgt, oder, wenn diese Grössen schon rational bekannt sein sollten, durch willkürliche Entscheidung über deren Vorzeichen. Die Mannigfaltigkeit der ∞^2 Punkte wie die der ∞^2 Geraden wird dann doppelt überdeckt, mit Verzweigungselementen im absoluten Kegelschnitt; und man kann, wie bekannt, die orientirten Punkte deuten als Punkte auf einer im *Euklidischen* Raume gelegenen Kugel vom Radius Eins, und die orientirten Geraden als orientirte Hauptkreise auf derselben Kugel. Jedes Element 1. Ordnung in der Ebene wird dann auf der Kugel repräsentirt durch *vier* orientirte Linienelemente, die in

---

1) Vgl. des Verfassers Methoden zur Theorie der ternären Formen (Leipzig, 1889) II, § 6; ferner auch Leipz. Ber. 1896, S. 661; 1897, S. 443 u. ff.

einander übergehen durch die Spiegelung am Mittelpunkte der Kugel und durch einen Orientirungswechsel der Geraden des Elementes; und die zugehörigen vier trivialen Vereine von Elementen 2. O. werden durch den zu diesen gehörigen Orientirungsprocess noch je dreifach überdeckt. *Bogenelement* und *Contingenzwinkel* einer in der Nicht-Euklidischen Ebene oder auf der Kugel gezogenen Curve sind nun zufolge (58) gegeben durch die Ausdrücke

$$ds = \frac{\sqrt{(PP)(P'P') - (PP')^2}}{(PP)} \cdot dt,$$

$$d\sigma = \frac{\sqrt{(AA)(A'A') - (AA')^2}}{(AA)} \cdot dt;$$

und diese Differentiale gehen nach Einführung der Coordinaten eines orientirten Elementes 2. O. $(X:U)$ über in die einfacher gebildeten Ausdrücke:

(60) $$ds = \frac{\sqrt{UU}}{(XX)} \cdot dt, \quad d\sigma = \frac{\sqrt{XX}}{(UU)} \cdot dt.$$

Wir definiren nun, ähnlich wie zuvor, als *Krümmung* des Elementes 2. O. die absolute Bewegungsinvariante

(61) $$K = \frac{d\sigma}{ds} = \left\{\frac{\sqrt{XX}}{\sqrt{UU}}\right\}^3.$$

Durch das Element 2. O. in der Ebene oder auf der Kugel kann bei hinreichend allgemeiner Wahl des Elementes ein einziger Kreis (oder Grenzkreis) gelegt werden: Wir behaupten, dass die definirte Krümmung gleich der Cotangente vom Radius dieses Kreises ist, den wir als den zum Element 2. O. gehörigen *Krümmungskreis* bezeichnen.

Wir finden zunächst den Mittelpunkt (oder, auf der Kugel, die beiden Mittelpunkte) des fraglichen Kreises und die dazu absolut-correlative Gerade (den dazu absolut-correlativen nicht-orientirten Hauptkreis) durch Differentiation aus der Gleichung der *Normale* des Elementes zweiter (oder erster) Ordnung

(62a) $$(UXZ) = 0$$

oder des correlativ-definirten *Normalpunktes*

(62b) $$(XUW) = 0$$

Setzen wir, wie zuvor, sogleich das Bestehen der Beziehungen (9) voraus, so erhalten wir die Gleichungen

$$(63)\qquad \begin{aligned} (UU)(UW) + (XX)(XW) &= 0,\\ (XX)(XZ) + (UU)(UZ) &= 0. \end{aligned}$$

Die *Gleichungen des Krümmungskreises* in Coordinaten orientirter Punkte oder orientirter Linien (Hauptkreise) werden danach:

$$(64)\qquad \begin{aligned} (XX)\{(XZ) - \sqrt{XX}\sqrt{ZZ}\} + (UU)(UZ) &= 0,\\ (UU)\{(UW) - \sqrt{UU}\sqrt{WW}\} + (XX)(XW) &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir den Radius des Krümmungskreises mit r, so findet sich

$$(65)\qquad \cos r = \frac{(XX)\sqrt{XX}}{\sqrt{(XX)^3 + (UU)^3}}, \qquad \sin r = \frac{(UU)\sqrt{UU}}{\sqrt{(UU)^3 + (XX)^3}},$$

und also, wie behauptet,

$$(66)\qquad \operatorname{ctg} r = \left\{\frac{\sqrt{XX}}{\sqrt{UU}}\right\}^3 = K.$$

Die in K nicht eingehende Quadratwurzel im Nenner der Ausdrücke (65) ist, wie man durch Weiteres erkennt, dieselbe, von der die Orientirung des Krümmungsmittelpunktes und seiner absoluten Polare (63) abhängt.

Bei Interpretation auf der Kugel, oder allgemeiner, auf irgend einer Fläche von der constanten Krümmung Eins, erweist sich hiermit die von uns als *Krümmung* eines Elementes 2. Ordnung oder einer Curve (in einem ihrer Punkte) bezeichnete Grösse als besonderer Fall der gewöhnlich *geodätische Krümmung* genannten Biegungsinvariante. —

Aus dem Gesagten lässt sich eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen.

Es ist selbstverständlich, dass die zuvor erörterte Beziehung zwischen der Gruppe aller Collineationen in der Ebene und der speciellen linearen homogenen Gruppe im Raume eine ganz gleichartige Beziehung zwischen der *Gruppe der Nicht-Euklidischen Bewegungen in der Ebene* und der *Gruppe der Euklidischen Drehungen um den Hauptpunkt. o* zur Folge hat. Führen wir nun, wie zuvor, die Uebertragung auf die Kugel aus, so können die beiden zuletzt genannten Gruppen, soweit Figuren auf der Kugel in Frage kommen, mit einander identificirt werden; und diese Identificirung geschieht z. B., wenn wir insbesondere

$$(XX) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

setzen, und dann, nach Anweisung der Formeln (28), die Grössen X_i, U_i als *rechtwinklige* PLÜCKER'sche Liniencoordinaten deuten.[1]) Jedes Element 1. O. auf der Kugel bestimmt dann durch den zugehörigen Kugelradius und durch die Ebene des zugehörigen Hauptkreises unmittelbar das Parallelenbüschel, in dem die Bilder der sämmtlichen zu dem genannten Linienelement gehörigen Elemente 2. O. (des ersten Continuums) liegen. Man hat also, um zu einem orientirten Element 2. O. auf der Kugel, oder vielmehr zu je vier zusammengehörigen doppelt-orientirten Elementen 2. O. das räumliche Bild zu finden, nur noch den Euklidischen Abstand dieses Bildes vom Mittelpunkt o der Kugel, dem Hauptpunkt der benutzten Abbildung zu suchen. Dieser Abstand findet sich leicht:

(67) $$d = \frac{\sqrt{UU}}{\sqrt{XX}} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} r}.$$

Die in § 9 beschriebene Abbildung kann demnach, zunächst bei reellen Figuren, auf folgende Art hergestellt werden. Man verlegt das betrachtete ternäre Gebiet in die unendlich ferne Ebene ω, und projicirt es aus einem beliebigen eigentlichen Punkt o auf eine Kugel vom Radius Eins, deren Mittelpunkt eben dieser Punkt ist.

Jedem eigentlichen Element 2. O. in der Ebene ω werden nunmehr zwei diametral gegenüberliegende Elemente 2. O. auf der Kugel zugeordnet; jedes wird definirt durch seinen Punkt $(\sqrt{XX}, X)$, seinen Hauptkreis U, und durch den zugehörigen Krümmmungskreis.

Orientirt man den Hauptkreis U (durch Entscheidung über das Vorzeichen von $\sqrt{UU}$), so wird damit seiner Tangente im Punkte $(\sqrt{XX}, X)$ eine „positive“ Richtung beigelegt, und gleichzeitig erhält der geodätische Radius[2]) $\operatorname{tg} r$ des Krümmungskreises ein bestimmtes Vorzeichen, da vermöge der vereinigten Lage von U und X die Normale (und der Normalpunkt) des Elementes 2. O. ebenfalls orientirt sind:

(68) $$(\widehat{UX}\widehat{UX})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{UU}\sqrt{XX}.$$

---

1) Die Specialisirung des Coordinatensystems ist auch hier entbehrlich. Es genügt, die Gleichung $(LX)^2 = 0$ mit der Gleichung des absoluten Kegels zum Hauptpunkt o zu identificiren.

2) Vgl. BIANCHI, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von LUKAT. (Leipzig, 1899) S. 146.

Verschiebt man schliesslich den Kugelradius, der den Punkt $(\sqrt{XX}, X)$ *enthält, in der positiven Richtung der genannten Tangente um die Strecke* $\sqrt[3]{tg\, r}$, *so ist die so gefundene Gerade unabhängig von den Orientirungen des Punktes X und der Geraden U, und sie ist Bild eines beliebigen Elementes 2. O. im ersten Continuum.*

Die Beschränkung auf reelle Figuren, die wir des kürzeren Ausdrucks halber haben eintreten lassen, kann nachträglich aufgehoben werden. Die Unterscheidung von drei Wurzelwerthen $\sqrt[3]{\mathrm{tg}\, r}$, die man dann vornehmen muss, entspricht natürlich dem früher vorgenommenen Orientirungsprocess.

Nach dem letzten Satze kann die in § 10 vorgeführte Abbildung auch aus der gewöhnlichen Krümmungstheorie abgeleitet werden.

Empfehlenswerth scheint uns aber eine derartige Begründung nicht zu sein. Einmal versagt der Krümmungsbegriff für besondere Elemente 2. O. (deren Lage aus den zuvor entwickelten Formeln ohne Weiteres ersichtlich und deshalb nicht besonders erörtert worden ist): Es wird also die Theorie auf eine zu schmale Basis gestellt. Sodann wird bei Anknüpfung der Theorie unserer Abbildung an den Maassbegriff nicht von vornherein deutlich, dass es sich um Eigenschaften handelt, die zur *allgemeinen* projectiven Gruppe in der Ebene gehören. Hier wie in so manchem anderen Falle wird eine wirkliche Vereinfachung nicht bewirkt durch den anscheinend elementareren Ausgangspunkt, da man dann eine Reihe von Dingen betrachten muss, die mit der Sache selbst nicht nothwendig in Verbindung gesetzt werden müssen.

Erwähnt sei noch die nach dem Vorhergehenden evidente Thatsache, dass die projective absolute Invariante zweier Elemente 2. O. desselben trivialen Vereins als Quotient zweier Krümmungen gedeutet werden kann; und dass insbesondere conjugirte Elemente entgegengesetzt gleiche Krümmungen haben.[1])

§ 14.

Zusammenhang zwischen den projectiven und den elementaren Coordinaten der Elemente 2. Ordnung.

Die vorgenommenen Ergänzungen der zunächst nur für eine Umgebung eines Elementes allgemeiner Lage definirten Element-

1) Dass der Quotient aus den Krümmungen zweier einander berührender ebener Curven eine absolute Invariante der allgemeinen projectiven Gruppe ist, hat, für den Fall Euklidischer Maassbestimmung, Herr R. Mehmke bemerkt.

mannigfaltigkeit zu „natürlichen" Continuis bilden nur einige — wiewohl anscheinend die einfachsten — unter unendlich vielen möglichen. Andere Gruppen können an Stelle der Collineationen gesetzt werden, und man wird beim Uebergang von einer Art der Ergänzung zu anderen kaum ein anderes allgemein anwendbares Mittel haben, als dass man von jeder Art von Elementcoordinaten den Uebergang zu den elementaren (x, y, y', y'') bewirkt. Ausserdem sind diese, ungeachtet der ihnen anhaftenden bekannten Mängel, sowohl in der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen als auch bei vielen speciellen Problemen schlechterdings nicht zu entbehren. Wir führen aus diesen Gründen noch die Formeln an, die sich aus den zuvor entwickelten ergeben, wenn man durch die Substitutionen

$$(69)\qquad \frac{X_2}{X_1} = x, \quad \frac{X_3}{X_1} = y$$

zu Cartesischen Coordinaten übergeht.

Lassen wir zunächst noch den Parameter t beliebig, und setzen wir zur Abkürzung

$$(70)\qquad \Delta = x'y'' - y'x'',$$

so erhalten wir an Stelle von (8*) die folgenden Ausdrücke für die projectiven Coordinaten des Elementes 2. O., das zum Punkte t einer Curve $x = x(t)$, $y = y(t)$ gehört:

$$(71)\qquad \begin{aligned} &X_1 = \Delta^{-\frac{1}{3}}, \quad X_2 = \Delta^{-\frac{1}{3}} \cdot x, \quad X_3 = \Delta^{-\frac{1}{3}} \cdot y, \\ &U_1 = \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot (xy' - yx'), \quad U_2 = \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot -y', \quad U_3 = \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot x'. \end{aligned}$$

Setzen wir überdies $t = x$, so ergeben sich, nach Multiplication aller dieser Ausdrücke mit $\Delta^{\frac{2}{3}} = y''^{\frac{2}{3}}$, die noch einfacheren Formeln

$$(72)\qquad \begin{aligned} &X_1 = \sqrt[3]{y''}, \quad X_2 = \sqrt[3]{y''} \cdot x, \quad X_3 = \sqrt[3]{y''} \cdot y \\ &U_1 = xy' - y, \quad U_2 = -y', \quad U_3 = 1. \end{aligned}$$

Sind die eingeführten Cartesischen Coordinaten insbesondere rechtwinklig, so geht der Ausdruck für die Krümmung K in der Euklidischen Ebene über in den elementaren:

$$K = \left\{ \frac{\sqrt[3]{y''}}{\sqrt{1 + y'^2}} \right\}^3.$$

Man kann also, in gewissem Umfange, auch die Grössen x, y, y', $\sqrt[3]{y''}$ (oder $\sqrt[3]{K}$ an Stelle von $\sqrt[3]{y''}$) als Coordinaten eines orientierten Elementes 2. O. ansehen. Aber diese Coordinaten haben ausser anderen auch noch den Mangel, dass sich die orientirten linearen Transformationen durch sie nicht übersichtlich darstellen lassen.

Mit Hülfe der Gleichungen (72) kann man in eine vorgelegte algebraische Differentialgleichung

$$f\left(x,\ y,\ y',\ \sqrt[3]{y''}\right) = 0$$

zunächst die homogenen Coordinaten $X_i : U_i$ einführen, dann, nach den aus der Theorie der ternären Formen bekannten Regeln, die zugehörige Normalform herstellen, und so die Vielgestaltigkeit der zunächst gefundenen Gleichung beseitigen. Eine singuläre Stellung nimmt dem gegenüber nur die Gleichung $y'' = 0$ ein.

Für die absolute Invariante zweier Elemente 2. O. findet sich bei Gebrauch elementarer Coordinaten ein Ausdruck, der kaum eine geeignete Grundlage abgeben dürfte für die Schlussfolgerungen, die wir an diesen Begriff geknüpft haben:

$$-\left\{\frac{(x_2 - x_1)y_1' - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)y_2' - (y_2 - y_1)}\right\}^3 \cdot \frac{y_2''}{y_1''}$$

§ 15.

Beispiele.

Wir schliessen mit einigen Anwendungen.

Es sei vorgelegt eine irreducibele Fläche 2. Grades, die den Hauptpunkt o zum Mittelpunkt hat. Die Geraden des Tangentencomplexes dieser Fläche sollen zu integrirenden Regelflächen angeordnet werden durch Lösung des entsprechenden Problems der ebenen Geometrie.

Die Fläche sei zunächst reell und nicht geradlinig. Wir können dann ihre Gleichung in Punktcoordinaten in der Gestalt

$$(73) \qquad J^{\frac{1}{3}}(\omega z)^2 - K^{\frac{2}{3}}(lz)^2 = 0$$

schreiben, indem wir unter $(lz)^2$ eine wesentlich-positive quadratische Form der Veränderlichen z_1, z_2, z_3, unter J deren Invariante,

unter $K^{\frac{2}{3}}$ irgend eine positive Zahl ($\neq 0$) und unter (ωz) wie früher die lineare Form z_0 verstehen.[1])

Die Gleichung des zugehörigen Tangentencomplexes ist

$$(74) \qquad J^{\frac{1}{3}} \cdot (LX)^2 - K^{\frac{2}{3}}(UA)^2 = 0,$$

wo $L_i L_k = l_i l_k$ und $(UA)^2 = \frac{1}{2}(LL'U)^2$.

Vergleichen wir diese Formel mit der Nr. (66), so erkennen wir, *dass die gesuchten Regelflächen vom zweiten Grade und Bilder von Kegelschnitten in der Ebene sind;* nämlich Bilder von Kreisen von der Krümmung $\pm K$ in Bezug auf die zum Kegelschnitt $(lz)^2 = 0$ oder $(LZ)^2 = 0$ gehörige Nicht-Euklidische Maassbestimmung. Die reellen Integralcurven der Gleichung (74) insbesondere, die wir nach § 5 und § 9 als eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung auffassen können, sind sämmtlich enthalten in der Form

$$(75) \quad \begin{cases} (1+K)^2\{(LY)(LZ)\}^2 - K^2\cdot(LY)^2\cdot(LZ)^2 = 0, \\ (1+K^2)\cdot J\cdot(WY)^2 - (LY)^2\cdot(WA)^2 = 0, \end{cases}$$

wo Y einen beliebigen reellen Punkt bedeutet.

Durch jedes reelle Linienelement gehen zwei Integralcurven der Gleichung (74), deren Elemente 2. O. im Berührungspunkt conjugirt, also entgegengesetzt gekrümmt sind.

Lassen wir jetzt die über die Realität des Complexes (74) gemachten Voraussetzungen fallen, oder betrachten wir auch bei reellem Complex imaginäre Lösungen, so sind diese nur noch „im Allgemeinen" unter der Form (75) darstellbar.

Sei zunächst $K^2 + 1 \neq 0$, so kommen (im Continuum C) zu den Lösungen (75) noch ∞^1 *triviale Lösungen* hinzu, nämlich die ∞^1 trivialen Vereine, deren Linienelemente dem Kegelschnitt $(LZ)^2 = 0$ angehören; und ausserdem noch zwei Schaaren von

---

1) Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (73) mit $(az)^2$ so wird die Covariante $(w\alpha)^2 = \frac{1}{6}(aa'a''w)^2$ dieser quaternären Form gegeben durch den Ausdruck

$$(w\alpha)^2 = -K^{\frac{4}{3}} J^{\frac{1}{3}}\left\{K^{\frac{2}{3}} J^{\frac{2}{3}}(wo)^2 - (w\lambda)^2\right\},$$

$$[(w\alpha)^2 = \tfrac{1}{2}(ll'w)^2],$$

und ihre Invariante ist

$$D = (ao)^2 \cdot (\omega\alpha)^2 = -K^2 \cdot J^{\frac{4}{3}}$$

(unter den gemachten Voraussetzungen eine negative Grösse).

je ∞^1 *ausgezeichneten* Lösungen, nämlich alle geraden Vereine, deren Gerade U dem Kegelschnitt $(UA)^2 = 0$ angehört, und alle Punktvereine, deren Punkt X demselben Kegelschnitt $(LX)^2 = 0$ angehört. Diese Lösungen sind wie die übrigen *regulär*. Wenn also der Punkt Y auf den Kegelschnitt rückt, so erhält man an Stelle der Lösung (75) *drei* verschiedene specielle Lösungen, die den genannten drei Schaaren angehören; und erst wenn man diese reducibelen Lösungen den unter der Form (75) darstellbaren hinzufügt, entsteht ein im Continuum C verlaufendes *abgeschlossenes Continuum*, das *sämmtliche* Lösungen umfasst.

Ist dagegen $K^2 + 1 = 0$, so wird die Lösungsform (75) illusorisch. An ihre Stellen tritt die andere

$$(76) \qquad \lambda(LZ)^2 + \mu\{(LY)(LZ)\}^2 = 0,$$

wo nunmehr $(LY)^2 = 0$, und $\lambda : \mu$ ein Paar binärer Parameter sind. Die krummen Integralvereine der allgemeinen Lösung sind jetzt die *Grenzkreise* der Nicht-Euklidischen Geometrie, die den Kegelschnitt $(LZ)^2 = 0$ vierpunktig berührenden Kegelschnitte, die eben durch die Gleichung (76) dargestellt werden. Dazu kommen, als ebenfalls reguläre Lösungen, die auch im allgemeinen Falle vorhandenen ∞^1 trivialen und $2 . \infty^1$ ausgezeichneten Vereine. Es tritt aber überdies jetzt eine einzelne *singuläre Lösung* auf, nämlich der Kegelschnitt $(LZ)^2 = 0$ selbst. Und diese Lösung gehört zu denen, die auch, im weiteren Sinne, regulär genannt werden können: Alle irreducibelen und reducibelen Lösungen bilden deshalb zusammengefasst auch in diesem Falle ein abgeschlossenes Continuum.

Auf ähnliche Art lässt sich der Secantencomplex eines (irreducibelen) Kegelschnittes behandeln, der in einer Ebene durch den Hauptpunkt liegt, und die Spiegelung an Hauptpunkt und Hauptebene zulässt. Das entsprechende Integrationsproblem der ebenen Geometrie hat zu regulären Lösungen Kreise von constantem Radius bei *Euklidischer* Maassbestimmung. —

Unter allen Gattungen algebraischer Differentialgleichungen 2. O. ist, nach Ausschluss der trivialen und der ausgezeichneten, die *einfachste* die, die durch die Zerlegungen $1 = 1 + 0$, $1 = 0 + 1$ definirt wird (S. 365). Wir stellen daher jetzt die Aufgabe:

Es sollen die Geraden eines beliebigen linearen Liniencomplexes oder Gewindes durch Integration des zugeordneten Problems der ebenen Geometrie zu integrirenden Regelflächen angeordnet werden.

Wir wollen auch hier auf reelle Figuren besondere Rücksicht nehmen, und wollen daher zunächst voraussetzen, dass die beiden in der linearen Gleichung

$$(AX) + (UP) = 0 \tag{77}$$

auftretenden linearen Formen reell seien.

Ueberdies wollen wir zunächst annehmen, dass die Invariante (AP) des Complexes (von deren Vorzeichen das „Links"- oder „Rechts"-Gewundensein des Complexes abhängt) einen *positiven* Werth habe.

Man ermittelt nun durch eine geometrische Ueberlegung unschwer die allgemeine Lösung der Gleichung (77) ihrem Charakter nach, und ebenso findet man sie durch Rechnung. Wir begnügen uns daher mit einer Verification.

Zunächst kann man ohne Beschränkung annehmen, dass $(AP) = 1$ ist. Sind dann zwei Punkte Q, R auf der Geraden A nach Belieben, aber mit solchen Coordinaten angenommen, dass (PQR) ebenfalls $= 1$ wird, so kann man

$$\begin{gathered} A = \widehat{QR}, \quad B = \widehat{RP}, \quad C = \widehat{PQ}, \\ P = \widehat{BC}, \quad Q = \widehat{CA}, \quad R = \widehat{AB} \end{gathered} \tag{78}$$

setzen. Die allgemeine Lösung der Gleichung (77), und damit jeder krumme Integralverein, wird nun in Punkt- und Liniencoordinaten dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} 2(BX)(CX) - (AX)^2 = 0, \\ 2(UQ)(UR) - (UP)^2 = 0. \end{gathered} \tag{79}$$

In der That ist jede der beiden quadratischen Formen links die Covariante zweiten Grades der anderen, und die Invariante von jeder hat den numerischen Werth Eins. Liegt daher der Punkt X auf dem Kegelschnitt (79), so erhält das diesem angehörende Element 2. O. die Coordinaten

$$X_k : U_k = X_k : (BX)C_k + (CX)B_k - (AX)A_k.$$

Diese genügen der Gleichung (77).

Die Lösung enthält die erforderlichen beiden Parameter in Gestalt der den Coordinaten von Q, R noch anhaftenden Willkür:

Die integrirenden Regelflächen eines (nicht ausgearteten) linearen Liniencomplexes sind vom zweiten Grade und Bilder von Kegel-

schnitten. In Bezug auf alle diese Kegelschnitte sind der Punkt P und die Gerade A (die durch Nullpunkt und Nullebene von Hauptebene und Hauptpunkt bestimmt werden) Pol und Polare, und sie werden unter einander vertauscht durch die dreigliedrige projective Gruppe (g_3, h_3), *die durch die Figur* (A, P) *bestimmt wird.*

Verlegt man die Gerade A in's Unendliche, so besteht diese Gruppe aus den eigentlich- und uneigentlich-flächentreuen Collineationen, die den dann in Endlichen gelegenen Punkt P in Ruhe lassen. Die reellen Kegelschnitte (79) sind sämmtlich *concentrische Hyperbeln*, mit Hauptaxen, deren Product, aufs Quadrat erhoben, einen constanten Werth ergiebt (der gleich der negativen Einheit gesetzt werden darf).

Durch ein Linienelement (Y, V), dessen Punkt nicht auf A liegt, und dessen Gerade nicht durch P geht, geht *eine* der Integralcurven, die unschwer ermittelt werden kann, hier aber nicht mehr abgeleitet werden soll.

Zu den Lösungen (79) kommen als specielle Lösungen hinzu: Die ∞^1 *trivialen Vereine*, die ihre Gerade durch P schicken und ihren Punkt auf A haben, die ∞^1 *geraden Vereine*, die ihre Gerade durch P schicken, und die ∞^1 *Punktvereine*, die ihren Punkt auf A haben. Alle diese Lösungen sind regulär: Die Kegelschnitte (79), die dieselbe Gerade B auf A berühren, haben dort nicht nur dreipunktige, sondern sogar vierpunktige Berührung. Je drei von den zuletzt genannten speciellen Lösungen können zusammen als Grenzfall einer irreducibelen Lösung der Form (79) angesehen werden, und auf diese Art angeschaut bildet der Inbegriff aller Lösungen ein *abgeschlossenes Continuum.*

Die zweite Annahme $(AP) < 0$ lässt sich durch eine imaginäre Transformation auf die erste zurückführen. An Stelle der Hyperbeln treten als reelle krumme Integralcurven *concentrische flächengleiche Ellipsen.*

Ist endlich $(AP) = 0$, ohne dass die Gleichung (77) trivial würde, so sagt diese Gleichung unmittelbar aus, dass das Element $(X : U)$ zu dem Element $(P : -A)$ sich in Kegelschnittlage befindet. Die krummen Integralcurven sind die ∞^2 dieses Element enthaltenden irreducibelen Kegelschnitte; also unter Umständen alle Parabeln, die aus einer unter ihnen durch die Schiebungen der Euklidischen Geometrie hervorgehen.

Die Schaaren von ∞^1 speciellen Lösungen verhalten sich insofern anders als im allgemeinen Falle, als die Schaar der

trivialen Lösungen in zwei getrennte Schaaren zerfallen ist, und zwei von den ausgezeichneten Lösungen zugleich *singulär* sind. Der gerade Verein A ist nämlich jetzt Enveloppe der ∞^1 trivialen Lösungen der einen Schaar, und der Punktverein P ebenso Enveloppe für die andere Schaar. —

Die behandelten Differentialgleichungen gehören sämmtlich zu denen, die wir *einzählig* genannt hatten. Will man zwischen den einander zugeordneten Figuren der Ebene und des Raumes ein vollkommen ein-eindeutiges Entsprechen haben, so muss man erstens den Orientirungsprocess vornehmen, und zweitens entweder das Continuum C durch das Continuum A ersetzen, oder statt des PLÜCKER'schen Liniencontinuums das Continuum benutzen, das dem Elementcontinuum C zugeordnet ist. (Vgl. S. 379). —

Die beiden im gegenwärtigen § behandelten speciellen Probleme, die einzigen, die auf (nicht-triviale oder ausgezeichnete) Differentialgleichungen 2. O. mit *einfacher* projectiver Gruppe führen, stehen in einem interessanten Zusammenhang, den wir anhangsweise kurz noch andeuten wollen. Die ∞^1 Differentialgleichungen von Kreisen constanter Krümmung, bei Nicht-Euklidischer Maassbestimmung, werden durch Beifügung von ausgezeichneten und trivialen Gleichungen leicht zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt; ebenso die ∞^1 Differentialgleichungen von concentrischen Kegelschnitten mit constantem Flächeninhalt. Die durch die Dilatationen zu einer viergliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen erweiterte Gruppe der Nicht-Euklidischen Bewegungen ist nun zur allgemeinen linearen homogenen Gruppe derart durch Berührungstransformationen ähnlich, dass die ∞^1 Differentialgleichungen der einen Schaar in die der anderen übergehen. Man kann durch projective Beziehung des absoluten Kegelschnittes auf die unendlich ferne Gerade eine Berührungstransformation construiren und analytisch ausdrücken, die die Ueberführung leistet. Man kann dabei noch eine beliebige nicht-triviale und nicht den Grenzkreisen entsprechende Gleichung der ersten Schaar einer beliebigen nicht-trivialen oder ausgezeichneten Gleichung der zweiten Schaar zuordnen.[1])

1) Dass die specielle lineare homogene Gruppe zur Gruppe der Nicht-Euklidischen Bewegungen durch Berührungstransformationen ähnlich ist, ist bekannt. Vgl. LIE u. ENGEL, Transformationsgruppen II, 312.

Nachtrag und Schlusswort.

In den vorausgehenden Entwickelungen hatten wir angenommen, dass die zu untersuchenden Curven in Parameterdarstellung gegeben vorliegen. Man kann aber auch leicht die Elemente 2. O. finden, die zu einer durch ihre *Gleichung* gegebenen Curve gehören. Sei die Curve zunächst algebraisch, $(AX)^n = 0$, und sei

$$(80)\qquad (HX)^{3n-6} = \frac{1}{6}(AA'A'')^2(AX)^{n-2}(A'X)^{n-2}(A''X)^{n-2}$$

die Hesse'sche Covariante der Form $(AX)^n$, so ist das einem der Hesse'schen Curve nicht mehrfach angehörenden Curvenpunkte X entsprechende Element 2. O. (im ersten Continuum):

$$(81)\qquad \left(\sqrt[3]{(n-1)(HX)^{3n-6}}\cdot X : (AX)^{n-1}A\right).$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Formel ist etwas enger als der der Nr. (8), da sie bereits bei einfachen Doppelpunkten illusorisch wird. In der Gestalt

$$(82)\qquad \left(\sqrt[3]{\frac{1}{(n-1)^2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_k}\right|}\cdot X : \frac{\partial f}{\partial X}\right)$$

erstreckt sich die Formel auch auf transcendente Curven, die durch analytische Gleichungen $f(X_1, X_2, X_3) = 0$ dargestellt sind, vorausgesetzt, dass der Grad n der homogenen Function f nicht gleich Eins ist, und dass die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ nicht vermöge $f = 0$ identisch verschwinden. Es ergeben sich daraus einfache Ausdrücke für die *Krümmung* einer ebenen Curve. Bei Euklidischer Maassbestimmung z. B. ist die Krümmung K einer ebenen Curve $n$ter O. $(AX)^n = 0$ gegeben durch

$$(83)\qquad K^{\frac{1}{3}} = \frac{(LX)\sqrt[3]{(n-1)(HX)^{3n-6}}}{\sqrt{(A|A')(AX)^{n-1}(A'X)^{n-1}}},$$

die Krümmung einer Curve $m$ter Classe $(UP)^m = 0$ durch

$$(84)\qquad K^{\frac{1}{3}} = \frac{(LP)(UP)^{m-1}}{\sqrt{U|U}\sqrt[3]{(n-1)(UH)^{3m-6}}},$$

wo nunmehr $(UH)^{3m-6}$ die Hesse'sche Covariante der Form $(UP)^m$ bedeutet.[1])

Eine besondere Erwähnung verdient wohl auch, dass man einen krummen Verein von Elementen 1. O. (X_t, U_t) nicht nur mit Hülfe

---

1) s. Gundelfinger und Dingeldey, Kegelschnitte, II, § 21.

der Formel (13), sondern auf einfachere Weise schon auf Grund des an die Gleichung (10) geknüpften Satzes zu einem Verein von Elementen 2. O. erweitern kann: Die fraglichen Elemente sind

$$(85) \qquad \left(\sqrt[3]{(UU'U'')}\cdot X : \sqrt[3]{(XX'X'')}\cdot U\right).$$

Eine der durchgeführten ähnliche Theorie lässt sich entwickeln für die Geometrie der Inversionen und für die Lie'sche Geometrie der Berührungstransformationen, die Kreise in Kreise oder — im Raume — Kugeln in ebensolche überführen. Durch die Ausdehnung der angestellten Ueberlegungen auf den Raum wird ein neues Licht geworfen auf den Satz Enneper's vom Zusammenhang zwischen der Krümmung einer Fläche und der Torsion ihrer asymptotischen Linien, sowie auf den Lie'schen Satz über die Torsion der Curven in einem linearen Liniencomplex. Diese Gegenstände sollen in einigen weiteren Arbeiten erörtert werden. Ein Theil der angestellten Betrachtungen lässt sich (auf mehrere Arten) auch auf eine unbestimmte Dimensionenzahl übertragen.

Inhalt.

Seite

Einleitung 338
§ 1. Ein erstes Continuum von Elementen 2. Ordnung 340
§ 2. Vereine von Elementen 2. O. im ersten Continuum 343
§ 3. Imprimitivität der Elemente 2. O. 350
§ 4. Die absolute Invariante zweier Elemente 2. O. 352
§ 5. Orientirte Elemente 2. O. Algebraische Complexe von Elementen 2. O. im ersten Continuum (A) 359
§ 6. Abbildung der eigentlichen Elemente 2. O. auf Punkte gewisser rationaler Mannigfaltigkeiten M_4 363
§ 7. Natürliche Continua A_1, B_1, B_2, C von Elementen 2. O. . . 365
§ 8. Complexe und Vereine im vierten Continuum (C) 368
§ 9. Begriff und Begriff der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. O. im vierten Continuum (C) . . . 371
§ 10. Beziehungen zwischen der projectiven Geometrie der Elemente 2. O. und der Plücker'schen Liniengeometrie . . . 376
§ 11. Fortsetzung: Die Bilder der Kegelschnitte 380
§ 12. Eine neue geometrische Deutung des Integrationsproblems einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. O. 385
§ 13. Krümmung und Krümmungskreis eines Elementes 2. O. in der ebenen oder sphärischen Maassgeometrie 387
§ 14. Zusammenhang zwischen den projectiven und den elementaren Coordinaten der Elemente 2. O. 394
§ 15. Beispiele. Nachtrag und Schlusswort 396

Druckfertig erklärt 2. VIII. 1901.]

Friedrich Engel: *Zur Flächentheorie. Erste Mittheilung.*[1])

Auf einer Fläche mit dem quadratischen Bogenelement:

$$(1)\qquad ds^2 = e dx^2 + 2 f dx dy + g dy^2$$

erhält man nach GAUSS zu jeder Curve eine geodätische Parallelcurve, wenn man durch jeden Punkt der Curve eine geodätische Linie von constanter Länge legt, die die Curve senkrecht schneidet, und die Endpunkte dieser geodätischen Linien durch eine Curve verbindet. Wählt man die constante Länge jener geodätischen Linien unendlich klein, so erhält man eine infinitesimale Berührungstransformation (Paralleltransformation), die man offenbar ohne Integration angeben kann, deren merkwürdige Eigenschaften aber anscheinend bisher noch gar nicht beachtet worden sind. Selbst LIE hat nur einmal gelegentlich auf das Vorhandensein dieser infinitesimalen Transformation hingewiesen, aber ohne sie aufzustellen, geschweige denn näher zu untersuchen. Man vgl. seinen Aufsatz: *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik*, diese Berichte 1889, S. 148.

Wir wollen zunächst die besprochene infinitesimale Transformation wirklich bilden, sodann ihre Eigenschaften entwickeln und endlich einige Folgerungen daraus ziehen.

§ 1.

Ist $F(x, y) = 0$ eine Curve, so soll jeder Punkt der Curve senkrecht zu dem Bogenelemente der Curve um die constante unendlich kleine Strecke δt verschoben werden. Für die Zuwachse δx und δy von x und y erhält man daher die Gleichungen:

$$e\delta x^2 + 2f\delta x\delta y + g\delta y^2 = \delta t^2$$

$$e dx\delta x + f(dx\delta y + dy\delta x) + g dy\delta y = 0,$$

1) Angekündigt in der Sitzung vom 1. Juli, das Manuscript eingereicht am 15. Juli.

oder wenn man setzt:

$$dF = pdx + qdy = 0,$$

die Werthe:

$$\delta x = \frac{gp - fq}{\sqrt{(eg - f^2)(eq^2 - 2fpq + gp^2)}}\,\delta t$$

$$\delta y = \frac{eq - fp}{\sqrt{(eg - f^2)(eq^2 - 2fpq + gp^2)}}\,\delta t.$$

Bei Anwendung der Bezeichnung:

(2) $$H = \sqrt{\frac{eq^2 - 2fpq + gp^2}{eg - f^2}}$$

ist daher:

(3) $$\delta x = \frac{\partial H}{\partial p}\delta t, \quad \delta y = \frac{\partial H}{\partial q}\delta t.$$

Die Zuwachse von p und q sind jetzt so zu bestimmen, dass $\delta(pdx + qdy) = 0$ wird, dann gehen je zwei unendlich benachbarte vereinigt liegende Linienelemente: x, y, p, q und $x + dx, \ldots, q + dq$ der Curve in zwei ebensolche Linienelemente über und also die ganze Curve als Linienelementgebilde betrachtet wieder in eine Curve. Hieraus ergiebt sich:

$$\delta p dx + \delta q dy + \left(pd\frac{\partial H}{\partial p} + qd\frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta t = 0$$

oder, wegen der Homogeneität von H:

(3′) $$\delta p = -\frac{\partial H}{\partial x}\delta t, \quad \delta q = -\frac{\partial H}{\partial y}\delta t.$$

Unsre infinitesimale Paralleltransformation erscheint daher als eine homogene Berührungstransformation im Sinne Lies und ihre charakteristische Function ist die Grösse H, also die Wurzel aus dem zur Form (1) gehörigen Beltramischen Differentialparameter[1]) erster Ordnung.

§ 2.

Die Gleichungen (3), (3′) zeigen unter anderem, dass der Punkt x, y jedes Linienelementes x, y, p, q bei der von unsrer infinitesimalen Transformation erzeugten eingliedrigen Gruppe eine

1) Bei dieser Gelegenheit möchte ich es einmal öffentlich aussprechen, dass mir die Bezeichnung „Differentialparameter" so unglücklich gewählt erscheint, wie nur möglich; man könnte dafür „Differentiator" sagen, doch wird man sich wohl bei der einmal üblichen Ausdrucksweise bescheiden müssen.

geodätische Linie beschreibt, dass also jede endliche Transformation dieser eingliedrigen Gruppe eine solche Paralleltransformation ist, wie sie schon GAUSS benutzt hat. Es folgt das ohne Weiteres daraus, dass die HAMILTONsche partielle Differentialgleichung, auf deren Integration die Bestimmung der geodätischen Linien hinauskommt, die Form $H = 1$ erhalten kann.

Viel merkwürdiger ist jedoch eine andere Eigenschaft unsrer Transformation, die sich durch eine einfache geometrische Betrachtung ergiebt. Sind nämlich A, B, C drei auf einander folgende Punkte einer Curve $F(x, y) = 0$ und führt man auf diese Curve die infinitesimale Paralleltransformation (3), (3') aus, so entsprechen den Punkten A, B zwei Punkte A', B' der transformirten Curve derart, dass $AA' = \delta t$ senkrecht zu AB und $BB' = \delta t$ senkrecht zu BC ist. Wir wollen uns dabei das Vorzeichen der Quadratwurzel in (2) so gewählt denken, dass A', B' nicht in die Höhlung der Curve ABC zu liegen kommen. Nun ist $AB = ds$ ein Bogenelement der ursprünglichen Curve, $A'B'$ das entsprechende Bogenelement der transformirten Curve, also $A'B' = ds + \delta ds$. Bestimmt man daher auf $A'B'$ den Punkt B'' so, dass $A'B'' = AB = ds$ wird, so ist $B''B' = \delta ds$. Ferner ist bis auf unendliche kleine Grössen höherer Ordnung $BB'' = AA' = BB' = \delta t$ und ausserdem BB'' senkrecht zu AB, so dass der Winkel $B''BB'$ gleich dem geodätischen Contingenzwinkel $d\tau$ der Curve ABC ist. Folglich ergiebt sich: $B''B' = \delta ds = d\tau \,.\, \delta t$.

Wir wollen jetzt diese Gleichung auf analytischem Wege beweisen und dann noch eine andere ähnliche für $\delta d\tau$ ableiten. Dabei denken wir uns aber vorher das Bogenelement auf die einfache Form:

$$(4) \qquad ds^2 = e^{w(x,y)} dx dy$$

gebracht, was offenbar die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt. Unsre infinitesimale Paralleltransformation ist ja in einer Weise definirt, die von dem auf der Fläche benutzten Coordinatensystem unabhängig ist; die Ausdrücke δds und $\delta d\tau$ sind daher auch vom Coordinatensystem unabhängig und verhalten sich somit auch bei allen Biegungen als Invarianten.

Es ist zur Erleichterung des Verständnisses vielleicht das Beste, wenn ich unsre infinitesimale Paralleltransformation für das Bogenelement (4) noch einmal direct ableite und überdies

statt der homogenen Grössen p, q, die manchem ungewohnt sind, die durch $dy - y'dx = 0$ definirte Grösse y' zur Bestimmung der Linienelemente auf der Fläche benutze. Unsre infinitesimale Transformation, die den Punkt des Linienelementes x, y, y' senkrecht zu dem Linienelemente um die Strecke δt verschiebt, ist dann durch die Gleichungen:

$$e^w \delta x \delta y = \delta t^2, \quad dx\delta y + dy\delta x = 0$$

bestimmt, aus denen folgt: $\delta y = - y'\delta x$ und somit:

$$\delta x = \frac{ie^{-\frac{1}{2}w}}{\sqrt{y'}}\delta t, \quad \delta y = - ie^{-\frac{1}{2}w}\sqrt{y'}\delta t. \tag{5}$$

Hieraus endlich erhält man wegen:

$$\delta y' = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\delta y - y'\frac{d}{dx}\delta x = \frac{d}{dx}(\delta y - y'\delta x) + y''\delta x$$

für $\delta y'$ den Werth:

$$\delta y' = i(w_x + y'w_y)e^{-\frac{1}{2}w}\sqrt{y'}\delta t. \tag{5'}$$

Dass dieser Ausdruck von y'' frei ist, zeigt eben, dass man es wirklich mit einer infinitesimalen Berührungstransformation im Sinne LIES zu thun hat.

Nun ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\delta ds}{\delta t} &= \frac{\delta}{\delta t}(e^{\frac{1}{2}w}\sqrt{y'}dx) \\ &= \frac{i}{2}\sqrt{y'}dx\left\{\frac{w_x}{\sqrt{y'}} - w_y\sqrt{y'}\right\} + \\ &+ \frac{i}{2}(w_x + y'w_y)dx - \\ &- \frac{i}{2}\sqrt{y'}\left\{(w_x + y'w_y)\frac{1}{\sqrt{y'}} + \frac{y''}{y'^{3/2}}\right\}dx,\end{aligned}$$

oder:

$$\delta ds = -\frac{i}{2y'}(y'' - y'w_x + y'^2 w_y)dx \,.\, \delta t. \tag{6}$$

Da aber der Ausdruck:

$$\frac{\delta ds}{ds\,.\,\delta t} = -\tfrac{1}{2}i\frac{y'' - y'w_x + y'^2 w_y}{y'^{3/2}e^{\frac{1}{2}w}}$$

nichts anderes ist als die geodätische Krümmung für das Bogenelement (4), so können wir die Gleichung (6) auch schreiben:

$$\delta ds = d\tau \,.\, \delta t, \tag{7}$$

wo $d\tau$ den geodätischen Contingenzwinkel bezeichnet. Nach dem früher Gesagten ist klar, dass hier $d\tau$ negativ ausfällt, wenn die infinitesimale Paralleltransformation nach der Seite gerichtet ist, der die Curve ihre Höhlung zukehrt.

Um jetzt $\delta d\tau$ zu finden, müssen wir zunächst

$$\delta y'' = \frac{d}{dx}\delta y' - y''\frac{d}{dx}\delta x = \frac{d}{dx}(\delta y' - y''\delta x) + y'''\delta x$$
$$= \frac{d^2}{dx^2}(\delta y - y'\delta x) + y'''\delta x$$

berechnen. Das ergiebt:

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = i(w_{xx} + 2y'w_{xy} + y'^2 w_{yy})e^{-\frac{1}{2}w}\sqrt{y'} - \frac{i}{2}(w_x + y'w_y)^2 e^{-\frac{1}{2}w}\sqrt{y'} + i(w_x + 2y'w_y)e^{-\frac{1}{2}w}\frac{y''}{\sqrt{y'}} + \frac{i}{2}e^{-\frac{1}{2}w}\frac{y''^2}{y'^{3/2}}.$$

Ferner wird:

$$\frac{\delta}{\delta t}(y'w_x - y'^2 w_y) = i(w_x - 2y'w_y)(w_x + y'w_y)e^{-\frac{1}{2}w}\sqrt{y'} + ie^{-\frac{1}{2}w}y'\left(\frac{w_{xx}}{\sqrt{y'}} - \sqrt{y'}w_{xy}\right) - ie^{-\frac{1}{2}w}y'^2\left(\frac{w_{xy}}{\sqrt{y'}} - \sqrt{y'}w_{yy}\right).$$

Setzt man daher:

$$y'' - y'w_x + y'^2 w_y = h,$$

so kommt:

$$\frac{\delta h}{\delta t} = 4iy'^{3/2}w_{xy}e^{-\frac{1}{2}w} - \frac{3i}{2}(w_x^2 - y'^2 w_y^2)e^{-\frac{1}{2}w}\sqrt{y'} + i(w_x + 2y'w_y)e^{-\frac{1}{2}w}\frac{y''}{\sqrt{y'}} + \frac{i}{2}e^{-\frac{1}{2}w}\frac{y''^2}{y'^{3/2}}$$

oder

$$\frac{\delta h}{\delta t} = \frac{i}{2}e^{-\frac{1}{2}w}\frac{h^2}{y'^{3/2}} + i(2w_x + y'w_y)e^{-\frac{1}{2}w}\frac{h}{\sqrt{y'}} + 4iy'^{3/2}w_{xy}e^{-\frac{1}{2}w}.$$

Aber es ist:

$$d\tau = -\frac{ih}{2}\cdot\frac{dx}{y'}$$

und

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx}{y'}\right) = -\frac{3i}{2}(w_x + y'w_y)e^{-\frac{1}{2}w}\frac{dx}{y'^{3/2}} - \frac{i}{2}e^{-\frac{1}{2}w}\frac{y''dx}{y'^{5/2}}$$
$$= -\frac{i}{2}e^{-\frac{1}{2}w}\frac{h\,dx}{y'^{5/2}} - i(2w_x + y'w_y)e^{-\frac{1}{2}w}\frac{dx}{y'^{3/2}},$$

demnach:

$$\frac{\delta d\tau}{\delta t} = 2\sqrt{y'}\, w_{xy} e^{-\frac{1}{2}w} dx$$

$$= \frac{2w_{xy}}{e^w} ds,$$

oder, da das Gaussische Krümmungsmaass des Bogenelementes (4) den Werth:

$$k = -\frac{2w_{xy}}{e^w}$$

besitzt,

(8) $$\delta d\tau = -k \,.\, ds \,.\, \delta t.$$

Die Formeln (7′) und (8), besonders aber die zweite, die man auch schreiben kann:

(8′) $$\frac{\delta(\delta ds)}{\delta t^2} = -k \,.\, ds,$$

scheinen mir sehr beachtenswerth, denn sie zeigen, dass die beiden fundamentalen Begriffe der Flächentheorie, die geodätische Krümmung und das Gaussische Krümmungsmaass aus dem Bogenelement durch einen äusserst einfachen invarianten Process, eben unsre infinitesimale Paralleltransformation, hervorgehen.

Bezeichnet man die geodätische Krümmung $d\tau : ds$ mit g, so erhält man aus (7) und (8)

(9) $$\frac{\delta g}{\delta t} = -g^2 - k$$

eine Formel, die auf Liouville zurückgeht, vgl. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Fratelli Drucker, Verona-Padova 1898, S. 190 f. Aus (9) und (7) oder:

(7′) $$\delta ds = g \,.\, ds \,.\, \delta t$$

folgt wieder (8), aber da die einfache Formel (7) der Aufmerksamkeit der Mathematiker entgangen zu sein scheint, so hat man jedenfalls auch (8) bisher noch nicht bemerkt.

Ausdrücklich erwähnt sei noch, dass die Zweideutigkeit der Quadratwurzel, die in den Gleichungen unsrer infinitesimalen Paralleltransformation auftritt, sich zwar bei der Formel (7) für den Contingenzwinkel fühlbar macht, auf die Formel (8) oder (8′) aber keinen Einfluss mehr hat.

§ 3.

Es liegt auf der Hand, dass auch zu jedem quadratischen Bogenelemente:

$$(10)\qquad ds^2 = \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik}(x_1, x_2, x_3) dx_i dx_k$$

des R_3 eine infinitesimale Paralleltransformation des Raumes gehört, bei der der Punkt jedes Flächenelementes senkrecht zu dem Elemente um eine unendlich kleine constante Strecke δt verschoben wird. Bei der eingliedrigen Gruppe, die von dieser infinitesimalen Transformation erzeugt wird, beschreibt der Punkt jedes Flächenelementes eine geodätische Linie, zu der das Flächenelement stets senkrecht bleibt. Denken wir uns daher die betreffende eingliedrige Gruppe auf alle die Flächenelemente einer Fläche F ausgeführt, deren Punkte einer auf F liegenden Curve C angehören, so erhalten wir ∞^2 Flächenelemente, deren Punkte auf ∞^1 geodätischen Curven liegen, die durch die Punkte von C gehen und F senkrecht treffen. Diese ∞^1 geodätischen Curven bilden eine Fläche G, auf der jede der ∞^1 durch unsre eingliedrige Gruppe erzeugten Parallelflächen zu F eine Parallelcurve zu C ausschneidet. Demnach bestimmt unsre infinitesimale Paralleltransformation des R_3 auf der Fläche G eine infinitesimale Paralleltransformation der Linienelemente der Curve C und ihrer Parallelcurven und es ist klar, dass diese Paralleltransformation die betreffenden Linienelemente genau so transformirt, wie die Paralleltransformation, die man nach § 1 auf G erhält, wenn man vermöge der Gleichung von G das Bogenelement (10) durch zwei Veränderliche ausdrückt.

Hieraus ergiebt sich Folgendes: Bezeichnet man mit $\delta\varphi$ den Zuwachs, den irgend ein Ausdruck φ bei der durch (10) bestimmten infinitesimalen Paralleltransformation erhält, und berechnet man aus (10) das Bogenelement ds, das die auf der Fläche F liegende Curve C in irgend einem ihrer Punkte, etwa in P hat, so ist $\delta ds : \delta t$ der zu P gehörige Contingenzwinkel der Curve C, wenn diese als Curve auf der Fläche G betrachtet wird, und $\delta\delta ds : ds \,.\, \delta t^2$ ist das negativ genommene GAUSSische Krümmungsmaass der Fläche G in dem Punkte P.

Diese allgemeinen Betrachtungen will ich jetzt zunächst auf den Euklidischen Raum anwenden.

§ 4.

Ist $f(x, y, z) = 0$ irgend eine Fläche F im Euklidischen Raume und setzt man:

$$df = udx + vdy + wdz,$$

so ist das Flächenelement der Fläche im Punkte x, y, z bestimmt durch x, y, z und die Verhältnissgrössen u, v, w und für die unendlich benachbarten Punkte der Fläche ist: $\Sigma udx = 0$. Unsre infinitesimale Paralleltransformation verschiebt den Punkt x, y, z senkrecht zu dem Elemente um die Strecke δt, also muss werden:

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \delta t^2$$

$$\delta x : \delta y : \delta z = u : v : w,$$

das heisst:

$$(11) \qquad \delta x = -\frac{u\delta t}{\sqrt{\Sigma u^2}}, \quad \delta y = -\frac{v\delta t}{\sqrt{\Sigma u^2}}, \quad \delta z = -\frac{w\delta t}{\sqrt{\Sigma u^2}},$$

wo das Minuszeichen gewählt ist, um nachher die Formel für den Contingenzwinkel mit dem üblichen Vorzeichen zu erhalten. Verlangt man jetzt noch: $\delta(\Sigma udx) = 0$, so ergiebt sich:

$$(11') \qquad \delta u = 0, \quad \delta v = 0, \quad \delta w = 0.$$

Diese Formeln sind übrigens längst von Lie angegeben, vgl. die auf S. 404 angeführte Note.

Aus dem Ausdrucke für das Bogenelement:

$$(12) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ergiebt sich nunmehr:

$$(13) \qquad \frac{\delta ds}{\delta t} = -\frac{\Sigma dx du}{ds\sqrt{\Sigma u^2}}$$

und das ist nach § 3, wenn man die darin vorkommenden Grössen für irgend eine Curve C auf F berechnet, der zum Punkte x, y, z gehörige geodätische Contingenzwinkel von C auf der geradlinigen Fläche G, die von den längs C gezogenen Normalen der Fläche F gebildet wird. Ist C' der durch x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ gelegte ebene Normalschnitt von F, so stellt (13) bekanntlich den Contingenzwinkel von C' in der Ebene dieses Normalschnitts dar, also ist der geodätische Contingenzwinkel von C auf der zugehörigen geradlinigen Fläche G identisch mit dem Contingenzwinkel des C in x, y, z berührenden Normalschnitts.

Weiter findet man:

$$\frac{\delta\delta ds}{ds\,.\,\delta t^2} = \frac{\Sigma(udv - vdu)^2}{ds^2(\Sigma u^2)^2} - \left(\frac{\Sigma dxdu}{ds^2\sqrt{\Sigma u^2}}\right)^2.$$

Setzt man: $p = -u:w$, $q = -v:w$, so ergiebt sich:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\Sigma(udv - vdu)^2}{ds^2(\Sigma u^2)^2} = \dfrac{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}{ds^2(1 + p^2 + q^2)^2} \\ \qquad = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)\dfrac{dpdx + dqdy}{ds^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \dfrac{1}{R_1 R_2} \end{cases}$$

und:

$$\frac{dpdx + dqdy}{ds^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = -\frac{\Sigma dxdu}{ds^2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

wo R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien von F sind. Bezeichnet man daher die Krümmung des die Curve C in x, y, z berührenden Normalschnitts mit k_n, so wird:

$$(13')\qquad \frac{\delta ds}{ds\,.\,\delta t} = k_n$$

$$(15)\qquad \frac{\delta\delta ds}{ds\,.\,\delta t^2} = -\left(k_n - \frac{1}{R_1}\right)\left(k_n - \frac{1}{R_2}\right).$$

Hier stellt der Ausdruck (15) nach § 3 im Punkte x, y, z das negativ genommene GAUSSische Krümmungsmaass der geradlinigen Fläche G dar, die von den längs C errichteten Normalen der Fläche F gebildet wird.

In einer bald folgenden Mittheilung sollen die allgemeinen Betrachtungen des § 3 auf den R_3 mit beliebiger projectiver Maassbestimmung angewendet werden. Ich erhalte dabei durch Benutzung der symbolischen Methode der Invariantentheorie ungemein einfache Ausdrücke für das Product und für die Summe der Hauptkrümmungen einer Fläche. Es sind das dieselben Ausdrücke, die man bekommt, wenn man gewisse von mir gefundene Coordinaten für die Elemente zweiter Ordnung des Raumes anwendet. Ueber diese Coordinaten, die die lange von mir gesuchte, wirklich praktisch brauchbare Ausdehnung der CLEBSCHischen Connex-Coordinaten auf die Elemente zweiter Ordnung des Raumes liefern (vgl. diese Ber. 1893, S. 468 ff.), gedenke ich bei einer andern Gelegenheit ausführliche Mittheilungen zu machen.

Druckfertig erklärt 30. VII. 1901.]

W. His: *Ueber wissenschaftliche Centralanstalten und speciell über Centralanstalten zur Förderung der Gehirnkenntniss.* Erläuterungen zu handen der von der internationalen Association der Akademien in Paris auf Antrag der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. beschlossenen Commission. Mit einem Anhange: *Ueber wissenschaftliche Stiftungen.*

Einleitung.

Bei der vom 16. bis 20. April in Paris tagenden internationalen Association der Akademien hatte die Kön. sächs. Ges. d. Wissenschaften folgenden Antrag eingereicht[1]: „*Die internationale Association der Akademien möge eine Fachcommission aufstellen zur Berathung der Mittel und Wege, wie auf den Gebieten, einestheils der menschlichen und thierischen Entwicklungsgeschichte, anderntheils der Hirnanatomie eine nach einheitlichen Grundsätzen erfolgende Sammlung, Verarbeitung und allgemeine Nutzbarmachung von sicherem Beobachtungsmaterial erreicht werden kann.*" Im Verlauf der Discussion dieses Antrages hat es sich als wünschbar herausgestellt, die in demselben gestellten Aufgaben zu theilen und nur die auf Gehirnforschung bezüglichen als international zu behandelnde beizubehalten. Der von der Association gefasste Beschluss lautet nunmehr:

1) *Die Berathung der auf menschliche und thierische Entwicklungsgeschichte bezüglichen Abschnitte des Antrages ist vorerst den betreffenden Fachvereinen (den anatomischen Gesellschaften) zu überlassen.*

2) *Dagegen setzt die internationale Association der Akademien eine Specialcommission nieder, die eine nach einheitlichen Grundsätzen erfolgende Durchforschung, Sammlung und allgemeine Nutzbarmachung des auf Gehirnanatomie bezüglichen Materiales zu be-*

---

1) s. Berichte der k. s. Ges. d. Wissensch. math. phys. Klasse. Bd. 53. — Sitzg. vom 4. März 1901.

rathen hat. Die Commission hat insbesondere die Schaffung besonderer Centralinstitute in Erwägung zu ziehen, in denen die Methoden der Forschung entwickelt, das vorhandene Beobachtungsmaterial aufgespeichert und der allgemeinen Benutzung der dabei interessirten Gelehrten zugänglich gemacht wird.[1])

Die Ernennung der Seitens der Association der Akademien geplanten Commission steht noch bevor. Dagegen hat mittlerweile die anatomische Gesellschaft bei ihrer Zusammenkunft in Bonn eine aus den Herren Waldeyer, Rabl, Keibel und His bestehende Commission niedergesetzt mit dem Auftrag, *„sich über die Grundsätze erspriesslichen Zusammenarbeitens auf dem Gebiet entwickelungsgeschichtlicher Forschung zu einigen."* Diese Commission hat das Recht der Cooptation.[2])

Die nachfolgenden Auseinandersetzungen haben den Zweck zur Klärung der den beiden Commissionen gestellten Aufgaben beizutragen, und ich lasse zunächst, bevor ich in Einzelnes eintrete, einige allgemeine Erwägungen vorausgehen.

Universitätsanstalten und Centralanstalten.

Eine grosse Zahl unserer zur Zeit bestehenden wissenschaftlichen Anstalten sind Universitäts- d. h. Lehranstalten. Ihre Vorsteher sind Lehrer, die Sammlungen an Instrumenten, Präparaten u. s. w. Mittel zum Lehrzweck, und diesem Zweck hat sich Alles unterzuordnen. Diese besondere Natur der Anstalten bringt in ihre Führung ein ausgesprochenes Princip der Discontinuität, indem die Persönlichkeit des Vorstehers dabei völlig in dem Vordergrund steht. Ein jeder Lehrer vertritt eine bestimmte Richtung, und er wird sein Unterrichtsmaterial nach der Richtung hin möglichst auszubilden und zu vervollständigen suchen. Erfolgt

---

1) Association internationale des Académies. Première assemblée générale. Compte rendu. Paris, Gauthier-Villars 1901. S. 46.

l'Association nommera une commission spéciale ayant la mission de discuter les moyens de faire avancer les études en commun sur l'anatomie du cerveau.

Elle engagera cette commission à discuter la formation d'un système international d'établissements qui soient destinés à développer les méthodes de recherches, à rassembler d'après des principes uniformes le matériel d'observation et à mettre ce dernier à la portée des savants qui pourraient en avoir besoin.

2) Anat. Anzeiger 1901. Bd. XIX. Nr. 16. S. 416.

mit dem Wechsel des Lehrers ein Wechsel der Richtung, so kann es leicht kommen, daſs der Character der Anstalt binnen kurzem ein ganz anderer wird. Früher gesammeltes Material wird beiseite gethan, anderes tritt an dessen Stelle. Dabei kann es kommen, daſs Sammlungen, zu deren Schaffung ganze Lebensarbeiten aufgewendet wordem waren, ihrem ursprünglichen Zweck entfremdet werden oder zu Grunde gehen.[1])

Beispiele hierfür würden sich wohl aus den verschiedensten Universitätsinstituten beibringen lassen. Es bedarf eben nur kurzer Perioden der Unachtsamkeit, um die Ergebnisse jahrzehnte langer Bemühungen in Zerfall gerathen zu lassen. Dabei ist in der Regel auch Niemanden ein besonderer Vorwurf zu machen. Wer eine Sammlung angelegt hat, hat ein Herz dafür, er kennt die Geschichte jedes Stückes, dessen Eigenthümlichkeiten und besondere Verwerthbarkeit beim Unterricht. Der Nachfolger weiss von dem Allen nichts. Unbekannt mit der Geschichte der einzelnen Stücke und deren besonderen Tugenden opfert er sie vielleicht harmlos anderen nützlichen Zwecken oder überlässt sie der Fürsorge von uncontrollirten Unterbeamten. Auch ist zu bemerken, dass gewisse Arten von Sammlungen, wie z. B. Sammlungen mikroscopischer Präparate, fast nur in den Händen dessen Werth haben, der sie geschaffen und sich in deren gesammtes Detail eingearbeitet hat. Die Geheimnisse einer nach Tausenden

---

1) Derartige Vorgänge habe ich wiederholt erlebt: einer meiner Bekannten, für zoologische Systematik einer bestimmten Thiergruppe sich interessirend, hat in langjähriger aufopfernder Arbeit eine speciesreiche Sammlung der betreffenden Gruppe zusammengebracht. Sein Nachfolger, ein eifriger Lehrer der vergleichenden Anatomie, liess seinerseits dies mühsam erworbene Material in Studentencursen verarbeiten. In einem anderen Fall hat ein Ohrenarzt während Jahrzehnten bei allen Sectionen mittels einer Kettensäge die Schädelbasis herausgenommen und eine unschätzbare Sammlung von feuchten Gehörpräparaten, normalen und pathologischen, angelegt. Zwei Jahre nach seinem Tode fand es sich, dass die Sammlung verschimmelt und vertrocknet war, weil der Institutsvorsteher sie nicht beachtet, der Institutsdiener aber völlig vernachlässigt hatte. Im Kleinen habe ich selbst Ähnliches erlebt, da ich s. Z. die mir gehörigen Originalstücke zu den Crania helvetica als besondere kleinere Sammlung geordnet und catalogisirt meinem Nachfolger hinterliess. Nach einigen Jahren liessen sich nur mit Mühe noch einzelne Stücke als zu der ursprünglichen Sammlung gehörig herausfinden, die übrigen waren zu osteologischen Zwecken verbraucht worden.

zählenden Sammlung von Objectträgern enthüllen sich nur dem, der die Herkunft und Behandlungsweise der Präparate mit allen Einzelheiten kennt und der die Präparate Stück für Stück durchbeobachtet hat.

Im Gegensatz zu den Universitätsanstalten mit ihrer wechselnden Führung stehen grosse Landesmuseen, Bibliotheken und verwandte Institutionen. Sie mögen vorläufig unter der Collectivbezeichnung von *„Centralanstalten“* zusammengefasst werden. Schon der Titel *„Conservator“*, den die Vorsteher solcher Sammlungen häufig führen, besagt dass diese nach conservativen Grundsätzen verwaltet werden sollen. Ein möglichst reiches Material soll aufgespeichert und in möglichst übersichtlicher Weise geordnet werden. Hierbei haben die besonderen Liebhabereien der Vorsteher und ihrer Gehilfen zurückzutreten vor den Forderungen der Allgemeinheit. Bei Museen kann schon durch die Art der Aufstellung erreicht werden, dass der Besucher Anschauung und Belehrung über bestimmte Wissensgebiete bekommt. Die Aufstellung wird dabei zu einer besonderen Kunst und zu einer Aufgabe ersten Ranges für den Vorsteher der betreffenden Sammlung. Musteranstalten der Art sind die Sammlungen des Louvre und die des Jardin des Plantes in Paris, die des British-, des S. Kensington-, und des Hunter-Museums in London und in neuerer Zeit auch die grossartigen Museen in Berlin und Wien. Diese Museen erfüllen im Allgemeinen einen doppelten Zweck, einesteils ermöglichen sie den Wissbegierigen der verschiedenen Stände einen geordneten, rasch zu erlangenden Überblick über das vorhandene Anschauungsgebiet. Anderntheils aber bewahren sie in ihren Vorrathsräumen aufgespeichertes Forschungsmaterial zu handen von Gelehrten, die bestimmte Aufgaben eingehender zu durchforschen wünschen.

Als grossartiges Beispiel einer Centralanstalt, welche einerseits der Verbreitung thatsächlicher Naturanschauung und andererseits der Förderung wissenschaftlicher Forschung dient, steht A. Dohrn's zoologische Station in Neapel da.[1]) Hier bietet das im Erdgeschoss befindliche Aquarium Gelehrten und Ungelehrten

---

1) Hierüber verweise ich auf meinen 1886 vor der Ges. deutscher Naturf. u. Aerzte in Berlin gehaltenen Vortrag: „Die Entwickelung der zoologischen Station in Neapel und das wachsende Bedürfniss nach wissenschaftlichen Centralanstalten“.

eine unerschöpfliche Quelle belehrender Anschauung über die lebenden Wesen des Meeres, während die Station im engeren Sinn eine Forschungsstätte ist mit möglichst liberaler Gewährung aller erforderlichen Hilfsmittel. Die Beamten der Anstalt ertheilen keinen Unterricht, dass heisst sie halten keine Vorlesungen, aber doch verlässt kein Forscher die Station, der ihnen nicht in reichem Maasse für ihre sachkundige Belehrung Dank schuldig bliebe.

Die Verwaltung wissenschaftlicher Hilfsmittel zu allgemeinem Gebrauch tritt am schärfsten bei öffentlichen Bibliotheken zu Tage. Die Interessenten verschiedenster Art finden hier ihr litterarisches Rüstzeug stets bereit liegend. Auch besteht keinerlei abweichende Auffassung über die Bedeutung öffentlicher Bibliotheken und über die Wünschbarkeit möglichst liberaler Verwaltungsgrundsätze. Die Beamten stehen im Dienste der Allgemeinheit und ihre besondere Richtung hat völlig in den Hintergrund zu treten.

Als einen andersgearteten Typus von Centralanstalten können wir die astronomischen Observatorien betrachten. Von der stillen Thätigkeit dieser Arbeitsstätten dringt nur ausnahmsweise etwas nach Aussen und auch da, wo sie an Universitäten angegliedert sind, sind sie in ihrer Thätigkeit verknüpft mit grossen, der Gesammtwissenschaft gestellten Aufgaben. Alle bestehenden Sternwarten bilden ein grosses Netz von Stationen, die mit ihrer Arbeit ineinander zu greifen haben. Jede derselben arbeitet an der Mehrung eines Thatsachenbestandes, der Allen zu gute kommt und jeder ist dabei ihr besonderer Platz angewiesen.

In obiger summarischer Uebersicht kommen die verschiedenen Richtungen zum Ausdruck, nach denen hin die Bedeutung von Centralanstalten sich zu entwickeln vermag. Es sind dies

Im Interesse der Forschung:

1) *die Bewältigung grösserer, über die Kräfte einzelner Forscher hinausgehender Aufgaben, vor allem solcher Aufgaben, welche ein nach einheitlichem Plan arbeitendes, technisch geschultes Personal verlangen.*

2) *die Theilnahme an solchen wissenschaftlichen Unternehmungen, die nur durch Cooperation verschiedener Anstalten möglich sind.*

3) *die Aufspeicherung wissenschaftlichen Materiales zu Gunsten der desselben bedürfenden Forscher.*

4) *die Anlage von Archiven, in denen bereits verarbeitetes oder der Bearbeitung harrendes Material bis auf Weiteres aufbewahrt wird.*

5) *die Ausbildung besonderer Forschungsmethoden.*

Im Interesse der Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse:

6) *die geordnete Aufstellung und Erläuterung des der allgemeinen Belehrung in engeren und weiteren Kreisen dienenden Materiales.*

Mag bei den betreffenden Anstalten die eine oder die andere Richtung mehr in den Vordergrund treten, so ist für alle erforderlich, dass eine Discontinuität in den leitenden Grundsätzen der Führung ausgeschlossen sei.

Wie kann bei umfangreichen wissenschaftlichen Arbeiten die Controlle des Materiales für andere Forscher ermöglicht werden? (Zu Nr. 4 obiger Aufzählung).

Es ist eine, besonders unter jugendlichen Forschern weit verbreitete Ansicht, es sei zur Begründung der erhaltenen Ergebnisse nöthig, das benützte Material und die bei der Arbeit durchmessenen Wege in möglichster Vollständigkeit dem Leser auseinander zu legen. Dieser Ansicht verdankt man die Publication von detaillirten Beobachtungstagebüchern, die Mittheilung endloser Zahlentabellen, die Beschreibung umfangreicher Schnittreihen und ähnlicher Belege aufgewendeten Fleisses. — Solchen Publicationen liegt die Voraussetzung zu Grunde, es sei der Leser geneigt, das mitgeteilte Rohmaterial seinerseits noch einmal durchzuarbeiten, und er werde dadurch für die Anschauung des Autors gewonnen werden. Diese Voraussetzung ist aber erfahrungsgemäss eine irrthümliche. Der Leser verlangt nicht das Rohmaterial, sondern die durchdachten, wissenschaftlich verdauten und durch eine Auswahl treffender Beweisstücke begründeten Ergebnisse des Autors. Durch den Charakter der Darstellung und nicht durch die Menge des mitgetheilten Rohstoffes erwirbt sich dieser beim wissenschaftlichen Publicum das Vertrauen, das seiner Arbeit den gewünschten Erfolg bringt. Auch im wissenschaftlichen, nicht nur im geschäftlichen Leben bildet der Credit die Basis eines erspriesslichen Verkehrs.

Nun mag es aber unter gewissen Umständen in der That wünschbar sein, das einzelne später kommende Forscher Einblick

bekommen in das gesammte Material ihrer Vorgänger.[1]) Dafür giebt es ein sehr einfaches, die Litteratur nicht belastendes Mittel: man deponirt die betreffenden Actenstücke, Tagebücher, Zahlentabellen, Schnittreihen u. s. w. bei einer geeigneten wissenschaftlichen Anstalt, bei der sie von Späteren stets wieder eingesehen und verglichen werden können. *Es ist nicht gut, dass Alles gedruckt werde*, und wenn wir es dahin bringen können, dass der entbehrliche Ballast in der Litteratur gemindert wird, so werden uns unsere Nachfolger Dank dafür schulden.

Ueber Centralinstitute zur Förderung der Kenntniss des Gehirnes.

Die Nothwendigkeit, die Kenntniss des Gehirnes in umfassendem Maasse zu fördern und zu verbreiten macht sich in immer weiteren Kreisen fühlbar.[2]) Zuerst haben bekanntlich die Psychiater das Bedürfniss empfunden das Maass ihrer Kenntnisse vom Gehirn über das von den Anatomen Gebotene hinaus zu erweitern. MEYNERT, GUDDEN und weiterhin FLECHSIG sind als Bahnbrecher vorausgegangen; die von ihnen geschaffene Wissenschaft aber ist während geraumer Zeit eine Art von Geheimlehre geblieben. Zu den Schwierigkeiten völlig neuer und verwickelter körperlicher Auffassung und zu der Schwerverdaulichkeit der ersten litterarischen Darstellungen kam noch der Stacheldraht einer eigenen Nomenklatur, um den Zutritt in dies Gebiet zu erschweren. Dem ist indessen durch die gewandten Darstellungen jüngerer Autoren, eines EDINGER, OBERSTEINER u. A. insofern abgeholfen worden, als wenigstens die litterarische Einarbeitung in die Gehirnlehre zur Zeit keine besonderen Schwierigkeiten darbietet. Auch ist die Methodik der Forschung während der verflossenen Jahrzehnte durch GOLGI, EHRLICH, WEIGERT u. A. ungemein gefördert und dem entsprechend auch die Zahl selbständiger und erfahrener Gehirnforscher erheblich gemehrt worden. Auf der anderen Seite aber ist der Kreis derer, die von Berufswegen einer genauen Kenntniss der Gehirnanatomie bedürfen, in ungeahntem Maasse gewachsen. Den

---

1) Man darf sich übrigens hierin nicht täuschen. Auch hier zeigt die Erfahrung, dass die Forscher eher geneigt sind, sich ihr Material von Grund auf neu zu schaffen, als das ihrer Vorgänger im Einzelnen durchzuarbeiten.

2) Man vergl. hierüber das bereits 1886 in meinem in Berlin gehaltenen Vortrag Gesagte.

Anatomen, Physiologen und Psychiatern haben sich zuerst die internen Kliniker angeschlossen, von denen heutzutage eine sehr gründliche Kenntniss von der Organisation des Gehirnes verlangt wird. Dann sind die Chirurgen gefolgt, die, auf eine in's Einzelne gehende Kenntniss des Organes sich stützend, aus den Erscheinungen vorhandener Störungen den Ort der Störung festzustellen und chirurgisch zu behandeln gelernt haben. Weiterhin haben die Psychologen erkannt, dass die Gehirnlehre zu einer Grundlage ihrer Forschung werden muss, und endlich ist die Menge der Interessenten unübersehbar, die bei Schaffung einer vergleichenden Gehirnlehre betheiligt sein wird. Hier liegen in der That Aufgaben der allerumfassendsten aber auch der allerinteressantesten Art vor. Aus ähnlichen Anfängen entwickeln sich die verschiedenen Gehirnformen, und sie specialisiren sich mehr und mehr nach Klassen, Ordnungen, Gattungen, Species und Individuen. Gewisse Zellengruppen und Faserbahnen kehren, wenn auch in sehr wechselnder Ausbildung allenthalben wieder, andere sind für diese oder jene Thierform specifisch, und wie der Bau des Gehirnes, so wechseln auch dessen Lebensäusserungen. Von einer fortgeschrittenen Gehirnlehre wird verlangt werden, dass sie den Zusammenhang zwischen dem Wechsel in der Gehirnorganisation und dem seiner Lebensäusserungen zu klarem Ausdruck bringt.

Bei der centralen Stellung, die die Gehirnlehre einnimmt und deren Bedeutung noch in vollem Wachsen begriffen ist, geht es nicht an, dass sie auf die Dauer von Anatomen und Psychiatern. gewissermassen im Nebenamt, erledigt wird. Schon heute ist der Umfang des Gebietes so gross, dass ihm ein Einzelner und auch selbst eine einzelne Anstalt nicht mehr nach allen Richtungen gerecht zu werden vermag. Die topographische, die histologische, die entwickelungsgeschichtliche und die vergleichend anatomische Verfolgung der vorliegenden Probleme verlangen jede ihre Berücksichtigung und dabei greifen die Probleme auf das mannigfachste in einander über. Die Vielgestaltigkeit der zu lösenden Aufgaben und der Umfang der erforderlichen Arbeit drängen darauf hin, ein System von Centralanstalten zu errichten, die nach gemeinsamem Plan arbeitend, und sich gegenseitig unterstützend, die Specialarbeiten unter sich theilen. In dem Sinn ist von der internationalen Association der Akademien in Paris der oben angeführte Beschluss gefasst worden.

An der sehr lebhaften Verhandlung hatten sich die Herren

Waldeyer, Ray-Lankester, Retzius, Mosso, Giard, Ehlers und Perrier betheiligt und übereinstimmend die Wünschbarkeit eines Vorgehens in der angegebenen Richtung anerkannt. Es sind, wie man sieht, drei getrennte Aufgaben, die den zu begründeten Anstalten überwiesen werden:

1) *die Ausbildung der auf Gehirnforschung bezüglichen Methoden.*

2) *Die Sammlung von Beobachtungsmaterial.*

3) *Die Nutzbarmachuny des gesammelten Materiales in allgemeinercm Interesse.*

Ueber die Ausbildung der auf Gehirnforschung bezüglichen Methoden.

sind weitere Erörterungen kaum erforderlich. Anstalten, denen die Aufgabe zufällt, Beobachtungsmaterial zu sammeln, die demnach darauf angewiesen sind, mit den Methoden und Ergebnissen der neuesten Forschung in Fühlung zu stehen, werden die übernommenen Methoden ohne Weiteres auch selbstständig vervollkommnen und durch neu erfundene vermehren. Wichtig erscheint vor Allem, dass die *Methoden klarer und übersichtlicher Darstellung der gewonnenen Erfahrungen* durch zweckmässige Combinirung von Modellen, Photogrammen, Diapositiven u. s. w. zu immer befriedigenderer Ausbildung gebracht werden.

Die Sammlung von Beobachtungsmaterial

wird die Hauptaufgabe der zu begründenden Anstalten sein. Es sollen die Anstalten Archive werden, in denen das erreichbare Material in möglichster Reichlichkeit und Vollständigkeit aufgespeichert und geordnet wird. Hierbei handelt es sich ebensowohl um Sammlung von bereits vorhandenem, als um die von neu zu schaffendem Material. Das sich eröffnende Feld ist nun allerdings ein unermesslich grosses: Vorerst ist hervorzuheben, daſs wenn in den Beschlüssen der internationalen Association der Akademien Centralanstalten für Förderung der „Gehirnlehre" in's Auge gefasst worden sind, laut ausdrücklicher Verständigung, das Hauptorgan für das Gesammtsystem, das Gehirn für das Nervensystem gesetzt worden ist. Die Bearbeitung von Rückenmark, Ganglien und Sinnesorganen fällt mit in den Bereich der zu begründenden Anstalten, und in diesem weiten Sinn ist auch in diesem Aufsatz überall vom Gehirn die Rede.

Bleiben wir zunächst beim menschlichen Gehirn, so kommen für die gröbere anatomische Behandlung, Wägung und Messung des Gesammtorganes und seiner Theile in Betracht, sodann die Feststellung der Formvarietäten, und der durch das Alter bestimmten Modificationen. Speciell beim Grosshirn bildet die Windungslehre ein in sich geschlossenes Gebiet.[1]) An die äusserliche Formbetrachtung schliesst sich die Verfolgung der inneren Organisation an, wie sie insbesondere durch das Studium der Schnitte sich enthüllt, die Feststellung und Umgrenzung der grauen Kerne und der sie verbindenden Faserbahnen. Weiterhin folgt die Durchforschung der Histologie und vor allem der histologischen Topographie des Organes, der hinsichtlich der Natur und der Vertheilung der Zellen vorkommenden Eigenthümlichkeiten, sowie des Ursprunges und der Endbezirke der einzelnen Faserbahnen. Hier wie bei der gröberen Organisationslehre ist die Arbeit nicht auf blosse Schnittstudien zu beschränken, es sind plastische Reproductionen möglichst präciser Art herzustellen. Letztere können, wenn sie correct ausführbar sind, auch zu quantitativen Bestimmungen, zu einer genauen Vergleichung der Massenentwickelung der einzelnen Bezirke verwerthet werden.

Als Basis der Organisationslehre ist die Gehirnentwickelung zu bearbeiten und zwar sowohl die embryonale Entwickelung der äuſseren Formen und ihrer inneren Gliederung, als auch die Entwickelung der Markfasern im Sinn von P. Flechsig und seiner Schule.

Im Anschluss aber an die Anatomie des menschlichen Gehirnes ist die vergleichende Gehirnlehre zu entwickeln und zwar von den einfachsten Formen ausgehend bis herauf zum Menschen.

Sehr Vieles von dem hier Aufgezählten ist schon wissenschaftlicher Besitz, und die zu begründenden Anstalten haben den vorhandenen Besitzstand nur zu sammeln und angemessen zu

---

1) Durch Herrn Mosso ist in Paris das Unternehmen von Professor Chiarugi zur Sprache gebracht worden, der, an ältere Arbeiten von Calori, Tenchini u. A. anknüpfend, für Italien ethnographische Massenbestimmungen von Gehirngewichten anregt. Das verdienstvolle Unternehmen eröffnet eine besondere, der Nachahmung werthe Bahn collectiver wissenschaftlicher Arbeit (Proposto di uno studio collettivo sul peso dell' Encefalo negli Italiani. Istituto anatomico di Firenze 1903 aus „Sperimentale“ Archivio di Biologia normale et patologica anno LV fasc. 1°. S. 11).

ordnen. Noch viel mehr aber bleibt erst zu erwerben, und nach der Richtung hin bedarf es zwischen den Anstalten der Verständigung über gemeinsame Arbeitsgrundsätze, über die zweckmässige Vertheilung der zu leistenden Arbeit und über die gegenseitige Zugänglichmachung neu erworbenen Materiales. Völlig naturgemäss werden einzelne Anstalten mehr darauf angewiesen sein, auf Specialgebiete, wie etwa das histologische, sich zu beschränken, während andere die Möglichkeit haben mit ausgiebigem Material zu arbeiten und statistische Ergebnisse zu sammeln. Die leichtere Zufuhr vergleichend anatomischen Materiales wird wieder bestimmte Anstalten veranlassen, nach dieser Richtung sich hauptsächlich auszubilden. Die Hauptsache bleibt das organische Zusammenarbeiten der verschiedenen Anstalten nach gemeinsamen Ziel. — Früher oder später wird eine ins Einzelne gehende Topographie des Gehirnes mit Zellenzählungen sich nothwendig erweisen, die dann auf ähnlichem Wege mit getheilten Kräften zu bearbeiten sein wird, wie etwa die Sternkarten der Astronomen.

Ueber die Sammlung von Originalmaterialien. Die zu begründenden Anstalten werden sich bemühen, Originalmaterialien, seien es mikroscopische Präparate, seien es Originalmodelle, Photogramme oder Diapositive in möglichster Reichlichkeit zu erwerben. Hinsichtlich der histologischen Präparate werden wohl die meisten Forscher gern dazu beitragen, dass ihre Belegstücke in weiteren Kreisen bekannt und zugänglich werden. Andererseits wird jeder Interessent mit besonderer Befriedigung Original-Präparate der grossen Meister, eines Golgi, eines Ramon y Cajal, eines Retzius u. a. oder Diapositive der Flechsig'schen Schnitte besichtigen.

Dazu kommt noch ein Weiteres: In manchen Fällen wird das Material einer abgeschlossenen wissenschaftlichen Untersuchuug für den Autor selber entbehrlich und anstatt es der Zerstreuung anheimzugeben, wird er es mit Nutzen dem Archiv einer Centralanstalt überlassen. Hier kann es von späteren Forschern wieder eingesehen werden und es können auch solche Stücke von Werth werden, die der Autor als nebensächlich überhaupt nicht veröffentlicht hatte. Eine wichtige Rolle aber würde solchen wissenschaftlichen Archiven zukommen, wenn es möglich werden sollte, mit ihrer Hilfe die nutzlose Breite wissenschaftlicher Publikationen einzudämmen (s. o. S. 418).

Die Nutzbarmachung des gesammelten Materiales im allgemeinen Interesse.

Die litterarische Einarbeitung in die Ergebnisse neuerer Gehirnforschung bietet, insoweit es sich um allgemeinere Uebersichten handelt, zur Zeit keine ungewöhnlichen Schwierigkeiten mehr. Anders steht die Sache, sobald man darauf ausgeht, sich eine auf eigener Anschauung basirende Kenntniss des Organes zu verschaffen. Eine solche ist nur unter sehr grossen Opfern an Zeit und an Arbeit erreichbar. Jeder Einzelne hat eben mit Beschaffung seines Materiales und mit dessen Bearbeitung wieder von vorn anzufangen und manche Lebensjahre hinzugeben, ehe er dem erstrebten Ziel nahe gekommen ist. Damit sind von vornherein eine grosse Zahl von Interessenten von der Möglichkeit eigener ausgiebiger Anschauung abgeschnitten, und zwar nicht durch innere Nothwendigkeit, sondern durch äussere Hindernisse.

Diese Hindernisse zu beseitigen, soll aber eben eine der Aufgaben der neu zu begründenden Anstalten sein. Durch ihre Angestellten und durch ihre auswärtigen Verbindungen hat die Anstalt das betreffende Material angesammelt, und es handelt sich darum, es denen, die seiner bedürfen, nutzbar zu machen. Dabei sind wiederum verschiedenartige Ansprüche zu befriedigen, einerseits die der Lernenden, andererseits die der Forscher.

Durch passende Aufstellung von Präparaten, von Schnittreihen, von Photogrammen und Modellen und durch geeignete Erklärungen kann erreicht werden, dass, wie in einem gut geordneten Museum, der Belehrung Suchende sich ohne fremde Hilfe zurecht finden, und im Verlauf einiger Tage oder Wochen eine Summe von Anschauungen und Kenntnissen sammeln kann, zu deren Erwerb durch eigene Arbeit Jahre nicht ausgereicht hätten Soweit es sich um Präparate handelt, die wie mikroscopische, oder leicht zerstörbare, nicht ohne Weiteres frei aufgestellt werden können, wird durch zweckmässige Reglemente dafür zu sorgen sein, dass deren Benutzung ohne Schädigung erfolgen kann. In vielen Fällen werden auch an Stelle der Präparate, deren vergrösserte Photogramme aufzustellen, und in angemessenen Zeiträumen werden Demonstrationen mit dem Projectionsapparate vorzunehmen sein. Es wird eine ganz besondere Aufgabe der Directionen sein, die demonstrativen Leistungen ihrer Anstalten auf das grösstmögliche Maass zu bringen.

Die weitere Aufgabe der Anstalten, den Bedürfnissen von Spezialforschern entgegenzukommen, lässt sich a priori nicht reglementiren, weil die Bedürfnisse nach der Richtung sehr verschieden sein können. Nur soviel lässt sich verlangen, dass bei der Errichtung der Anstalten durch Schaffung verfügbarer Arbeitsräume die Möglichkeit, Spezialforschern zu dienen, vorgesehen und im Allgemeinen das Princip möglichster Liberalität anerkannt wird.

Ueber die Einrichtung von Centralanstalten für Gehirnanatomie.

Unsere hervorragenden Gehirnanatomen haben von jeher einzelne Schüler in die Ergebnisse und Methoden ihrer Arbeiten eingeführt. Um Meynert hat sich eine Wiener-, um Gudden eine Münchener-, um Flechsig eine Leipziger Schule gebildet, in Paris sind nach einer Richtung hin Charcot, nach einer andern Broca die Mittelpunkte gehirnanatomischer Bestrebungen gewesen und auf speciell histologischem Gebiet hat sich um Golgi ein thätiger Schülerkreis gesammelt. In neuerer Zeit ist die Zahl hirnanatomischer Schulen gewachsen, so arbeiten, um von mir bekannten zu reden, in Frankfurt stets einige Aerzte bei Edinger und bei Weigert über das Gehirn und hier in Leipzig bildet seit einer Reihe von Jahren Prof. Held einen Anziehungspunkt für jüngere Gehirnforscher. Aus dessen Schule sind Gale in Minnesota, Mills in Montreal hervorgegangen und Hewitson, dessen Präparate die Unterlage zu dem schönen von Miss Florence Sabin gebauten und publicirten Modell des Hirnstammes geliefert haben.[1]) Die Erziehung junger Gehirnforscher stösst unter den gegenwärtigen Verhältnissen auf keine besondere Schwierigkeiten mehr, und für die zu begründenden Anstalten kann darin nur ein Nebenzweck liegen.

Die Kosten für die Errichtung einer Centralanstalt für Gehirnanatomie werden sich natürlich nach dem Umfange bemessen, den man einer solchen geben will. Es wäre zu wünschen, dass in jedem Culturstaat wenigstens eine grössere Anstalt vorhanden wäre, die möglichst reichlich ausgestattet und demnach

1) Miss Florence Sabin. A model of the medulla oblongata, pons and midbrain of a new-born babe in den Contributions to the science of Medecine, die als Jubelschrift für W. H. French herausgegeben worden sind. John Hopkin's Press, Baltimore, 1900.

auch möglichst leistungskräftig wäre. An eine solche Hauptanstalt könnten sich immerhin noch kleinere mit Nutzen angliedern.

Von wissenschaftlich gebildetem Personal kämen in Betracht, Directoren, Custoden der Sammlung und Demonstratoren, von technischen Gehilfen Schnitttechniker, Photographen und Modelleure. Diese Positionen führe ich getrennt auf, aber es ist klar, dass ein und dieselbe Person unter Umständen mehrere Functionen vereinigen kann. Ein Custode der Sammlung kann für bestimmte Stunden des Tages oder der Woche auch Demonstrationen leiten. Ein Schnitttechniker kann auch photographiren, oder modelliren u. s. w. Hinsichtlich der technischen Dienstleistungen aber ist daran zu erinnern, dass bei richtiger Führung weibliche Hände sich sehr nützlich erweisen können.

Zu den Kosten für Personalgehalte kommen die Kosten für Materialanschaffung und für den Unterhalt. Die Errichtung und Ausstattung eines passenden Gebäudes verlangt eine einmalige grössere Ausgabe und dabei ist, wie bei allen Institutsgebäuden darauf zu achten, dass von vornherein die Möglichkeit späterer Erweiterung ins Auge gefasst wird.

Ueber gemeinsame Grundsätze für entwickelungsgeschichtliche Arbeiten.

Das Meiste von dem, was über die Aufgaben und den Nutzen von Anstalten für Gehirnanatomie auseinander gesetzt worden ist, lässt sich ohne Weiteres auch auf Anstalten für entwickelungsgeschichtliche Arbeiten übertragen. Ein systematisches Vorgehen zur Bewältigung der erforderlichen Massenarbeit ist hier sogar noch dringlicher als beim Gehirn. Dazu kommen die besonderen Schwierigkeiten der Materialbeschaffung und die mannigfache Einmengung theoretischer Vorstellungen, wodurch die unternommenen Untersuchungen oft von vornherein in einseitige Bahnen gelenkt werden.

In ihrem ursprünglichen Antrag hatte die Königl. Sächs. Ges. der Wissenschaften die Einigung über die bei entwickelungsgeschichtlichen Arbeiten zu befolgenden Grundsätze als ein Hauptdesiderat aufgestellt. Bei den Verhandlungen der Association der Akademien in Paris hat sich aber herausgestellt, dass eine internationale Inangriffnahme dieser Aufgaben vorerst noch verfrüht ist. Das Gebiet erscheint noch zu wenig abgeklärt, auch ist der

Kreis der Interessenten noch lange nicht so gross, wie bei der Gehirnlehre, und so hat man es für zweckmässiger erachtet, die Sorge für entwickelungsgeschichtliche Arbeiten den speciellen Fachvereinen zu überweisen. Die anatomische Gesellschaft hat bei ihrer Jahresversammlung in Bonn die ihr zugewiesene Aufgabe (wie oben S. 414 erwähnt wurde) sofort in Angriff genommen.

Es ist kein Zweifel, dass die Schwierigkeiten der Verständigung auf entwickelungsgeschichtlichem Gebiete sehr viel grösser sind, als auf dem der Gehirnanatomie. Dies gilt vor allem deshalb, weil hier der subjective Standpunkt der Bearbeiter bis jetzt eine viel entscheidendere Rolle spielt. Ganze Reihen von Untersuchungen, zu denen das Material z. Th. nur unter Aufwand ungewöhnlicher Energie erobert werden konnte, sind in der ausgesprochenen Absicht unternommen, diese oder jene theoretische Vorstellung zu begründen. Bei solchen Unternehmungen tritt aber die auf naiver Naturbeobachtung beruhende rein sachliche Beschreibung zurück gegenüber der argumentirenden Behandlung des Gegenstandes. Es ist eben für zahlreiche Bearbeiter entwickelungsgeschichtlicher Fragen die Arbeit nur Mittel zum Zweck. Dies mag den Vortheil haben, den Kreis der Bearbeiter erheblich zu vermehren und zur Herbeischaffung auch seltenen Materials anzustacheln. Immerhin ist zu betonen, dass das Bedürfniss besteht, einen sicheren, in sich möglichst zusammenhängenden und geschlossenen Bestand an thatsächlichem Beobachtungsmaterial zu besitzen, nicht blos in Beschreibungen, sondern in Abbildungen, Photogrammen und Modellen. Ein solcher Bestand muss, gleich den Karten der Geographen und Geologen immer präciser durchgearbeitet werden und er muss das feste Fundament bilden, das unabhängig von allen Zeitströmungen der weiteren Forschung die Bahn frei lässt. Für die menschliche Embryologie habe ich in einer die ersten zwei Entwickelungsmonate umfassenden Normentafel und in Modellreihen gesucht, einen ersten Anfang zu schaffen, und in sehr zu begrüssender Weise hat es Keibel unternommen, vergleichende embryologische Normentafeln ins Leben zu rufen, als Unterlage für weitergehende Untersuchungen. Von den Bildern wird man mehr und mehr zu den plastischen Modellen fortschreiten, für deren Herstellung, Dank der Born'schen Methode, sich ja heute zahlreiche jüngere Forscher interessiren. Noch besteht aber eine gewisse Zusammenhangslosigkeit in den verschiedenen Bestrebungen,

und zu deren Beseitigung beizutragen, soll gerade die Aufgabe der neu erwählten Commission sein.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Förderung des erstrebten Zieles würde auch hier die Begründung wohl ausgestatteter Centralanstalten sein, an denen das bezügliche Material nach denselben Grundsätzen gesammelt und verwaltet würde, die oben für Gehirnanstalten aus einander gesetzt worden sind. Solche Anstalten werden mit der Zeit auch kommen, aber vorerst fragt es sich, was kann schon jetzt im Interesse grösserer Einigung geschehen? *Das erste zu erstrebende Ziel ist eine weitgehende Vergleichbarkeit der von verschiedenen Autoren mitgetheilten Ergebnisse.* Diese Vergleichbarkeit muss sich auf Text, Abbildungen und Modelle beziehen.

In Betreff der Textdarstellung ist zu erstreben, dass, unabhängig von aller theoretischen Discussion, die Beschreibungen klar und sachlich gehalten, und descriptive Bezeichnungen vor theoretischen bevorzugt werden. So ist z. B. das so viel gebrauchte Wort „Gastrulation“ ein theoretischer Begriff, der von verschiedenen Autoren in verschiedenem Sinne gebraucht wird, und dasselbe gilt von dem Worte „Urmund“. Wogegen „Bildung des mittleren Keimblattes“, „Blastoporus“, „Primitivstreifen“ u. s. w. descriptive Bezeichnungen sind, die keinen Doppelsinn zulassen. Sieht sich ein Autor veranlasst, von ihm bei früheren Anlässen neu geschaffene Bezeichnungen zu gebrauchen, so wird er dem Leser stets eine Wohlthat erweisen, wenn er den Sinn seiner Ausdrücke, soweit sie nicht allgemein gangbar geworden sind, von neuem feststellt. Mehr noch als durch Beschreibungen wird die Vergleichbarkeit der von verschiedenen Forschern erlangten Beobachtungsergebnisse durch gute Abbildungen erreichbar sein. In der Hinsicht existirt nun soviel Treffliches, dass es undankbar wäre, sich dessen nicht zu freuen. Besonders hinsichtlich der technischen Ausführung entsprechen die heutigen Abbildungen auch hohen Ansprüchen. Worauf im Interesse allgemeiner Vergleichbarkeit von Zeichnungen hinzustreben ist, das ist auf die Annahme bestimmter Darstellungsnormen und fester Vergrösserungsmaassstäbe. Wo immer möglich, wird man gut thun, sich an einfache, leicht auf einander reducirbare Vergrösserungszahlen (5, 10, 20, 40, 50, 100 u. s. w.) zu halten, oder wenn dies nicht möglich ist, durch Beifügung eines Maassstabes die Controllirbarkeit der Zeichnungen sicher zu stellen. Es bleiben ja dabei immer noch Schwierigkeiten übrig,

die einer völligen Präcision hemmend im Wege stehen, die Schrumpfung der Präparate durch die angewandten Fixationsmittel und bei Paraffinschnitten die durch die Paraffinschrumpfung. Soweit nicht Correcturen möglich sind, muss man sich in diesen Fällen mit den Annäherungswerthen begnügen. Die Vergleichbarkeit mit dem Maassstab muss auch von Photogrammen und Modellen verlangt werden. Je mehr dieser Forderung Genüge geleistet werden kann, um so mehr haben die betreffenden Reproductionen den Anspruch, als streng wissenschaftliche Documente behandelt zu werden.

Ein fernerer Schritt in der Richtung gemeinsamer Arbeit liegt darin, dass vorhandenes Material anderen Forschern zugänglich gemacht wird. Man darf allerdings von keinem Forscher die Entsagung verlangen, dass er mühsam, in langjähriger geduldiger Arbeit oder auf weiten Reisen erworbenes Material ohne Weiteres Anderen zur Verfügung stellt, bevor er es nur selber bearbeitet hat. Dagegen kann, wie mir scheint, Material von Schnitten, oder von anderen Originalien, das einer bereits abgeschlossenen Arbeit zu Grunde gelegen hat, in der einen oder anderen Weise im Original, in Photogrammen oder in Modellen Anderen zugänglich gemacht werden. Dazu gehört allerdings, dass, wie ich oben hervorhob, Photogramme und Modelle auch ohne publicirten Text als wissenschaftliche Leistungen anerkannt und geachtet werden.

So lange keine grösseren Centralanstalten existiren, wird es vielleicht am zweckmässigsten sein, eine sonstige centrale Instanz zu begründen, die den betreffenden Tausch- und Briefverkehr vermittelt und im Gang erhält.

Die Beherrschung grösserer Schnittreihen durch die Photographie.

Es wurde schon oben auf die Schwierigkeit hingewiesen, grössere Sammlungen mikroscopischer Präparate derart zu beherrschen, dass man sofort herausfindet, was in jedem derselben von Bedeutung ist. Aeusserlich sieht man den Präparaten in der Regel wenig genug an, und es bedarf einer umständlichen Durchmusterung mit schwächeren und stärkeren Vergrösserungen, um die entscheidenden Besonderheiten der einzelnen Stücke aufzufinden. Die Mikroscopiker helfen sich so gut sie können, um die einmal gefundenen Eigenthümlichkeiten ihrer Präparate fest-

zuhalten. Sie bringen Marken oder kleine Zeichnungen auf den Etiquetten an, Hieroglyphen, die meist nur dem verständlich sind, der sie hingemalt hat.

Handelt es sich um embryologische, zoologische oder gehirnanatomische Schnittreihen, so sind die Schwierigkeiten im Allgemeinen etwas geringer, als bei rein histologischen Schnitten, weil schon die gröbere Besichtigung der Objectträger bis auf einen gewissen Punkt über deren Inhalt zu orientiren vermag. Immerhin kann auch hier noch das Suchen recht unbequem sein. Seit einer Reihe von Jahren benütze ich die Photographie, um mir einen zuverlässigen und leicht zu übersehenden Schnittcatalog herzustellen. Bei 10- bis 20-facher Vergrösserung werden die einzelnen Objectträger (d. h. jeweilen eine Reihe von Schnitten zugleich) auf Bromsilberpapier aufgenommen. Die Negativblätter, die man so erhält, leisten als Orientirungs- und als Forschungsmittel dasselbe wie Positivbilder. Man kann daran messen, und man kann sie als Unterlage beim Modelliren verwenden. Sucht man bestimmte Stellen, so finden sie sich beim Durchblättern der Papiercopien sehr viel rascher, als beim Durchmustern der Präparate. Man kann die Blätter gross herstellen (50—60 cm im Geviert) und die Herstellung ist verhältnissmässig wenig zeitraubend. Im Verlauf von einigen Tagen oder Wochen kann man eine Dokumentensammlung anlegen, die jederzeit zu der verschiedenartigsten Benutzung bereit steht.

Photographische Projectionsbilder und ihre Schätzung als Originalpublicationen.

Handelt es sich darum, mikroscopische Originalien Andern zugänglich zu machen, so gewährt dafür die Photographie die denkbar grösste Erleichterung. Auch ist zu hoffen und zu erwarten, dass bis in nicht allzulanger Zeit der Austausch von Photogrammen als allgemeiner Gebrauch sich wird eingebürgert haben. Projectionsapparate finden sich nachgerade überall und das in Diapositiven herzustellende Demonstrationsmaterial kann ins Ungemessene vermehrt werden.

Handelt es sich um die Verbreitung von seltenerem oder von neu aufgefundenem Beobachtungsmaterial, so kann ein Vorurtheil störend im Wege stehen, mit dem wir auch anderweitig zu kämpfen haben. Es ist dies der einseitige Cultus der Drucker-

schwärze. Nur, was gedruckt ist, gilt für wissenschaftlich hoffähig und beglaubigt. Nun giebt es aber auf wissenschaftlichem Gebiete Mittel und Wege, die Ergebnisse geleisteter Arbeit Andern zugänglich zu machen, die mit der gedruckten Beschreibung Nichts zu thun haben, ihr aber an darstellendem Werth mindestens ebenbürtig, ja vielfach überlegen sind. Dahin gehören vor Allem die plastische Wiedergabe von Objecten und die Photographie. Hinsichtlich der ersteren habe ich schon bei früherer Gelegenheit eine Lanze eingelegt und dagegen protestirt, dass Modelle, die in den Handel gebracht, d. h. publicirt sind, als wissenschaftliche Beweismittel einfach ignorirt werden.[1]) Die ödesten und unfruchtbarsten Schnittbeschreibungen finden Beachtung, Modelle dagegen, in denen die peinlich durchgearbeitete Synthese langer Schnittreihen vorliegt, gelten für Nichts. Das ist eine ungerechte Wertheinschätzung der beiden Arten von Leistungen. Speziell auf entwickelungsgeschichtlichem Gebiete sagt ein gutes Modell mehr, als hunderte der weitläufigsten Schnittbeschreibungen, ist somit diesen an wissenschaftlichem Werth weit überlegen.

Auch Photogramme, mögen sie in Form von Diapositiven oder in anderer Form in den Verkehr gebracht werden, haben das Recht, als Originalpublicationen angesehen zu werden. Ein Forscher, der seltene oder neu entdeckte Gegenstände Andern in Form von Photogrammen zugänglich machen soll, muss das Recht beanspruchen können, dass die Publication auch in dieser Form beachtet, und als sein geistiges Eigenthum anerkannt wird. Gedruckte Beschreibungen und Abbildungen einerseits, Modelle und in den Verkehr gebrachte Photogramme andererseits müssen als ebenbürtige Publicationsreihen respectirt werden. Nur, wenn dieser Grundsatz allgemeine Geltung erwirbt, kann man den Forschern zumuthen, einen in ihrem Besitz befindlichen Materialbestand der Allgemeinheit zugänglich zu machen.

---

1) Anatomischer Anzeiger 1895 Bd. X. S. 358. Ueber die wissenschaftl. Werthung veröffentlichter Modelle.

Anhang.

Ueber wissenschaftliche Stiftungen.

Die Achtung vor wissenschaftlicher Arbeit, sowie die Dankbarkeit für die von solcher Arbeit genossenen Vortheile hat von Alters her in edlen Gemüthern das Bedürfniss erweckt, die Förderung der Wissenschaft durch angemessene Stiftungen anzustreben. Die Gegenwart kennt sehr grossartige Stiftungen solcher Art: amerikanische Millionäre haben ganze Universitäten gegründet und in neuester Zeit hat der schwedische Ingenieur Nobel jährlich zu vertheilende Preise gestiftet, deren jeder an und für sich ein Vermögen repräsentirt. Sehr viel verbreitet sind Stipendien kleineren oder grösseren Betrages zur Unterstützung mittelloser Studirender.

Welches ist nun der beste Weg, durch bleibende Stiftungen die wissenschaftliche Arbeit zu fördern? Die bis jetzt vorzugsweise begangenen Wege sind: Stiftung von Stipendien, von wissenschaftlichen Preisen, von wissenschaftlichen Anstalten und Zuweisung von Geldmitteln an grössere wissenschaftliche Körperschaften, an Akademien, oder an bestehende Anstalten.

Stipendien. Der Gedanke, unbemittelten, aber geistig begabten jungen Leuten das Studium durch Stipendien zu ermöglichen, ist ein so natürlicher und humaner, dass wir uns nicht wundern dürfen, ihn schon seit Jahrhunderten in allen denkbaren Formen ausgeführt zu finden. Sicherlich ist dadurch schon unendlich viel Gutes geschaffen und Tausenden von tüchtigen Menschen der Weg in's Leben eröffnet worden. Bei aller Wohlthat, die durch solche Stipendien geschaffen worden ist, fehlt es indessen auch nicht an Gefahren. Wo die Legate in besonderer Weise festgelegt sind, als Familienstipendien, oder mit Bestimmung einer Ortszugehörigkeit, da wird ein Motiv in die Zutheilung gelegt, das mit der wissenschaftlichen Tüchtigkeit der Candidaten in keinem Zusammenhang steht. Solche Legate werden zuweilen zu eigentlichen Sinecuren für die berechtigten Empfänger. Allein auch bei etwas weitherzigeren Bestimmungen liegt immer die Gefahr vor, die Bedürftigkeit der Candidaten über deren Tüchtigkeit zu stellen. Es führt dies leicht zu einer Heranzüchtung von Mittelmässigkeiten, und wenn vollends die Stipendienbeträge so geringe sind, dass sie einen wesentlichen Theil des Lebens-

bedarfes nicht zu decken vermögen, so sind die Empfänger darauf angewiesen, an verschiedenen Thüren anzuklopfen, und es entwickelt sich dabei ein Bettelsystem, das für die Charakterbildung nichts weniger denn vortheilhaft ist. Wer Stipendien begründen will, der sollte diese weder zu eng vinculiren, noch zu klein bemessen, und er sollte streng festhalten, dass nur die Tüchtigkeit der Bewerber in Betracht gezogen werden soll. Auch ist bei kleinem Capital lieber eine ein- oder zweimalige Zutheilung anzuweisen, als der Ertrag unbedeutender Zinsen. Lieber sind einmal einem tüchtigen Menschen Tausend Mark zuzuweisen, als auf ewige Zeiten hinaus Almosen von 35 bis 40 Mark festzulegen.

Die Aussetzung wissenschaftlicher Preise ist wohl bis jetzt die beliebteste Form, in der freigebige Naturen die wissenschaftliche Arbeit zu fördern gesucht haben. Dabei werden entweder Preise für besondere zu lösende Aufgaben ausgeschrieben, oder es werden Summen bestimmt für die „besten Arbeiten“, die in gegebenen Zeiträumen auf diesem oder jenem Forschungsgebiete geliefert worden sind.

Die Ausschreibung besonderer Preisaufgaben erscheint in vielen Fällen als ein sehr werthvolles Mittel, einestheils die Bearbeitung bestimmter Fragen in Fluss zu bringen, anderntheils aber jüngeren Forschern eine von ihnen verlangte Arbeit einigermaassen zu honoriren. Wer indessen mit dem Wesen wissenschaftlicher Arbeit näher vertraut ist, der weiss, dass der wirklich productive Arbeiter nicht unter dem Einfluss äusserer Motive, sondern unter dem Zwang eigener Gedankenentwickelung vorwärts strebt. Auch scheint mir, dass bei bedeutenderen Preisbeträgen die Aufgaben so gestellt werden sollten, dass von vornherein auf bestimmte Forscher und auf deren Arbeitsrichtung Rücksicht genommen wird. Geschieht dies, dann kann der Preis wirklich eine wissenschaftliche Arbeit fördern, indem er dem Arbeiter von vornherein eine gewisse Unabhängigkeit von Lebensansprüchen oder eine Rückvergütung aufgewendeter Opfer in Aussicht stellt.

Anders stellt sich die Sache, wenn die Preise für die „besten Arbeiten“ in einem grösseren oder kleineren Arbeitsgebiet ausgesetzt sind. Gerade die allergrössten Preisbeträge (z. B. die Nobelpreise) sind in dieser Weise festgesetzt. Hierbei wird der Preis zu einer Belohnung hervorragender Verdienste. Dies kann als ein für sich zu erstrebendes Ziel angesehen

werden. Von unserem Standpunkte aus haben wir aber die Frage zu erheben: inwieweit wird die wissenschaftliche Arbeit dadurch gefördert?

Zunächst ist da wohl zu betonen, dass die Bewerthung als „beste Arbeit“ um so schwieriger, oder sagen wir geradezu um so willkürlicher ausfallen muss, je ausgedehnter das bezeichnete Arbeitsgebiet ist. Nehmen wir z. B. eine der Nobel'schen Bestimmungen, die der besten Arbeit auf medicinischem Gebiet: hier haben die verflossenen Jahrzehnte eine Reihe von hervorragenden Leistungen gebracht, die im Grund gar nicht gegen einander abzuwägen sind: um nur einige von theils theoretischer, theils practischer Natur hervorzuheben, die Lehre von den Centrosomen, die Neuronenlehre, die Forschungen über die Hirncentren, die Chronophotographie, die Entdeckungen betreffend die Schilddrüse und die Operationen des Struma, die Serumtherapie u. A. m. Lassen sich die Arbeiten von Golgi, oder von Ramon y Cajal gegen Behring's Serumtherapie, die Marey'sche Chronophotographie gegen die 2000 Kropfoperationen von Kocher in die Wagschale werfen? Es sind eben unter sich incommensurable Leistungen, und selbst wenn man den Kreis viel enger zieht, so wird man ohne ungerecht zu sein, von den verschiedenen an einer fortschreitenden Bewegung betheiligten Forschern nur selten den einen unvergleichlich viel höher stellen können, als die anderen. Wiederholt sich die Ertheilung solcher Preise sehr oft, so kann zwar eine gewisse conventionelle Reihenfolge von Fächern eingeführt werden, oder es können die in einem Jahr begangenen Unbilligkeiten in einem folgenden ausgeglichen werden. Die letzte Frage bleibt aber immer die: „Wird durch solche Preise die wissenschaftliche Arbeit wirklich gefördert?“

Ich glaube, man kann diese Frage ruhig verneinen: kein aus innerem Antrieb arbeitender Forscher wird dadurch, dass ihm das Schicksal eine grössere Summe Geldes in den Schooss wirft, ein Anderer werden. Er wird eben über die Ehre des Preises und über den empfangenen Betrag sich freuen, im Uebrigen aber seinen Gang weiter gehen, als ob Nichts geschehen wäre. Und wer den Preis nicht bekommt, wird nicht anders verfahren. Höchstens liegt für den letzteren, wenn er nicht edel veranlagt ist, die Versuchung vor, dem begünstigten Collegen, oder denen, die über den Preis zu bestimmen hatten, unfreundliche Gefühle nachzutragen.

Ich komme auf die Grundfrage zurück: *Wie sind wissenschaftliche Stiftungen zu gestalten, damit sie am besten den Zweck erfüllen, die wissenschaftliche Arbeit zu fördern?*

Verschiedene Zeiten stellen verschiedene Anforderungen und auch in verschiedenen Ländern sind die zu erfüllenden Forderungen verschiedene. Sowie die Dinge jetzt stehen, stösst die vordringende Arbeit überall auf die Schwierigkeiten der Materialbeschaffung, und auf die der Herausgabe geleisteter Arbeit.

Bald bedarf es der Mittel zur Ausführung weit ausgedehnter Reisen, bald der Beschaffung kostbarer Apparate, oder der Herstellung von umfangreichen Tafeln u. s. w. In gewissen Fällen mag auch das Bedürfnis vorliegen, den Bearbeitern bestimmter Gebiete für kürzere oder längere Zeit Honorare zu bewilligen. Kurz zusammengefasst, für die Förderung wissenschaftlicher Arbeit braucht es Geld und zwar je länger je mehr Geld. — In richtiger Erkenntniss von der Bedeutung der wissenschaftlichen Arbeit auch für den Staat geschieht von den Regierungen aus Vieles, aber auch die Regierungen haben gebundene Hände, und da erscheint es nun besonders wichtig, dass es wissenschaftliche Corporationen giebt, seien es Akademien oder freie Gesellschaften, denen eine möglichst unbeschränkte Verfügung über möglichst ausgedehnte Mittel zusteht. Verhältnissmässig günstig steht in der Hinsicht die Berliner Akademie, und sie greift auch mit ihren Mitteln allenthalben fördernd ein. Aber selbst hier sind die zu stellenden Ansprüche noch sehr viel grösser, als die anscheinend so reichen Mittel.

Wie die Corporationen heissen, denen die Verfügung über grössere Mittel anvertraut werden, ob es Akademien, Facultäten oder freie Vereinigungen sind, ist von nebensächlicher Bedeutung. Das Wesentliche ist, dass denselben eine möglichst freie Verfügung über die zugewiesenen Mittel gelassen wird, wobei es ja dem betr. Stifter immer unbenommen bleibt, seine Wünsche mehr oder minder genau zu formuliren. Ausdrücklich spreche ich hier von Wünschen, denn die Forderungen ändern sich im Laufe der Jahre. Was heute nützlich erscheint, kann in 30 Jahren überflüssig sein, und so muss die Verwendbarkeit der Mittel den wechselnden Ansprüchen der Zeiten sich anpassen lassen.

Corporationen, mögen sie so oder anders heissen, bestehen aus Menschen und Menschliches wird auch in deren Beschlüssen

gelegentlich mit unterlaufen. Im Ganzen und Grossen aber dürfen wir voraussetzen, dass zu Verwaltern grosser Stiftungen stets solche Männer berufen werden, die sich der Verantwortlichkeit ihrer Entscheidung vollauf bewusst bleiben, und dass sich im Verlauf der Zeit allgemeine, von grossen Gesichtspunkten ausgehende Grundsätze hinsichtlich der Verwendung derartig anvertrauter Mittel herausbilden werden.

Druckfertig erklärt 29. VII. 1901.]

INHALT.

Seite

C. Neumann, Ueber eine neue Methode zum Beweise der sogenannten Schliessungstheoreme 319

Gerhard Kowalewski, Ueber Fusspunktcurven von Ovalen mit Mittelpunkt. 333

E. Study, Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie. 338

Friedrich Engel, Zur Flächentheorie. Erste Mittheilung 404

Wilhelm His, Ueber wissenschaftliche Centralanstalten und speciell über Centralanstalten zur Förderung der Gehirnkenntniss. . 413

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

L Soc 1726.11

APR 10 1902

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

VI.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1901.

Einzelpreis 80 Pfg.

APR 10 1902

SITZUNG VOM 21. OKTOBER 1901.

Vortrag hielt:

Herr O. WIENER, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn ERICH MARX: „Ueber ein Hochfrequenz-Messgeräth zur Bestimmung von Periode, Capacität und Selbstinduction eines Entladungskreises.“

Erich Marx: *Ueber ein Hochfrequenz-Messgeräth zur Bestimmung von Periode, Capacität und Selbstinduction eines Entladungskreises.*

1. Die Messung der Dispersion HERTZ'scher Wellen in verschiedenen Substanzen ist bisher noch nicht nach einer Methode angestellt, die ein continuirliches Variiren des Wellenbereiches gestattet hätte. Zwar sind in dem Schwingungsbereich $10^{-9} - 10^{-10}$ von verschiedenen Forschern Messungen gemacht worden, die in sofern als nach einer Methode angestellt betrachtet werden können, als sie alle mit „Drahtwellen“ ausgeführt sind, und der BLONDLOT'sche Erreger in verschiedenen Dimensionen in Verwendung kam. Für die Perioden $10^{-7} - 10^{-9}$ aber, bei denen das Arbeiten mit Drahtwellen, schon wegen des erforderlichen Platzes auf Schwierigkeiten stösst, fehlt bisher eine einheitliche, continuirlich variirbare Methode.

Ein principielles Interesse, das eine solche Methode beanspruchen würde, liegt in dem Umstand, dass in diesem Schwingungsbereich von verschiedenen Forschern Abweichungen im Werthe der Dielectricitätsconstante verschiedener Substanzen gefunden wurden. Wenn nun auch diese Abweichungen der Messungen grösser sind, als der von den verschiedenen Forschern angegebene „mögliche Fehler“ beträgt, so liegt schon allein in dem Mangel an Einheitlichkeit der Messmethode ein berechtigtes Bedenken gegen ein wirkliches Vorhandensein einer Dispersion für verhältnissmässig so langsame Schwingungen. Es erschien mir um so mehr geboten, eine solche Methode zu suchen, als in der Zusammenstellung der verschiedenen Werthe für die Brechungs-

exponenten einiger Substanzen[1]) dieses Bedenken, wie mir von verschiedener Seite gesagt wurde, nicht genügend zum Ausdruck kam.

Während ich nun seit April dieses Jahres mit der Ausarbeitung eines Apparates, dessen Theorie und Constructionsprincip in Folgendem beschrieben ist, beschäftigt bin, ersehe ich aus dem soeben erschienenen Buche des Herrn Prof. Braun „Drahtlose Telegrafie“ (Anmerkung S. 66), dass auf seine Veranlassung mit Ausarbeitung derselben Idee, Herr Mandelstamm in Strassburg zu gleicher Zeit beschäftigt gewesen, oder z. Zt. noch beschäftigt ist. Dies veranlasst mich, jetzt bereits meinen Apparat zu beschreiben, und es soll in Folgendem seine Theorie und sein Constructionsprincip angegeben werden. Er ermöglicht im Schwingungsbereich $10^{-7} - 10^{-9}$ die Dielectricitätsconstante verschiedener Substanzen zu untersuchen und allgemein Periode, Selbstinduction und Capacität eines Hochfrequenzkreises zu ermitteln.

2. Das Princip, das zur Lösung dieser Aufgabe in Verwendung kommt, beruht auf dem unterschiedlichen Verhalten des Ohm'schen Widerstandes der metallischen Leiter und der electrolytischen gegenüber rasch wechselnden Strömen und in der Möglichkeit, für eine Selbstinduction einen äquivalenten Widerstand setzen zu können. Während ein Electrolyt für Hertz'sche Wellen den gleichen Ohm'schen Widerstand hat, wie für Gleichstrom, ist der Widerstand eines metallischen Leiters von der Periode des wechselnden Stromes abhängig. Schaltet man einen selbstinductionslosen Electrolyt parallel mit einer metallischen Selbstinduction, so lässt sich nach den Formeln Steffan's und Raylais' ausrechnen, dass sich die Selbstinduction wenig, der electrolytische Widerstand gar nicht mit der Periodenzahl des Hochfrequenzstromes ändert; wohl aber ändert sich mit der Periode der Ohm'sche Widerstand der Selbstinductionsrolle und die electromotorische Gegenkraft derselben. Regulirt man nun den Widerstand des Electrolyts so, dass in beiden Zweigen gleiche Stromstärke herrscht, so ergiebt eine sehr einfache Relation zwischen dem Electrolyt-Widerstand und der Selbstinduction der Spule den Werth der Periodenzahl des angewandten Hochfrequenzstromes.

---

1) cf. E. Marx, Inauguraldissertation Göttingen 1898, Wied. Ann. Bd. 66, pag. 411 u. folg. und pag. 597 u. folg.

3. Es gabele sich der Strom $J_0 = A \cdot \cos(mt)$ wo $m = \frac{2\pi}{T}$ und T die Periode bedeutet in J_1 und J_2 (Fig. 1) mit den Widerständen ω_1, ω_2 und der Selbstinduction p_1, p_2; ferner bezeichne $p_{1,2}$ den gegenseitigen Inductionscoefficienten, dann ist[1])

$$J_1 = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + (p_2 - p_{1,2})^2 \cdot m^2}{(\omega_1 + \omega_2)^2 + (p_1 + p_2 - 2\,p_{1,2})^2 \cdot m^2}} \cdot \cos(mt - \varphi_1)$$
$$= A_1 \cos(mt - \varphi_1)$$

(1)
$$J_2 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + (p_1 - p_{1,2})^2 \cdot m^2}{(\omega_1 + \omega_2)^2 + (p_1 + p_2 - 2\,p_{1,2})^2 \cdot m^2}} \cdot \cos(mt - \varphi_2)$$
$$= A \cos(mt - \varphi_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{m\{\omega_2 (p_1 - p_2) - \omega_1 (p_2 - p_1)\}}{\omega_2 (\omega_1 + \omega_2) + (p_1 + p_2 - 2\,p_{1,2})(p_2 - p_{1,2})\,m^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{m\{\omega_1 (p_2 - p_1) - \omega_2 (p_1 - p_2)\}}{\omega_1 (\omega_1 + \omega_2) + (p_1 + p_2 - 2\,p_{1,2})(p_1 - p_{1,2})\,m^2}$$

Die Stromvertheilung der electrischen Schwingungen, wie sie durch diese Formeln gegeben ist, wurde von Puluy[2]) zur Bestimmung des Inductionscoefficienten p benutzt; man kann dieselben nun leicht zur Lösung der oben gestellten Aufgabe benutzen, wenn in beiden Zweigen $J_1 = J_2$ wird, vorausgesetzt, dass die Einrichtung so getroffen ist, dass die Messung des Stromes unabhängig ist von der Phasenverschiebung des Stromes in den beiden Zweigen, die ja in Folge der Selbstinduction eintreten muss.

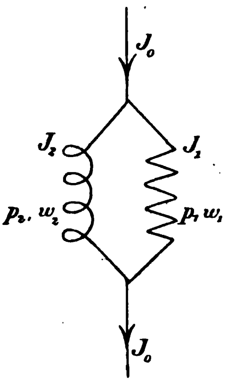


Fig. 1.

Kommt also der zeitliche Werth der Phase nicht in Betracht, und wird $J_1 = J_2$, so ist

(2) $$m^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{p_1^2 - p_2^2 - 2\,p_{1,2}\,(p_1 - p_2)}.$$

Schaltet man, wie oben bereits angegeben, einen electrolytischen Widerstand (ω_1 gross, p_1 klein) von geringer Länge parallel mit einer Selbstinduction [ω_2 klein, p_2 gross],

1) cf. Winkelmann's Handbuch (Oberbeck), III, 2, pag. 394.
2) El. Zeitschr., 12, pag. 346—351, 1891.

erfüllt ferner die für Formel (2) angegebene Bedingung und macht $p_{1,2}$ klein gegen p_2, so wird die Periode der Schwingung gegeben durch

(3) $$m = \frac{\omega_1}{p_2}.$$

Ist nicht die Schwingungsdauer, sondern etwa die Capacität oder Selbstinduction eines Stromkreises gesucht, so braucht man nur eine bekannte Selbstinduction oder Capacität zu dem schwingenden Kreise zu schalten. Ist C_x die gesuchte, C_0 die bekannte Capacität, p_x der Coefficient der Selbstinduction, so ist

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{p_x \cdot C_x}} \qquad m_2 = \frac{1}{\sqrt{p_x (C_x + C_0)}}$$

also

(4) $$C_x = \frac{C_0}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}; \quad p_x = \frac{1}{m_1^2 \cdot C_x},$$

wo ω_1, ω_2 die am Flüssigkeitswiderstand abgelesenen Widerstandswerthe sind.

4. Ohne an dieser Stelle auf Einzelheiten der Construction einzugehen, deren specielle Beschreibung erst nach Fertigstellung der Messungen erfolgen soll, möge Fig. 2 die Gesammt-Anordnung erläutern. Hierin ist ω der Electrolyt mit „unpolarisirbaren" Electroden, dessen Widerstand variirt werden kann. Die metallische Zuführung geschieht ausserhalb der Flüssigkeit und besteht aus in einander verschiebbaren Röhren. H sind 1 cm lange, 0,025 cm dünne Drähte, die parallel ausgespannt sind. Die Orte der Stromzuführung sind durch die Pfeile angezeigt.

T sind die Thermoelemente aus Eisen-Constanten, welche die Erwärmung der Hitzdrähte messen, und zu den Rollenpaaren eines Differentialgalvanometers führen. Es ist klar, dass diese Art der Strommessung von dem Einfluss der Phasenverschiebung frei ist. Die Schaltung dient zur Commutirung der Thermoströme und Auswechselung der Rollen. P ist ein genau berechenbares System, das dazu dient, den Inductionscoefficienten des Zweiges $r + p + H_1$ zu bestimmen.

5. Was schliesslich die Schaltung des Apparates anbetrifft, so ist natürlich jede möglich, welche den beiden Zweigen den Strom des zu bestimmenden Systems zuführt; die primäre Strom-

stärke darf hierbei geschwächt sein, wenn nur die Periode erhalten bleibt. Ferner aber wird darauf zu achten sein, dass eine etwaige Eigenschwingung des Apparates die Messung nicht stört.

Letzterer Fehlerquelle kann man dadurch begegnen, dass die Hitzdrähte symmetrisch und benachbart zu einem der Zuführungsdrähte gelegt werden.

Viel schwieriger ist der Beeinflussung des Primärsystems durch die Messvorrichtung zu begegnen. Man kann sich hier auf verschiedene Weise helfen.

Erstens kann man das System im Nebenschluss zum schwingenden Kreise legen. Hierdurch wird zwar die Capacität des Primärkreises etwas erhöht, aber um einen Betrag, der sehr klein ist gegen die eigene. Die Selbstinduction wird durch einen solchen Nebenschluss um ein sehr geringes geschwächt, vorausgesetzt, dass die Abzweigungsstellen noch genug zusammengerückt werden können, was bei der ausserordentlichen Empfindlichkeit der Thermoelemente möglich ist.

Nach meinen bisherigen Erfahrungen scheint es aber bei dieser Anordnung der Verwendung von Hitzdrähten vortheilhafter zu sein, die Zuführung des Hochfrequenzstromes zum Messapparat durch einen hohen Widerstand von geringer Capacität erfolgen zu lassen, und die zweite Zuführung zur Erde abzuleiten.

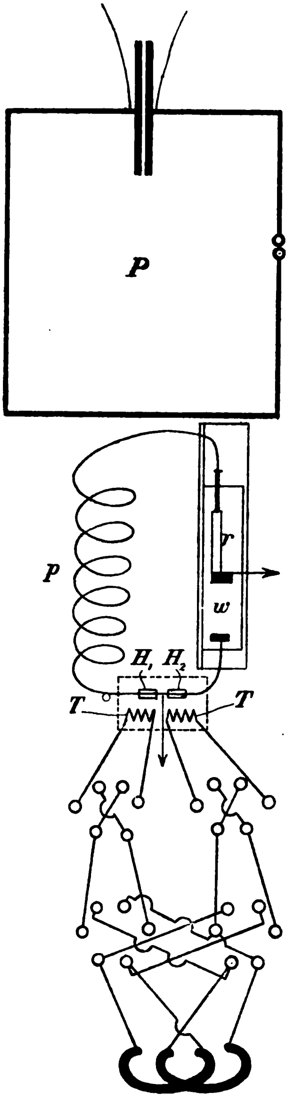


Fig. 2.

Eine directe Hintereinander-Schaltung des beschriebenen Apparates wird nur dann gestattet sein, wenn die Schwingungsdauer des Apparates sehr gross ist.

In der Vermeidung der Beeinflussung der Schwingungsdauer des Primärkreises durch den Messapparat liegt die Hauptschwierigkeit; bisher ist es mir gelungen, den wahren Werth der Schwingungsdauer eines Normalkreises auf etwa 3% genau zu erreichen; die Fehler liegen hierbei einseitig. Sei es nun, dass bei den definitiven Messungen auch dieser Fehler beseitigt wird, oder eine Correction eintreten muss, so viel ist klar, dass um die Abweichungen der Dielectricitätsconstante um 2% des Werthes festzustellen, nur erforderlich ist, dass die Ablesungen des Apparates unter sich eine Sicherheit haben, welche diesen Werth genügend übersteigt, da es gar nicht ausgeschlossen ist, dass bei der Schwierigkeit der exacten Berechnung eines noch so einfachen Kreises aus Normalcondensator und Drahtrechteck der am beschriebenen Apparat abgelesene Werth der Wahrheit näher kommt, als der berechnete.

6. Die hier angegebene Versuchsanordnung soll nur schematisch eine der möglichen andeuten. Für den Fall der Parallelschaltung des Apparates zum schwingenden System, der wohl bei weitem der Vorzug zu geben ist, kann man z. B. vortheilhafter so verfahren, dass man die Thermoelemente direct in den Secundärkreis schaltet und die Galvanometerleitung mit Drosselspulen an die Pole der Thermoelemente legt. Alsdann ist ein kleiner Condensator in einen der Zuführungsdrähte zu schalten, um zu verhindern, dass etwa der Thermostrom T_1 in der Zuführung einen Nebenschluss findet. Hierbei ist natürlich der Widerstand der Thermoelemente zu berücksichtigen.

Ueber die erreichten Resultate und Einzelheiten dieser Anordnung wird später berichtet werden.

Die Mittel des Instituts wurden mir in liebenswürdigster Weise von dessen Leitung zur Verfügung gestellt.

Leipzig, Phys. Institut der Universität.

Druckfertig erklärt 2. XII. 1901.]

GESAMMTSITZUNG DER GESELLSCHAFT VOM 14. NOVEMBER 1901. (LEIBNIZ-SITZUNG.)

Vorträge hielten:

Herr MARTIN KRAUSE, o. M.: Nekrolog auf OSCAR SCHLÖMILCH.

Herr ARTHUR VON OETTINGEN, o. M.: Eine Forderung der malerischen Perspective vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet.

Herr OTTO HÖLDER, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von F. HAUSDORFF in Leipzig: Ueber eine gewisse Art geordneter Mengen.

Arthur von Oettingen: *Eine Forderung der malerischen Perspective vom mathematischen Standpuncte aus betrachtet.*

Unter malerischer oder Central-Perspective versteht man die Projection räumlicher Gebilde von einem Puncte aus. Im Nachfolgenden beschränken wir uns auf die Abbildung auf einer ebenen Fläche.

Eine durch das Auge gehende horizontale Ebene schneidet die Bildfläche in einer geraden Linie, genannt *„Horizont“*. Eine Lothlinie vom Auge auf das Bild trifft einen Punct des Horizontes, genannt *„Hauptpunct“*, die Entfernung des Auges vom Bilde heisst die Augendistanz oder kurz *„Distanz“*. Horizont H, Hauptpunct O und Augendistanz D sind die allen mathematischen perspectivischen Constructionen zu Grunde liegenden *„Elemente“*, die wir immer kurz mit H, O und D bezeichnen wollen. Der Ort des Auges im Raume heisse A, er ist das Projectionscentrum oder kurz *„Centrum“* des Bildes. Beim Beschauen des Bildes muss das Auge sich in diesem Centrum A befinden; es erhält dann alle Projectionsstrahlen ebenso, wie wenn es dem räumlichen Gebilde gegenüber sich befände.

Nun aber wird praktisch verlangt, es solle bei *excentrischer Betrachtung* das Bild auch richtig aufgefasst werden können, dabei solle das Auge durch keine Verzerrung beleidigt werden. Diese Forderung scheint um so mehr berechtigt, als man vom

Beschauer, selbst bei rein mathematischen oder architektonischen Zeichnungen, nicht verlangen kann, dass er aus der Zeichnung sich das Centrum herausfinde oder herausanalysire. Vollends in Museen ist man völlig ausser Stande, Gemälde so anzubringen, dass das Auge sich im Centrum befinde. Dasselbe gilt für wissenschaftliche Darstellungen auf Tafeln oder in Büchern.

Es liegt nahe zu glauben, es sei diese Forderung ganz unerfüllbar. Indess ist das so allgemein ausgesprochen ein Irrthum. Streng mathematisch lässt sich vielmehr untersuchen, ob Constructionen vorkommen, die von der Lage des Horizontes H, des Hauptpunctes O oder der Distanz D unabhängig sind, oder von zweien dieser drei Grössen oder gar von allen dreien. Giebt es aber solche, so fällt für sie die Beschränkung auf centrisches Beschauen fort. Es giebt alsdann Gebiete, von denen aus das Bild oder Theile des Bildes in vollkommener Richtigkeit erscheinen, sei es von begrenzten Gebieten des Raumes, sei es von Puncten des ganzen Raumes aus, ohne dass das Auge durch Verzerrungen gestört wird.

Vielfach sind die dargestellten Gebilde überhaupt nicht von streng mathematischer Gestaltung und dann ist die excentrische Betrachtung auch kaum gefährdet, wie man das täglich in Museen erfahren kann. Hierher gehören Landschaften. Darstellungen von Gebirgen, Hügeln, Wäldern, Wiesen werden in Museen bald hoch, bald niedrig angebracht, ohne dass der Beschauer sich zu beklagen hat. Dabei kommt das Auge meist und oft recht tief unter den Horizont zu stehen. Allein in solchem Falle tritt helfend eine Illusion ein, d. h. die Fähigkeit das Bild so aufzufassen, als befände sich das Auge in der Senkrechten über dem Bilde, ähnlich wie wir in einem schief vor uns liegenden Buche zu lesen vermögen.

Kommen aber in der Landschaft Gebäude vor, Menschen, Thiere oder Bäume gleicher Höhe, Alleen, Decorationen strengen Styles, so gelten schon Gesichtspuncte, wie wir sie aufsuchen wollen für rein geometrische Gebilde. Bei diesen haben wir allerdings oft gar kein Interesse an der absoluten Grösse. So z. B. bei der Zeichnung eines beliebigen Parallelopipedons, dessen Kanten und Winkel in keinem bestimmten Verhältniss stehen. Anders beim Würfel, wo die Gleichheit aller Seiten auch gesehen und erkannt werden soll. Sätze, die wir im Interesse geometrisch richtiger Auffassung finden, werden deshalb auch für die Staffage

der Landschaft, insbesondere für architektonische Reproductionen Geltung haben. Besonders geeignet zur Illustration der aufzustellenden Sätze können uns Photographien dienen, da sie fehlerlos optische Centralprojectionen liefern.

Vom mathematischen Gesichtspuncte aus können nun folgende sechs Fälle unterschieden werden:

1) Die Constructionen sind unabhängig von allen drei Grössen H, O und D. Mithin sind von jeder beliebigen Stelle des Raumes die betreffenden Theile als richtig zu erkennen.

2) Die Construction ist unabhängig von H und D, aber abhängig von O allein. Also erlauben die Theile des Bildes eine beliebige Entfernung vom Bilde in der Blicklinie und ausserdem eine Drehung der Bildfläche um die Blicklinie als Axe. Dieser letztere Umstand ist nur von mathematischem, ersterer aber auch von künstlerischem Interesse.

3) Die Constructionen sind unabhängig von O und D, aber abhängig von H. Das Bild verträgt also jeden Standpunct in der gesammten Horizontebene, die durch das Auge hindurchgeht. Bei Senkungen und Hebungen des Auges hilft die Phantasie sich auf die richtige Höhe zu versetzen, so dass oft überall gute Eindrücke zu erhalten sind. Indess erscheinen die betreffenden Theile vollkommen richtig nur in der Horizontebene.

4) Die Constructionen sind unabhängig von H, dagegen abhängig von O und D. Offenbar ist eine Drehung des Bildes in seiner Ebene um O herum gestattet. Künstlerisches Interesse dürfte kaum zu finden sein, sofern Verticalität eine unentbehrliche aesthetische Forderung ist.

5) Die Constructionen sind unabhängig von D, dagegen abhängig von H und O. Das Auge darf also in der ganzen Blicklinie sich frei bewegen, ohne dass Verzerrungen entstehen.

6) Die Constructionen sind von allen drei Stücken H, O und D abhängig. Das Bild verträgt in keinem seiner Theile excentrisches Beschauen, es sei denn dass an die Phantasie appellirt wird.

Noch zwei Combinationen der drei Stücke sind denkbar, nämlich Unabhängigkeit von H und O bei Abhängigkeit von D allein; ferner Unabhängigkeit von O bei Abhängigkeit von H und D. Diese beiden Fälle kommen indess niemals vor, weil eine Abhängigkeit von D immer zugleich eine solche von O mitbedingt. Die vorstehenden sechs Fälle betrachten wir nun im mathematischen und im künstlerischen Interesse.

I. Constructionen, unabhängig von H, O und D.

In diesem Falle giebt *jede Stellung des Auges richtige Eindrücke.* Hierher gehört ein grosses Gebiet von Zeichnungen, daher dieser Fall von grossem Interesse auch für malerische Anwendung ist.

Erstens sind alle in frontalen, d. h. in den der Bildfläche parallelen Ebenen liegenden Figuren der abgebildeten Form streng geometrisch ähnlich; m. a. W. in jeder Frontalebene gilt eine gewöhnliche Linien- und Winkel-Geometrie. Hieraus erhalten wir die These:

„*Alle in frontalen Ebenen liegenden Gebilde, Strecken und Winkel, sind stets richtig und erscheinen auch excentrisch in richtigem Verhältniss.*“ Hierbei muss allerdings vorausgesetzt werden, dass bei schräger Betrachtung des Bildes der Winkel zwischen Blickrichtung uud Bildfläche nicht allzusehr von einem Rechten abweicht; es hat kein Interesse von gar zu weit gehenden Verkürzungen der Bildfläche zu reden.

Zweitens gehört hierher ein anderes grosses Gebiet, nämlich die perspectivische Theilung einer gegebenen Strecke und ebenso auch die Vervielfältigung einer gegebenen Strecke. Sobald eine Linie soweit bestimmt ist, dass ihr Fluchtpunct gefunden werden kann, so ist die Theilung unabhängig von allen drei Elementen. Es sei z. B. eine Strecke AB gegeben und ihr Fluchtpunct F; es soll AB gehälftet werden. In der Praxis wird alsdann meist H, O und D verwandt. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, die Theilung sei von den drei Elementen abhängig, denn eine Theilung nach gegebenem Verhältniss ist sehr wohl ohne jene Grössen ausführbar. Das ist auch längst bekannt und lässt sich leicht erweisen. Der perspectivische Halbirungspunct von AB ist nämlich der dem Puncte F zugeordnete harmonische Punct. Die

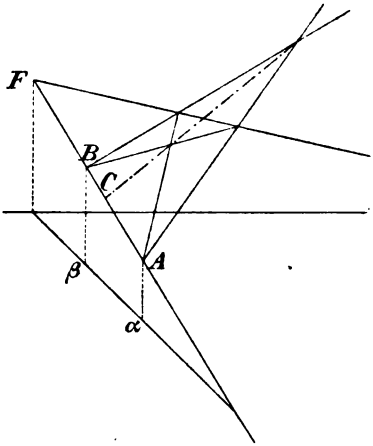


Fig. 1.

bekannte Construction anf Grund des vollständigen beliebig gezogenen Vierseits, s. Fig. 1, giebt sofort den perspectivischen Halbirungspunct C. Aehnlich bei anderen Theilungen. Abgesehen von den harmonischen Beziehungen kann man auch so verfahren: Es sei in Fig. 2 AB in n Theile zu theilen: Man ziehe AM in beliebiger Richtung und FN parallel zu MA, theile MA in die geforderte Anzahl von Theilen und projicire von N aus nach diesen Theilpuncten, so schneiden diese Geraden die gegebene Linie in den gesuchten Puncten. Ganz analog ist das Verfahren bei Vervielfältigung gegebener Strecken. In Fig. 1 sei AC gegeben und soll verdoppelt werden. Man suche dann zu A den zugeordneten harmonischen Punct B, während C und F das andere Paar bilden. Analog der Fig. 2 kann man auch verfahren. Aus alledem folgt die überaus wichtige These:

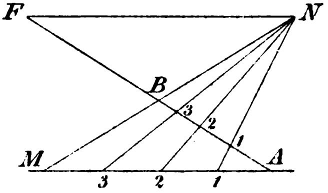


Fig. 2.

„In allen perspectivischen Zeichnungen erscheinen die Theilungen und Vervielfältigungen der Strecken immer, d. h. auch bei excentrischem Betrachten vollkommen richtig.“ Wenn man also bei der Miniaturperspective sich beklagt, dass die absoluten Strecken irreleitend erscheinen, so wird man doch an den Proportionen Nichts aussetzen können, wovon sich praktisch zu überzeugen man bei jedem Bilde Gelegenheit findet. Wenn ferner etwa Säulen *nicht* in gleichen Abständen von einander stehen, so kann *dieses Verhalten auch excentrisch gesehen und richtig beurtheilt werden.* Freilich bezieht sich obige These nur auf Theilung und Zusammensetzung von *Strecken,* nicht aber auf *Winkeltheilungen.* Sind z. B. zwei Linien gegeben, so ist nur, wenn sie in Frontalebenen liegen die Halbirung des zwischenliegenden Winkels oder die beliebige Theilung ausführbar ohne jene drei Elemente, sonst aber, d. h. in jeder beliebigen Ebene ist die Kenntniss von O und D erforderlich.

II. Constructionen, unabhängig von H und O, abhängig von D.

Die Zeichnung verträgt eine Drehung um die Blicklinie als Axe, zugleich eine beliebige Entfernung des Auges von der Bildfläche in der Blicklinie selbst, also gar kein Heraustreten aus dieser. Hierher gehören wohl nur die *frontal-stathmalen Stellungen*

rechtwinkliger Gebilde, wie solche bei Häuseraufnahmen beliebt sind. Ich nenne stathmal alle Ebenen, die vertical und zugleich orthogonal gegen die Bildfläche sind, oder die senkrecht zu allen horizontalen und zu allen frontalen Ebenen sind.[1] — Mag bei solchen frontal-stathmalen Stellungen das Auge noch so weit in der Blicklinie sich entfernen, der rechte Winkel wird immer als solcher erscheinen. Blickt man von der Seite auf das Bild, so erhält man die bekannten interessanten Erscheinungen, indem z. B. ein en face aufgenommenes Porträt der veränderten Blickrichtung zu folgen scheint. Dabei sind die Augen des Porträts immer auf den Beschauer gerichtet. Eine gerade nach dem Hintergrunde verlaufende Strasse oder Allee folgt ganz ebenso dem Beschauer; es bleiben frontale Linien frontal, mithin müssen die *rechten Winkel jetzt einerseits stumpf, andererseits spitz aussehen.* Von diesem Eindruck sich in der Phantasie zu befreien ist keineswegs leicht.

Bei der Frontalstellung der Gebäude kommt noch eine ganz andere Frage in Betracht, nämlich die bekannte elliptische Gestalt von Abbildungen solcher Kugeln, die sich auf den Seiten des Bildes befinden, ebenso die Verdickung von Säulen, die am Bildrande, im Vergleich zu denen in der Mitte befindlichen, sich zeigt. Die Forderung der Aesthetik, dass auch hier bei seitlicher Betrachtung des Bildes keine Verzerrung merklich werde, ist vollkommen berechtigt. Da diesem Verlangen mathematisch von der Centralperspective streng genommen nicht genügt werden kann, so liegt es nahe, einen vermittelnden Weg zu suchen. Zunächst aber kann das Problem psychophysisch gefasst werden. Es kann gefragt werden, *welche Verdickung unter der Unterschiedsempfindlichkeit bleibt.* Offenbar wird es weniger auf den absoluten Unterschied der beiden zu vergleichenden Strecken (Dicken) ankommen, als vielmehr auf ihr *Verhältniss.*

Betrachten wir zwei Kugeln, so genügt es einen Querschnitt zu discutiren. In der Horizontebene befinde sich ein Kugelpaar und zwar die eine mit dem Centrum B in der verlängerten Blicklinie AO, die andere mit dem Centrum C in derselben Frontal-

---

1) In Betreff der *streng systematischen* Unterscheidung und Benennung der Hauptlinien und Hauptebenen verweise ich auf meine „Elemente des geometrisch-perspectivischen Zeichnens“, Leipzig, W. Engelmann, 1901, Seite 33 ff.

ebene, also parallel der Bildebene (Fig. 3). Nun ist $OH = x$ das Bild des Schnittes als Projection von BG, welches senkrecht steht zur Tangente AG. Wenn ferner CJ senkrecht steht zu

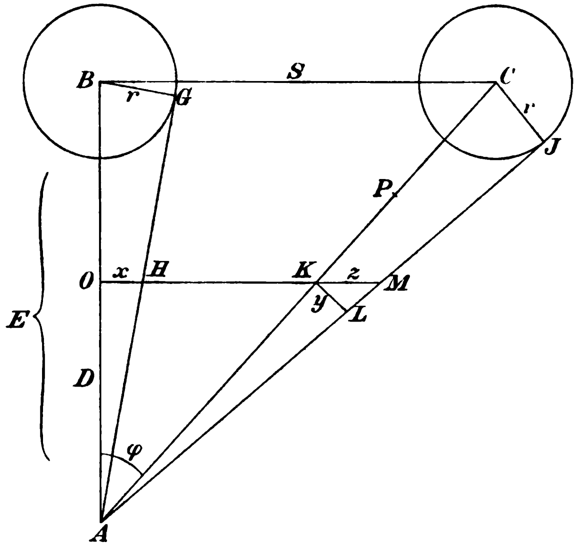


Fig. 3.

AJ, so wäre $KL = y$ die Projection von CJ auf eine Senkrechte zu AC. Also $KM = z$ das auf der ebenen Tafel erhaltene Bild. Nun ist

$$AOH \sim AGB$$

und

$$AKL \sim AJC,$$

folglich

$$x : AO = BG : AG$$

und

$$y : AK = CJ : AJ.$$

Nun ist $AO = D$. Es sei ferner AB, die Entfernung des Objectes vom Auge $= E$, $BG = CJ = r$, $BAC = \varphi$, also $AK = D / \cos\varphi$. Also ist

$$x : D = r : \sqrt{E^2 - r^2}$$

und

$$y : \frac{D}{\cos\varphi} = r : \sqrt{\frac{E^2}{\cos^2\varphi} - r^2}$$

und, wenn $\frac{r}{E} = \varrho$ gesetzt wird,

$$x = \frac{r \cdot D}{\sqrt{E^2 - r^2}} = \frac{rD}{E \cdot \sqrt{1 - \varrho^2}} = \frac{\varrho \cdot D}{\sqrt{1 - \varrho^2}}$$

und

$$y = \frac{r \cdot D}{\cos\varphi \sqrt{\frac{E^2}{\cos^2\varphi} - r^2}} = \frac{r \cdot D}{E\sqrt{1 - \varrho^2 \cos^2\varphi}} = \frac{\varrho D}{\sqrt{1 - \varrho^2 \cos^2\varphi}}.$$

Man sieht hieraus, dass y immer kleiner ist als x, weil der Nenner von y grösser ist als der von x, wenn auch nur um einen sehr kleinen Betrag, denn ϱ ist klein, vollends ϱ^2. Aber y hat kein weiteres Interesse für uns; die Strecke $KM = z$ ist es, die wir suchen und mit x zu vergleichen haben. Nun ist

$$z = \frac{y}{\cos\varphi} = \frac{\varrho \cdot D}{\cos\varphi \sqrt{1 - \varrho^2 \cos^2\varphi}}.$$

Durch den Werth $\cos\varphi$ im Nenner wird nun z stets grösser als x. Die Differenz beider Grössen giebt, wenn wir noch die vierte Potenz von ϱ vernachlässigen,

$$z - x = \varrho D\left(\frac{1 + \frac{1}{2}\varrho^2 \cos\varphi}{\cos\varphi} - (1 + \tfrac{1}{2}\varrho^2)\right).$$

Die relative Verdickung wird

$$\frac{z - x}{x} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\varrho^2 \cos^2\varphi}{\cos\varphi\,(1 + \frac{1}{2}\varrho^2)}\right) - 1.$$

Das Verhältniss der beiden Strecken dagegen giebt

$$\frac{z}{x} = \frac{1 + \frac{1}{2}\varrho^2 \cos^2\varphi}{1 + \frac{1}{2}\varrho^2} \cdot \sec\varphi.$$

Im Wesentlichen steckt also die gesuchte Verdickung doch nur im Verhältniss von $1 : \cos\varphi$, denn der übrige Factor ist ein von der Einheit wenig abweichender Bruch.

Die *Differenz* $z - x$ ist, wenn r gegeben ist, proportional $\frac{D}{E}$, während im *Verhältniss* $\frac{z}{x}$ dieser Factor sich aufgehoben hat. Ein Blick auf die Zeichnung bestätigt dieses Verhalten, denn eine der früheren parallele Bildfläche liesse z und x, einander proportional, also in gleichem Verhältniss sich ändern, dagegen ist $z - x$ proportional der Strecke D und bei fester Distanz D ist die Bildgrösse umgekehrt proportional der Entfernung E. Die Werthe von E

stecken zwar noch in ϱ, doch mit gar geringem Einfluss; wenn z. B. $\varrho = \frac{1}{4}$, was schon ein grosser Werth ist für $\frac{r}{E}$ (z. B. eine Säule von einem Meter Dicke in vier Meter Entfernung), so ist $\frac{1}{2}\varrho^2 = \frac{1}{32}$. Praktisch genügt also völlig das Resultat:

$$V = \frac{z - x}{x} = \frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi} = \sec\varphi - 1.$$

Das zu beurtheilende Verhältniss $\frac{z - x}{x} = V$ giebt laut vorstehender Formel folgende Tabelle:

Gesichtsfeld 2φ	Halbes Gesichtsfeld φ	$V = \frac{(z - x)}{x} = \sec\varphi - 1$
0	0	0
10	5	0,38 %
20	10	1,54 %
30	15	3,53 %
40	20	6,42 %
50	25	10,34 %
60	30	15,47 %
70	35	22,08 %
80	40	30,54 %
90	45	41,42 %
100	50	55,57 %
110	55	75,46 %
120	60	100,00 %

Diesen Werthen gegenüber kommt der vernachlässigte Factor gar nicht in Betracht. Bei Gesichtsfeldern von 60 Grad beträgt die relative Verdickung schon 15 %, eine gewiss bemerkliche Grösse. Je weiter indessen die abzubildende cylindrische Säule in den Hintergrund rückt, um so kleiner wird der Winkel φ. Hat die Säulenfront die absolute Ausdehnung $BC = S$ von der Mitte bis zum Rande (Fig. 3), so ist

$$\cos\varphi = \frac{E}{\sqrt{E^2 + S^2}} = \frac{AB}{AC}.$$

Ist also B in der Mitte des Bildes und das Nachbarcentrum C, so ist

$$V = \frac{\sqrt{E^2 + S^2} - E}{E}.$$

Trägt man $AB = AP$ auf AC ab, so ist die relative Verdickung in der Bildfläche bei x oder bei x'

$$V = \frac{CP}{AP},$$

ein Resultat, welches eine bequeme praktische Verwerthung gestattet.

Maler und Architekten können in der Handzeichnung sich dadurch behelfen, dass sie Säulen oder Kugeln in gleicher Dicke verzeichnen, ein Verfahren, das man als eine seitliche Verschiebung des Centrums auffassen kann. In Photographien ist man aber unfrei. Will man Verzerrungen vermeiden, so muss der Winkel φ so klein als möglich werden, m. a. W. man wähle das Verhältniss der frontalen Strecke S zur Entfernung des Auges vom Object so klein als thunlich. Man findet meist den Rath angegeben, D möglichst gross zu nehmen; das wäre richtig, wenn es bei feststehendem Werthe von S und E auf die Differenz $z - x$ ankäme. Allein sehr wahrscheinlich empfinden wir nicht den Unterschied zweier Differenzen wie $z - x$ und $z' - x'$, sondern den *relativen* Differenzen $\frac{z - x}{x}$ und $\frac{z' - x'}{x'}$, welche Werthe aber ganz gleich sind. Die Werthe x' und z' beziehen sich auf eine herangerückte, der vorigen parallele Bildfläche und wurden in der Figur fortgelassen. Die Furcht vor einer Seitenverdickung scheint oft übertrieben zu werden. Freilich wenn man mit Kugellinsen nahe Objecte aufnimmt, so müssen seitlich Formen sich zeigen, die gar kein excentrisches Beschauen erlauben. Aber selbst bei sehr sorgfältig ausgeführten Photographien findet man niemals fehlerlos genaue Frontalaufnahmen, weil es auch dem gewandtesten Photographen nur angenähert gelingt, seine lichtempfindliche Platte genau parallel einer Gebäudefront aufzustellen. Die geringste Abweichung bedingt sofort eine einseitige Verdickung einer Säulenreihe, oder es werden die Fenster auf der einen Seite grösser, als auf der anderen. Hierdurch wird meist jene Verdickung durch Projection völlig verdeckt. Unter einer Sammlung sonst vorzüglicher Frontalbilder von Berliner Gebäuden (24/30 cm) habe ich nicht ein einziges fehlerfreies frontales Bild gefunden, obwohl solche beabsichtigt waren. Sehr oft ist der Photograph genöthigt, einige Schritte von der Mittellinie abzuweichen, um etwa den Haupteingang hinter einem Denkmal noch sichtbar werden zu lassen. In solchem Falle müsste immer noch

die empfindliche Platte senkrecht und genau parallel der Front eingestellt werden, wobei das Objectiv seitlich zu verstellen ist. Wird diese Vorsicht nicht geübt, so tritt die oben erwähnte einseitige Verjüngung ein, die freilich meist nur vom Kenner bemerkt wird. Jeder Apparat sollte ferner wenigstens eine Libelle über der Camera haben zur sicheren *senkrechten* Einstellung der Platte; die Parallelität mit einer Front dagegen kann wohl nur nach Augenmaass ausgeführt werden.

III. Unabhängigkeit von O und D, Abhängigkeit von H.

Das Auge darf sich frei in der ganzen Horizontebene bewegen. Bei Senkungen und Erhebungen des Auges ist die Phantasie geneigt, die richtige Vorstellung zu unterstützen.

Hierher gehören die Zeichnungen fast der ganzen räumlichen Geometrie der Lage, bei der keine absoluten Maasse, namentlich keine Winkeltheilungen nach gegebenem Verhältniss vorkommen. Die Erzeugnisse projectivischer Gebilde, hyperbolische Hyperboloide und Paraboloide, deren Berührungsebenen und Mittelpuncte, Raumcurven und von Ebenen begrenzte Körper, gegenseitige Durchschnitte von Flächen gehören hierher und vieles Andere.

Von hohem künstlerischem Interesse sind hierher alle *Schattenconstructionen* zu zählen, denn diese hängen nur vom Sonnenstande und vom Horizonte ab. Daraus folgt die wichtige These: *dass alle Schattenconstructionen von excentrischen Standpunkten innerhalb der Horizontebene richtig erscheinen*; ober- und unterhalb dieser Ebene ist die Phantasie wiederum geneigt, sich auf einen anderen Standpunct zu versetzen. Ob dieser Satz früher bemerkt worden ist, müsste aus der Litteratur zu entscheiden sein. Bei Gemälden, wo das Landprofil den mathematischen Horizont verdeckt und nicht erkennen lässt, kann dieser letztere aus zwei sorgfältig gezeichneten Schattenpuncten sofort gefunden werden. Es seien A und B (Fig. 4) zwei Puncte, a und b ihre Schatten, so schneiden

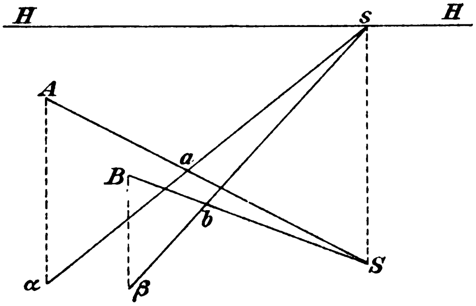


Fig. 4.

sich die Linien Aa und Bb im Sonnenpunkte S, dagegen, wenn die Fusspuncte α und β heissen, so schneiden sich αa und βb im Puncte s des Horizontes. Auch muss als Controlle der Horizont senkrecht zu Ss sich erweisen.

Endlich gehören hierher noch die *Spiegelbilder an Wasserflächen*, denn sie werden nur punctweise in Frontalebenen verzeichnet, bleiben also bei jeder excentrischen Betrachtung richtig. Es macht übrigens auf den Beschauer einen eigenthümlichen Eindruck, wenn das correct gezeichnete Spiegelbild der seitlich veränderten Blickrichtung folgt; nach links, wenn das Auge nach links, nach rechts, wenn es nach rechts geht.

IV. Unabhängigkeit von H, Abhängigkeit von O und D.

Diese Abbildungen gestatten nur eine Drehung um die Blicklinie herum. Künstler, sofern sie an H gebunden sind, haben kein Interesse an diesem Falle. Rein mathematisch umfasst diese Bedingung ein umfangreiches Gebiet von Constructionen, vor Allem die Orthogonalzeichnungen. Ist z. B. die Richtung einer Geraden durch ihren Fluchtpunkt gegeben, so gestattet die Angabe von O und D sofort die Flucht der senkrechten Ebene zu verzeichnen, sowie auch beliebige bestimmte Richtungen in solcher Ebene, z. B. je zwei zu einander senkrechte, so dass rechtwinklige Dreiaxensysteme bestimmt werden können, ohne Kenntniss des Horizontes. Somit kann ein genauer Würfel gezeichnet werden, der nur vom Centrum aus als solcher erscheinen wird, aber die Bildfläche darf beliebig um O herum gedreht werden. Dasselbe gilt für alle anderen bestimmten Gestalten mit absoluten Maassen für Strecken und Winkel; eine Entfernung ist nicht einmal in der Blicklinie gestattet. Unabhängig von H sind *alle Winkelmessungen*, auch *Kanten-* und *Flächenwinkel*.

V. Unabhängigkeit von D, Abhängigkeit von H und O.

Eine *beliebige Stellung in der Blicklinie ist ohne Verzerrung gestattet.* Hierher gehören wohl nur die bereits vorhin unter II besprochenen Fälle, mit der Einschränkung, dass der Horizont jetzt ein gegebener ist, daher ebenso wie vorhin ein künstlerisches Interesse vorhanden ist. Es sei nochmals erinnert an die frontal-stathmalen Stellungen rechtwinkliger Gebäude, Figuren, Strassen, solange keine absoluten Dimensionen verlangt werden.

In mathematischen Problemen scheint meist mit der Abhängigkeit von O auch eine solche von D einzutreten und das führt uns auf den sechsten und letzten Fall.

VI. Abhängigkeit von H, O und D.

Theile der Zeichnung, in deren Construction alle drei Elemente eingehen, vertragen streng genommen, gar nicht Verrückung des Auges aus dem Centrum, ohne Verletzung der Strecken und Winkelwerthe. In der Praxis wird dieser Fall der wichtigste und häufigste sein, daher im Interesse der Kunst alle Bedingungen so zu wählen sind, dass beim Verlassen des Centrums *die Verzerrungen am wenigsten merklich werden.* Um dieses beurtheilen zu können, wollen wir die möglichen Variationen der Bedingungen besprechen und demgemäss zuerst die Abhängigkeit des Gebildes von H, O und D untersuchen, dann die Beziehung des Objectes zur Bildfläche in Betracht ziehen.

Der Horizont H wird meist auf dem Bilde anzutreffen sein. Er kann höher oder tiefer liegen. Im Allgemeinen aber kann dieser Umstand einen Einfluss auf excentrisches Besehen des Bildes haben, sofern, wenn der Horizont niedrig angenommen wird, man viel eher das Bild hoch als Decoration anbringen kann, als wenn der Horizont hoch liegt. Man wählt niedrigen Horizont, wenn der Vordergrund wenig, dagegen der Hintergrund und der Himmel interessant ist, man wählt ihn hoch, wenn der Vordergrund reich ist. Ein hoher Horizont gestattet entschieden kein Besehen von unten her. Besieht man bei niedrigem Horizont das Bild von unten her, so erscheinen die Gebilde über dem Horizont recht gefällig, auch wenn man zurücktritt. Freilich scheinen nun horizontale Ebenen bergan zu steigen, doch befreit uns die Phantasie leicht von dieser Vorstellung.

Der Hauptpunkt O liegt meist nahe der Mitte des Bildes. Ein Einfluss der Wahl von O auf excentrisches Besehen findet kaum statt.

Um so wirksamer gestaltet sich indessen der Werth von D, der Distanz. Es sei die Linie H (Fig. 5) der Horizont und D die Distanz AO, so findet man die Fluchtpuncte aller Strahlenpaare, die rechte Winkel einschliessen, indem man einen rechten Winkel mit dem Scheitel in A sich um diesen Punct herumbewegen lässt. Die Schnittpuncte der Schenkel mit dem Horizonte geben dann die sogenannten conjugirten Punctenpaare, wie

1 I, 2 II, 3 III, *mM*, etc. Sie bilden ein *elliptisches Punctensystem*, dessen Potenz gleich der Distanz *D* ist, denn es ist

$$1\,O \times \mathrm{I}\,O = 2\,O \times \mathrm{II}\,O = 3\,O \times \mathrm{III}\,O = m\,O \times M\,O = (A\,O)^2 = D^2.$$

Die Entfernungen zwischen je zwei conjugirten Puncten variiren vom kleinsten Werthe *Mm*, der einer Schrägstellung

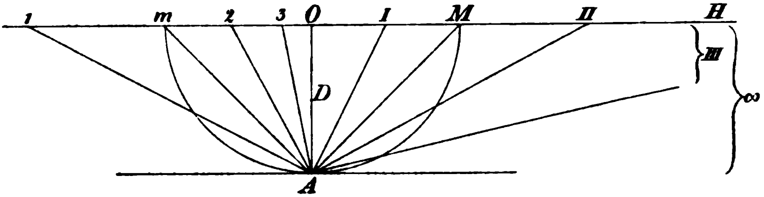


Fig. 5.

von 45 Grad entspricht, bis ∞, denn zu *O* ist der Punct im Unendlichen zugeordnet.

Bei schrägstehenden Gebäuden convergiren und flüchten die horizontalen Schenkel rechter Winkel nach eben diesen conjugirten Paaren. Je kleiner aber deren *Distanz*, um so weniger darf das Auge das Centrum verlassen. Bei einer Stellung des Gebäudes von 45 Grad wird jede Entfernung des Auges aus dem Centrum

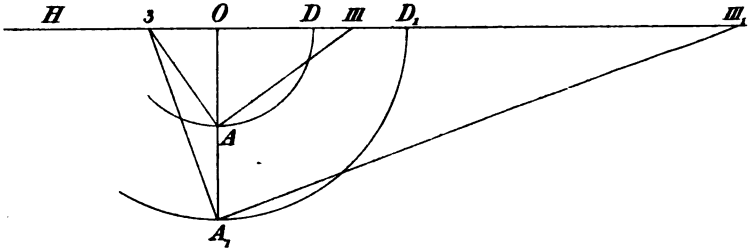


Fig. 6.

am meisten empfunden werden. Je kleiner dagegen α, der Winkel einer Façade gegen die Bildfläche, um so grösser ist die Entfernung der entsprechenden conjugirten Puncte, bis endlich bei ganz geringen Werthen von α, also bei nahezu frontaler Stellung, eine Abhängigkeit von *D* nicht mehr wahrgenommen wird, denn je weiter die conjugirten Puncte von einander getrennt sind, um so weniger verrathen die nach ihnen flüchtenden Linien ihre Ab-

hängigkeit von D. Nehmen wir z. B. D doppelt so gross, wie AO in Figur 6, und suchen den zu 3 zugeordneten Punct, so finden wir III_1 und es ist $O\,3 \times O\,\mathrm{III}_1 = OA_1^2$. Eine Abweichung von der Richtung $A_1\,\mathrm{III}_1$ wird aber weniger merklich sein, als eine Abweichung von $A\,\mathrm{III}$; einem Auge in der Distanz $A_1 O$ muss der Winkel zwischen zwei Linien, die nach 3 und III flüchten, spitz erscheinen, nämlich gleich $3\,A_1\,\mathrm{III}$. Ebenso wie Linien, die nach 3 und III′ flüchten, stumpf erscheinen werden bei einer Distanz $D = AO$. Somit können wir die These aufstellen: „*Rechte Winkel erscheinen von grösserer Distanz aus spitz, von geringerer aus stumpf.*“ Und ferner: „*Je grösser der Winkel α, der den Betrag der Schrägstellung angiebt, um so empfindlicher ist das Auge bei einer Entfernung aus dem Centrum.*“ Bei kleinen Winkeln α ist eine excentrische Betrachtung wenig gefährdet. (Man findet noch bis α gleich 10 Grad solches bestätigt.) Vergleicht man gleich hohe Gebäude im Vordergrunde mit solchen derselben Schrägstellung im Hintergrunde, bei gleicher absoluter Höhe, so findet man: „*Je weiter im Hintergrunde, um so besser wird eine Entfernung des Auges aus dem Centrum ermöglicht, selbst bei 45 Grad Schrägstellung.*“ Letztere These findet ihre Begründung in dem Umstande, dass je näher nach vorn das Gebäude steht, um so spitzer die Zeichnung der vorderen rechten Winkel in der Mitte des Bildes ausfällt; zudem ändern sich die Richtungen der Schenkel schnell und stark bei der geringsten Variation von D. Ist dagegen E gross, das Gebilde also im Hintergrunde, so weichen die nach fernen Punkten des Horizontes flüchtenden Geraden nur wenig von der Richtung des Horizontes ab, daher ihre Richtung sich wenig ändert bei Aenderung von D. Also muss eine Abweichung vom rechten Winkel weniger merklich erscheinen. Bei Schrägstellung hat endlich eine Abhängigkeit vom Winkel φ kaum statt; wenigstens findet man keinen der Art ausgesprochenen Character, wie er sich in der Verdickung bei frontaler Stellung zeigt. Dieser Umstand mag mit dazu beitragen, dass man in aesthetischer Hinsicht einer mässigen Schrägstellung den Vorzug giebt vor der Frontalstellung.

Bei Schrägansichten von Gebäuden ist man übrigens nicht im Stande ohne strenge geometrische Analyse den Winkel zu bestimmen, den die beiden sichtbaren Façaden eines Hauses mit einander bilden. Solch eine Hausecke erscheint spitz, rechtwinklig oder stumpf, je nachdem man das Auge weit oder nahe heranbringt.

Fassen wir zum Schlusse unsere Resultate kurz zusammen:

1) Das Auge des Beschauers ist nicht in allen perspectivischen Zeichnungen ans Centrum gebunden.

2) Bei Landschaften ist das Auge freier in der Bewegung. Sobald indess Staffage vorkommt, architektonische Gebilde, Häuser, Menschen, Bäume gleicher Höhe, Alleen etc., hat das Auge einen geringeren Spielraum.

3) In jeder perspectivischen Zeichnung, sei die Distanz noch so klein oder gross, sind die Bruchtheile gegebener Strecken und auch die Vervielfältigung unabhängig von der Stellung des Auges, daher *die Proportionen der Linien von jedem excentrischen Standpunkte aus richtig bleiben.* Das bezieht sich aber nicht auf die Theilung von *Winkeln,* — was in künstlerischem Interesse bedauerlich erscheint.

4) *Frontal-stathmale Winkel* gestatten eine *Freiheit* in der *ganzen Blicklinie.* Eine seitliche Betrachtung ruft eine Menge interessanter Vorstellungen hervor. Verdickungen von Kugeln oder Cylindern am Rande des Bildes sind abhängig von D, von der Entfernung des Objectes E von der Beschauerebene, und vom Winkel zwischen Blicklinie und Projectionsstrahl nach dem Centrum des Objectes. Die *relative Verdickung ist nicht von D abhängig,* sondern nur von dem letztgenannten Winkel. Die Verdickung ist bei halben Gesichtswinkeln bis zu 20 Grad unmerklich. Auch wird sie leicht verdeckt bei mangelhafter Parallel-Einstellung photographischer Apparate.

5) *Schattenconstructionen sind immer richtig,* auch excentrisch besehen, *desgleichen Spiegelbilder im Wasser.*

6) Bei Schrägstellungen von Gebäuden *wächst die Gebundenheit* des Auges ans Centrum mit dem Winkel bis zum Werth von 45 Grad. *Je weiter ferner die Gebäude nach dem Hintergrunde liegen, um so eher ist ein excentrisches Beschauen ohne Verzerrung möglich.* Ganz geringe (fast frontale) und doch schon merkliche Schrägstellungen sind zu vermeiden, weil sie leicht als verfehlte Frontalaufnahmen angesehen werden.

7) Alle *absoluten Strecken* und *Winkelmaasse* sind nur vom Centrum aus *richtig zu erkennen,* ausgenommen die frontalstathmalen rechten Winkel und alle Gebilde in Frontalebenen.

8) Vom Horizont unabhängige Zeichnungen vertragen eine Drehung des Bildes um die Blicklinie herum; dahin gehören Zeichnungen von *Krystallen* und *geometrischen Figuren nach absolutem Maasse.*

9) Frei ist das Auge beim Beschauen fast aller Zeichnungen der räumlichen Geometrie der Lage. Indess werden je nach dem Ort des Auges immer andere Gebilde dargestellt.

Photographische Objective von kurzer Brennweite geben Miniaturbilder, die aus grösserer Entfernung besehen unrichtig erscheinen. Daraus darf nicht gefolgert werden, dass die malerische Perspective verfehlt sei. Ist ein Bild für das Besehen aus der Nähe hergestellt, so ist das Verlangen nach einem richtigen Eindruck aus grösserer Entfernung nicht berechtigt. Ausnahmen, die die Künstler bei Nahlandschaften oder Innenräumen, mit grossem Gesichtswinkel anwenden müssen, verlangen eine Abweichung von der einfachen Centralperspective. Sie nehmen bald einen doppelten Horizont an, bald lassen sie, um die Verdickung zu vermeiden, den Augenpunkt so variiren, dass Säulen in gleicher Dicke erscheinen. In solchen Ausnahmefällen darf gefordert werden, dass die Abweichungen von der strengen Regel erst bei sorgfältiger Analyse dem Beschauer merklich werde. Eine dankenswerthe Aufgabe wäre es, die wichtigsten und gelungensten Abweichungen, die Künstler, Maler und Architekten absichtlich angewandt haben, zu studiren und zu sammeln. Bisher findet man nur zerstreute Angaben darüber in der Litteratur. Einen Kampf zwischen Mathematik und Kunst braucht es nicht zu geben. Beide erstreben dasselbe, nämlich Richtigkeit unter Wahrung einer möglichst grossen Freiheit der Bewegung. Beide untersuchen die Gründe, die ihnen ihre Aufgabe erschweren. Wenn bisweilen ihre Interessen verschieden sind, so kann das nimmer ihre gemeinsamen Ziele zu fördern ein Hinderniss sein.

Druckfertig erklärt 24. XII. 1901.]

F. Hausdorff: *Ueber eine gewisse Art geordneter Mengen.*

In dem von G. Cantor erschlossenen Gebiete der Ordnungstypen ist es eigentlich nur das Specialgebiet der Ordnungszahlen, in dem wir einigermassen Bescheid wissen; über die allgemeinen Typen, die Typen nicht wohlgeordneter Mengen, ist äusserst wenig bekannt. Und doch gehört eine genauere Kenntniss und Classification der Typen zu dem engeren Problemkreise der Mengenlehre: schon desshalb, weil die alte Frage nach der Mächtigkeit des Continuums auf diesem Wege möglicherweise der Lösung näher gebracht werden kann. Denn da nach einem Cantor-Bernstein'schen Satze[1]) die Mächtigkeit der zweiten *Typen*klasse (der Klasse der abzählbaren Typen) gleich der Mächtigkeit $\aleph$ des Continuums[2]) ist, während die Mächtigkeit der zweiten *Zahlen*klasse mit $\aleph_1$ bezeichnet wird, so dürfte es für die Vergleichung zwischen $\aleph$ und $\aleph_1$ von Wichtigkeit sein, etwaige Zwischenstufen festzulegen, d. h unter der Gesammtheit aller abzählbaren Mengen eine engere Gruppe herauszugreifen, in der ihrerseits die Gesammtheit der abzählbaren wohlgeordneten Mengen als Theil enthalten ist. Gerade die Cantor'sche Vermuthung, dass $\aleph = \aleph_1$, verspricht eine Erleichterung des Beweises durch Einschaltung von Zwischenstufen, während umgekehrt, falls $\aleph > \aleph_1$ sein sollte, dieser Weg eher ein Umweg sein dürfte. Im Folgenden ist eine solche besondere Gruppe von Ordnungstypen, in der als Specialfall die Ordnungszahlen enthalten sind, nach einigen Haupteigenschaften charakterisirt; ob gerade hier der zweckmässigste Ansatz zur Durchforschung der Typen und zur weiteren Klärung der Mächtigkeitsfrage vorliegt, lässt sich einstweilen noch nicht entscheiden.

---

1) F. Bernstein, Untersuchungen aus der Mengenlehre, Diss. 1901.

2) Diese vorläufige Bezeichnung (Aleph ohne Index) als präjudicirlich zu scheuen, liegt um so weniger ein Grund vor, als G. Cantor den Beweis, dass jede transfinite Cardinalzahl in der „Reihe der Aleph" vorkommen muss, nächstens zu publiciren gedenkt.

§ 1.

Erklärungen. Wir werden in allen folgenden Betrachtungen von *geordneten Mengen* stets im Sinne ihrer *Ordnungstypen* sprechen, d. h. ihre Elemente, auf deren individuelle Beschaffenheit es nicht ankommt, mit Beibehaltung ihrer Rangbeziehungen durch indifferente Einheiten ersetzt denken. Da es dennoch nicht zu vermeiden sein wird, die Elemente individuell zu bezeichnen, beispielsweise um etwaige Vertauschungen von Elementen mit Elementgruppen bequem übersehen zu können, so wollen wir im Allgemeinen die geordneten Mengen M selbst statt ihrer Typen $\overline{M}$ beibehalten und mit ihnen nach den von G. CANTOR für Ordnungstypen getroffenen Festsetzungen operiren. Sind also $M = \{m\}$ und $N = \{n\}$ zwei geordnete Mengen, so bedeutet die *Summe* $M + N$ diejenige geordnete Menge, in der die Elemente m unter einander ihre Rangfolge in M, die Elemente n ihre Rangfolge in N beibehalten haben, während jedes Element m jedem Element n im Range vorangeht ($m \prec n$, $n \succ m$). Die hiermit definirte Addition ist associativ, aber nicht commutativ. Ist in diesem Sinne $M = P + R$ oder $M = P + Q + R$, so heissen die Mengen P, Q, R *Stücke* der Menge M, und zwar P ein Anfangsstück, Q ein Mittelstück, R ein Endstück. Hat bei einer Zerlegung in zwei Stücke das Endstück R ein *erstes Element* m, so heisse R der durch m bestimmte *Rest*, und das zugehörige Anfangsstück A ($M = A + R$) der durch m bestimmte *Abschnitt* der Menge M; der Abschnitt besteht also aus allen Elementen, die einem gegebenen Element m vorangehen, der Rest aus m selbst und allen, die ihm folgen. Unter dem *Product* $M \cdot N$ zweier geordneter Mengen ferner verstehen wir eine geordnete Menge, die dadurch entsteht, dass man für jedes Element n von N eine Menge M_n vom Typus der Menge M (eine mit M „ähnliche" Menge $M_n \simeq M$) „einsetzt". Diese Multiplication ist associativ, aber nicht commutativ, und der Addition gegenüber einseitig distributiv; es ist $M(P + Q) = MP + MQ$, aber $(P + Q)M \neq PM + QM$. Unter „Einsetzung" (die nicht auf diesen Fall lauter ähnlicher Mengen M_n beschränkt ist) der geordneten Mengen M_n für die Elemente n der geordneten Menge N wird diejenige Anordnung verstanden, vermöge deren jedes Element von M_n zu jedem Elemente von $M_{n'}$ dieselbe Rangbeziehung wie n zu n' besitzt.

Definition. Eine Menge heisst g e s t u f t, *wenn keiner ihrer Abschnitte einem andern ähnlich ist. Der Ordnungstypus einer gestuften Menge heisst ein gestufter Typus.*

Wir bemerken sofort, dass auch kein Abschnitt der Menge selbst ähnlich ist. Wäre nämlich $M \simeq A$, wo A der zum Element m gehörige Abschnitt von M ist, so würde bei der ähnlichen Abbildung von M auf A das Element m in ein früheres m' übergehen, derart dass die zugehörigen Abschnitte A, A' ähnlich wären. Die Typen $\overline{A}$ sind also untereinander und von $\overline{M}$ sämmtlich verschieden.

Vor allem wird es erwünscht sein, sich durch Beispiele von der *Existenz* gestufter Mengen zu überzeugen. Bei dem Beweise, dass eine irgendwie definirte Menge gestuft ist, werden wir in der Regel zuerst die Unähnlichkeit zwischen M und A begründen, weil daraus meist in analoger Weise die Unähnlichkeit zwischen verschiedenen Abschnitten erschlossen werden kann — während logisch genommen der erste Theil dieses Beweisganges nicht hinreichend und nach Erledigung des zweiten nicht einmal nothwendig ist.

1. Beispiel. Jede *wohlgeordnete* Menge ist gestuft. Die Typen $\overline{A}$ ihrer Abschnitte sind die der Grösse nach geordneten endlichen und transfiniten Ordnungszahlen $0, 1, 2, \cdots \omega, \omega + 1, \cdots$, abschliessend mit der Ordnungszahl $\overline{M}$.

2. Beispiel: Man betrachte die Menge $R = \{r\}$ der *der Grösse nach geordneten* rationalen Zahlen; ihr Typus η ist, wie G. Cantor gezeigt hat[1]), abzählbar, überall dicht, ohne erstes und letztes Element, und durch diese drei Eigenschaften eindeutig bestimmt. In diese Menge setze man für jedes Element r eine *endliche* Menge Q_r von ν Elementen, derart dass jedem r eine und nur eine positive ganze Zahl ν entspricht. Das kann auf unendlich viele Weisen geschehen; denn wenn man R in eine einfach geordnete Reihe $r_1 r_2 r_3 \cdots r_\nu \cdots$ bringt, so braucht man nur jedem $r = r_\nu$ seinen Stellenzeiger ν in dieser Reihe, oder auch jedem $r = r_\nu$ die Zahl a_ν zuzuordnen, wenn $a_1 a_2 a_3 \cdots a_\nu \cdots$ irgend eine Reihe wachsender positiver Zahlen $(1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots)$ bedeutet. Durch die obige Einsetzung entsteht eine abzählbare gestufte Menge $M = \{Q_r\}$.

Der Beweis ist einfach. Es sei m irgend ein Element von M, A der zugehörige Abschnitt. Nun muss m irgend einer der

1) Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 481.

endlichen Mengen Q, etwa dem Q_r, angehören. Man nehme in der Menge R irgend ein auf r folgendes Element s $(s \succ r)$; solche giebt es sicher, da R kein letztes Element enthält. Die zu s gehörige Gruppe Q_s bestehe aus irgend einer Zahl, etwa fünf, Elementen. Nun werden zwar Gruppen von 5 aufeinanderfolgenden Elementen auch in A vorkommen, aber keine davon steht zu ihrer Umgebung in demjenigen Rangverhältnisse wie Q_s zu der ihrigen, dass nämlich das erste Element keinen Vorgänger, das fünfte keinen Nachfolger hat. Eine solche freischwebende Gruppe von fünf Elementen ist nur Q_s selbst, und demnach kann M nicht dem Abschnitte A ähnlich sein. Ganz analoge Schlüsse zeigen, dass auch zwei verschiedene Abschnitte A, A' einander nicht ähnlich sein können.

Auf diese Weise ist eine sehr umfassende Kategorie gestufter abzählbarer Mengen nachgewiesen, die durch Einsetzung *verschiedener endlicher* Mengen in den überalldichten Typus η entstehen. Mit jeder dieser Mengen M ist auch die *inverse* M^* gestuft, die durch Umkehrung aller Rangverhältnisse aus M hervorgeht.

Eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens, durch die man auch zu gestuften Mengen höherer Mächtigkeit gelangt, besteht darin, in einen beliebigen überalldichten Typus statt der einzelnen Elemente *verschiedene wohlgeordnete* Mengen zu setzen.

3. Beispiel. Auch in den Typus ω^* der fallenden Zahlenreihe $\cdots 3, 2, 1$ kann man wohlgeordnete Mengen so einsetzen, dass ein gestufter Typus entsteht. Man betrachte etwa die wohlgeordneten Mengen, deren Ordnungszahlen sind $\omega, \omega^2, \omega^3, \cdots \omega^\nu \cdots$ Addirt man diese von links nach rechts, so entsteht $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots$ in inf. $= \omega^\omega$, wiederum eine Ordnungszahl. Fügt man sie aber im Sinne fallender Potenzen aneinander, so entsteht der Typus

$$\cdots\cdot + \omega^\nu + \cdots + \omega^3 + \omega^2 + \omega,$$

der zwar nicht wohlgeordnet, aber gestuft ist.

Der Beweis beruht wesentlich auf der Eigenschaft, die den Potenzen von ω und sonst keinen Zahlen der zweiten Zahlenklasse zukommt, dass nämlich jeder *Rest* einer Menge vom Typus ω^ν denselben Typus ω^ν besitzt. Sei nun Q_ν eine Menge vom Typus ω^ν, und $M = \cdots + Q_3 + Q_2 + Q_1$ sei, entgegen der Behauptung, dem durch das Element m bestimmten Abschnitte A ähnlich; man bezeichne durch $A = \varphi(M)$ die unter Erhaltung der Rangverhältnisse stattfindende Abbildung von M auf A. Bei dieser Ab-

bildung geht m selbst in ein Element $m' = \varphi(m)$ über und es ist $m' \prec m$; das Bild von m' wiederum ist ein Element $m'' = \varphi(m') \prec m'$ u.s.f. So entsteht eine fallende Elementenreihe $m \succ m' \succ m'' \succ \cdots$. Gehörte nun das Element m etwa der wohlgeordneten Menge Q_μ an, so muss, da in einer wohlgeordneten Menge jede fallende Reihe von Elementen endlich ist, in der Reihe $m m' m'' \cdots$ schliesslich ein *letztes* Element n vorkommen, das noch zu Q_μ gehört, während das nächstfolgende $\varphi(n)$ bereits einer früheren Menge Q_ν $(\nu > \mu)$ angehört. Dies aber führt zum Widerspruch; denn, wie die successiven Abbildungen ergeben, ist der zu m gehörige *Rest* von M ähnlich dem Inbegriff aller Elemente zwischen m' und m (m' eingerechnet, m ausgeschlossen) oder zwischen m'' und m' oder endlich zwischen $\varphi(n)$ und n. Jener Rest war vom Typus $\omega^\mu + \cdots + \omega^2 + \omega$ und diese Ordnungszahl ist kleiner als ω^ν; das Intervall zwischen $\varphi(n)$ und n hingegen beginnt mit einem Reste von Q_ν, hat also den Typus $\omega^\nu + \omega^{\nu-1} + \cdots > \omega^\nu$. Beide Mengen können also unmöglich ähnlich sein, also ist $M \simeq A$ widerlegt. In analoger Weise wird die Unähnlichkeit zwischen verschiedenen Abschnitten von M bewiesen.

Auch hier ist leicht eine Verallgemeinerung möglich. Bedeutet $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots$ eine Reihe wachsender ganzer Zahlen (der ersten oder zweiten Zahlenklasse), so ist

$$\cdots + \omega^{\alpha_\nu} + \cdots + \omega^{\alpha_3} + \omega^{\alpha_2} + \omega^{\alpha_1}$$

ein gestufter Typus von der ersten Mächtigkeit. Das monotone Wachsthum der α ist überdies entbehrlich, es genügt, dass zu jedem α_μ ein $\alpha_\nu > \alpha_\mu$, $\nu > \mu$ vorhanden sei.

Die gegebenen Beispiele gestatten bereits die Frage nach der *Mächtigkeit* der Menge aller abzählbaren gestuften Typen zu beantworten; diese Mächtigkeit ist gleich $\aleph$, der Mächtigkeit der Menge *aller* abzählbaren Typen oder der Mächtigkeit des Continuums. Einerseits ist nämlich die gesuchte Mächtigkeit $\leq \aleph$, wegen des CANTOR-BERNSTEIN'schen Satzes; andererseits existirt eine Theilmenge von gestuften abzählbaren Typen, die die Mächtigkeit des Continuums besitzt, denn man kann jeder Folge positiver wachsender ganzer Zahlen $a_1 a_2 a_3 \cdots$ zugleich einen gestuften Typus (etwa der dritten Beispielklasse) und eine reelle Zahl $x = (\frac{1}{2})^{a_1} + (\frac{1}{2})^{a_2} + (\frac{1}{2})^{a_3} + \cdots$ des Intervalls 0, 1 zuordnen. Folglich ist die gesuchte Mächtigkeit $\geq \aleph$, und also nach dem SCHRÖDER-BERNSTEIN'schen Aequivalenzsatze $= \aleph$.

Ich bemerke noch, dass die gestuften Mengen zu der von Cantor gelegentlich betrachteten Kategorie derjenigen Mengen gehören, die sich selbst nur auf eine Weise ähnlich sind, während umgekehrt eine Menge dieser Kategorie (z. B. die Inversion irgend einer wohlgeordneten Menge) nicht nothwendig gestuft ist.

§ 2.

Wir beweisen nun einige Sätze über gestufte Mengen.

a) In einer gestuften Menge ist kein *Anfangsstück* einem andern oder der Menge selbst ähnlich.

Wäre $P + Q \simeq P$, so müsste bei der Abbildung von $P + Q$ auf P einem Element q von Q ein Element p von P, also $p \prec q$, entsprechen und der zu p gehörige Abschnitt dem zu q gehörigen ähnlich sein, was gegen die Definition verstösst.

b) Jedes *Stück* einer gestuften Menge ist eine gestufte Menge.

Aus *a*) geht sofort hervor, dass dieser Satz für Anfangsstücke richtig ist. Ist Q ein Mittel- oder Endstück, P der Inbegriff aller vorhergehenden Elemente, B und B' Abschnitte von Q, so würde aus $B \simeq B'$ auch $P + B \simeq P + B'$ folgen, d. h. die Aehnlichkeit zwischen verschiedenen Abschnitten von M.

Man bemerke, dass bei wohlgeordneten Mengen nicht nur jedes Stück, sondern überhaupt jede Theilmenge wiederum wohlgeordnet ist.

c) Eine gestufte Menge ist keinem ihrer *Mittelstücke* ähnlich.

Dieser wichtige Satz lässt sich so beweisen. Es sei $M = P + Q + R$, wo P und R nicht verschwinden, und $M \simeq Q$; es bezeichne $Q = \varphi(M)$ eine unter Erhaltung der Rangverhältnisse mögliche Abbildung von M auf Q. Hierbei gehen P, Q, R in die drei Stücke $P_1 Q_1 R_1$ von Q über, und $R_1 = \varphi(R)$ ist ein Endstück von Q, schliesst sich also links an R an, sodass $R_1 + R$ ein Endstück von M bildet. Ebenso schliesst sich $R_2 = \varphi(R_1)$ links an R_1 an u. s. f. Man bezeichne mit

$$S = \cdots + R_3 + R_2 + R_1 + R$$

den Inbegriff aller Elemente, die bei der Iteration der Abbildung φ mitgenommen werden; es ist S ein Endstück von M. Nach *b*) müsste folglich S eine gestufte Menge sein; aber der Entstehung zufolge ist $S = \varphi(S) + R$, also S einem Anfangsstücke $\varphi(S)$ ähnlich, was dem Satze *a*) widerspricht. Demnach kann nicht $M \simeq Q$ sein.

In einer gestuften Menge sind also die Aehnlichkeiten $M \simeq P$, $M \simeq Q$, $P \simeq P'$ ausgeschlossen, alle andern *können* stattfinden ($M \simeq R$, $P \simeq Q$, $P \simeq R$, $Q \simeq R$, $Q \simeq Q'$, $R \simeq R'$).

d) Ist M eine gestufte, N eine beliebige Menge, so ist nie $M \simeq M + N$.

Denn wäre $M = \varphi(M + N)$ eine ähnliche Abbildung, so wäre $\varphi(M) \simeq M$ ein Anfangsstück von M.

e) Ist M eine gestufte, N und N' zwei beliebige Mengen, so folgt aus $M + N \simeq M + N'$, dass $N \simeq N'$.

Es sei $\varphi(M + N) = M + N'$; das Bild $\varphi(M)$ von M kann weder (*a*) ein Anfangsstück von M noch (*e*) eine Menge sein, die M als Anfangsstück enthält, folglich ist $\varphi(M) = M$ und $\varphi(N) = N'$, also $N \simeq N'$.

f) *Sind M, N gestufte Mengen, so ist auch $M + N$ eine gestufte Menge.*

Es sei A ein Abschnitt von M, B ein Abschnitt von N. Die Abschnitte von $M + N$ sind von der Form A, M, $M + B$. Wegen *d*) kann nicht $M \simeq M + N$ sein, aber auch nicht $A \simeq M + N = A + R + N$, weil A selbst eine gestufte Menge ist. Endlich kann nicht $M + B \simeq M + N$ sein, weil daraus nach *e*) $B \simeq N$ folgen würde, N aber keinem ihrer Abschnitte ähnlich ist. Also ist $M + N$ keinem ihrer Abschnitte ähnlich. Da auch B gestuft ist, so ist ebenfalls $M + B$ keinem ihrer Abschnitte ähnlich; dasselbe gilt von M, dasselbe von A. Also ist auch keiner der Abschnitte von $M + N$ einem andern ähnlich.

Auch die Addition beliebig vieler gestufter Mengen, in *endlicher* Zahl, führt wieder zu einer gestuften Menge. Dagegen wird die Summe einer *transfiniten* Menge gestufter Mengen nur bei bestimmter Anordnung eine gestufte Menge sein; in dieser Beziehung vermerken wir den Satz:

g) Eine *wohlgeordnete* Menge gestufter Mengen ist ebenfalls eine gestufte Menge.

Es sei $S = \{s\}$ eine wohlgeordnete Menge; indem man statt des Elementes s die gestufte Menge Q_s setzt, entsteht eine Menge $M = \{Q_s\}$. Wir nehmen an, M sei ihrem durch das Element m bestimmten Abschnitte A ähnlich; $A = \varphi(M)$ sei die ähnliche Abbildung, bei der das Element m in $m_1 = \varphi(m) \prec m$, dieses wiederum in $m_2 = \varphi(m_1) \prec m_1$ übergeht u. s. w. Wir erhalten so eine unendliche fallende Reihe $m \succ m_1 \succ m_2 \succ \cdots$ vom Typus ω^*. Das Element m möge der Menge Q_s, das Element m_1

der Menge Q_{s_1} angehören u. s. f., es ist dann $s \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \cdots$. In dieser Reihe müssen aber von einem bestimmten Element an lauter Gleichheitszeichen auftreten, weil S als wohlgeordnete Menge keine fallende unendliche Reihe enthält; d. h. in der Reihe $m m_1 m_2 \cdots$ wird ein Element n auftreten, das nebst allen folgenden

$$n_1 = \varphi(n) \prec n, \quad n_2 = \varphi(n_1) \prec n_1, \cdots$$

einer und derselben gestuften Menge Q_t angehört. Man bezeichne die zu $n, n_1, n_2, \cdots$ gehörigen Abschnitte dieser Menge mit $B, B_1, B_2, \cdots$; ferner sei $B = B_1 + R_1$, $B_1 = B_2 + R_2$, u. s. w., so ist $R_2 = \varphi(R_1)$, $R_3 = \varphi(R_2)$, $\cdots$ und

$$T = \cdots + R_3 + R_2 + R_1$$

ist ein Stück von Q_t, also eine gestufte Menge. Da aber $T = \varphi(T) + R_1$, so ist T seinem Abschnitt $\varphi(T)$ ähnlich, und dieser Widerspruch zeigt, dass die Voraussetzung $M \simeq A$ zu verwerfen ist. Eine wohlgeordnete Menge gestufter Mengen ist also keinem ihrer Abschnitte ähnlich, und da jeder Abschnitt wiederum eine solche wohlgeordnete Menge gestufter Mengen ist, so ist auch kein Abschnitt einem andern ähnlich. Also ist M eine gestufte Menge.

h) Wird eine endliche Zahl von Elementen einer gestuften Menge durch gestufte Mengen ersetzt, so entsteht wiederum eine gestufte Menge.

Man betrachte ein Element m, es sei $M = A + m + R$, dann sind nach *b*) A und R gestuft. Wird m durch die gestufte Menge Q_m ersetzt, so entsteht die Menge $A + Q_m + R$, die nach *f*) ebenfalls gestuft ist. — Die Menge bleibt auch gestuft, wenn man diesen Process eine endliche Zahl von Malen wiederholt.

Dagegen gilt der Satz nicht für eine transfinite Menge von Elementen. Ersetzt man etwa im 2. Beispiel das *letzte* Element *jeder* Gruppe Q_r durch eine wohlgeordnete (also gestufte) Menge vom Typus ω, so nimmt die ganze Gruppe den Typus ω, die Menge $\{Q_r\}$ den Typus $\omega \cdot \eta$ an, der nicht mehr gestuft ist. Im Gegensatz also zu (*g*), im Gegensatz ferner zu einer bekannten Eigenschaft[1]) der wohlgeordneten Mengen ist eine gestufte Menge aus wohlgeordneten oder gestuften Mengen im Allgemeinen nicht gestuft. Dagegen wird sich zeigen, dass durch Einsetzung *einer*

1) Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, S. 41, Satz VII.

und derselben gestuften Menge für *alle* Elemente einer gestuften Menge, d. h. durch *Multiplication* zweier gestufter Typen, wiederum eine gestufte Menge entsteht.

i) Es sei M eine gestufte Menge, P ein Anfangsstück von M; ferner sei S eine Menge, die kein Stück vom Typus ω^* enthält, T eine beliebige Menge. Dann ist die Menge MS keiner Menge von der Form $MT+P$ ähnlich, und einer Menge von der Form MT nur dann, wenn $S \simeq T$.

Der Beweis beruht wesentlich auf der Eigenschaft *c*), dass M keinem ihrer Mittelstücke ähnlich sein kann. Daraus folgt, dass irgend ein Stück der Menge MS (die durch Einsetzung von $M_s \simeq M$ für jedes Element s von S entsteht) nur dann der Menge M selbst ähnlich sein kann, wenn es sich auf *höchstens zwei unmittelbar benachbarte* Mengen M_s vertheilt. Bezeichnet P_s, Q_s, R_s ein Anfangs-, Mittel-, Endstück von M_s und sind s_1, s ($s_1 \prec s$) zwei unmittelbar auf einander folgende Elemente von S, so hat demgemäss jedes Stück von MS, das mit M ähnlich ist, eine der vier Formen R_s, M_s, $R_{s_1}+M_s$, $R_{s_1}+P_s$. Aus demselben Grunde hat jedes Stück von MS, das mit einem Anfangsstück P von M ähnlich ist, eine der vier Formen R_s, Q_s, P_s, $R_{s_1}+P_s$.

Wäre nun $MS \simeq MT+P$, so bezeichne

$$MT+P=\varphi(MS), \quad MS=\psi(MT+P)=\psi(MT)+\psi(P)$$

die ähnliche Abbildung beider Mengen. $\psi(P)$ muss einer der zuletzt notirten vier Formen angehören, als Endstück von MS kann dies nur R_s sein; folglich muss S ein letztes Element s besitzen, und die zugehörige Menge M_s wird so in P_s+R_s zerlegt, dass $R_s=\psi(P)$. Man schreibe $S=S_1+s$, sodass S_1 den Inbegriff aller Elemente von S bis auf das letzte bedeutet, dann ist

$$MS=MS_1+M_s=MS_1+P_s+R_s=\psi(MT)+\psi(P),$$

folglich

$$MS_1+P_s=\psi(MT), \quad MT=\varphi(MS_1)+\varphi(P_s).$$

In genau derselben Weise folgt nunmehr, dass T ein letztes Element t besitzen muss, dass $M_t=P_t+R_t$, $R_t=\varphi(P_s)$, und dass mit $T=T_1+t$

$$MT_1+P_t=\varphi(MS_1), \quad MS_1=\psi(MT_1)+\psi(P_t).$$

Hieraus folgt nun abermals, dass S_1 ein letztes Element s_1 besitzen muss u. s. f.; dieser nie abbrechende Process verlangt also, dass in S eine Reihe consecutiver Elemente $s \succ s_1 \succ s_2 \succ \cdots$, in T eine entsprechende Reihe $t \succ t_1 \succ t_2 \succ \cdots$ existire, derart dass

$$P \simeq R_s, \quad P_t \simeq R_{s_1}, \quad P_{t_1} \simeq R_{s_2}, \cdots$$

$$P_s \simeq R_t, \quad P_{s_1} \simeq R_{t_1}, \quad P_{s_2} \simeq R_{t_2}, \cdots$$

Denn der Process könnte nur abbrechen, wenn bei dieser successive übergreifenden Abbildung einmal kein Anfangsstück übrig bliebe, also statt $P \simeq R$ einmal $P \simeq M$ wäre; dies aber ist wegen (a) unmöglich.

Da wir nun vorausgesetzt haben, dass in S keine solche fallende Reihe benachbarter Elemente (kein Stück vom Typus ω^*) existire, so ist damit die Unmöglichkeit der Aehnlichkeit zwischen MS und $MT + P$ bewiesen.

Um den zweiten Theil der Behauptung i) zu beweisen, nehmen wir $MS \simeq MT$ an; es sei $MT = \varphi(MS)$, $MS = \psi(MT)$. Nun folgt sehr leicht, dass das Bild einer Menge M_t gerade wieder eine Menge M_s sein muss, also sich weder auf zwei solche Mengen vertheilen noch in einer enthalten sein kann. Denn wäre $\psi(M_t) = R_{s_1}$ oder $= R_{s_1} + P_s$ oder $= R_{s_1} + M_s$, so würde das verbleibende Anfangsstück P_{s_1} als Bild wieder einen Rest R_{t_1}, das zugehörige P_{t_1} wieder ein R_{s_2} bedingen u. s. f., sodass wieder die obige unbegrenzte Reihe $s \succ s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ aufträte, die durch Voraussetzung ausgeschlossen ist. Demnach ist $\varphi(M_s) = M_t$, $\psi(M_t) = M_s$, und hierdurch sind die Elemente s, t selbst in eine eindeutig umkehrbare Beziehung gesetzt, die die Rangverhältnisse ungeändert lässt, d. h. es ist $S \simeq T$.

k) Sind M, N gestufte Mengen, so ist auch das Product $M \,.\, N$ eine gestufte Menge.

Bezeichnet A einen Abschnitt von M, B einen Abschnitt von N, so sind die Abschnitte der Productmenge MN von der Form $MB + A$ oder auch, aber nur im Falle, dass M ein erstes Element besitzt, von der Form MB. Man bemerke nun, dass gestufte Mengen die in i) von der Menge S vorausgesetzte Eigenschaft haben, kein Stück vom Typus ω^* zu enthalten; denn ein solches Stück ist ungestuft, kann also wegen b) nicht in einer gestuften Menge vorkommen. Folglich ist MN weder einem Abschnitte $MB + A$ ähnlich noch einem Abschnitt MB, denn

aus dem zweiten Fall würde $N \simeq B$ folgen. Aber auch kein Abschnitt von MN ist einem andern ähnlich. Zwischen $MB + A$ und MB' kann keine Aehnlichkeit bestehen, zwischen MB und MB' nur für $B \simeq B'$; wäre endlich $MB + A \simeq MB' + A'$, ohne dass A' hierbei das Bild von A wäre, so müsste A' das Bild eines Endstücks von A sein (oder umgekehrt) und wenn P das verbleibende Anfangsstück von A bezeichnet, müsste $MB + P \simeq MB'$ sein, was wiederum unmöglich ist. Also folgt aus $MB + A \simeq MB' + A'$, dass A und A' einander als Bilder entsprechen, ferner $MB \simeq MB'$, d. h. $A \simeq A'$, $B \simeq B'$, sodass die beiden genannten Abschnitte von MN sich auf dasselbe Element beziehen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 3.

Nach *f*) *k*) bilden die gestuften Mengen gegenüber den Grundoperationen (Addition und Multiplication) einen „Körper", einen geschlossenen Bereich. Subtraction und Division sind in diesem Bereich nur bedingungsweise zu definiren. Aus der Gleichung $M + N = S$ lässt sich N eindeutig bestimmen, wenn M ein Anfangsstück von S ist (vgl. *e*), während ihre Auflösung nach M, vorausgesetzt dass N ein Endstück von S ist, im Allgemeinen vieldeutig ausfällt; beispielsweise ist bei wohlgeordneten Mengen die Gleichung $\mu + \omega = \omega + \omega$ durch $\mu = \omega, \omega + 1, \omega + 2, \cdots$ lösbar. Ferner ist die Gleichung $MN = T$, falls T überhaupt von der hierdurch bedingten Form ist, nach N eindeutig auflösbar (vgl. *i*), nach M im Allgemeinen vieldeutig; bei wohlgeordneten Mengen wird z. B. die Gleichung $\mu\omega = \omega^2$ durch $\mu = \omega$, aber auch durch jede transfinite Zahl des Intervalls $\omega < \mu < \omega^2$ gelöst.

„Unterkörper", d. h. solche Theilbereiche des Inbegriffs aller gestuften Mengen, die sich ebenfalls gegenüber Addition und Multiplication invariant verhalten, lassen sich in mannigfacher Weise bilden. Die wohlgeordneten Mengen liefern einen solchen, ferner die gestuften Mengen, die ein erstes Element besitzen; ebenso die *vor- und rückwärts gestuften Mengen.* Eine gestufte Menge M heisse vor- und rückwärts gestuft, wenn auch die inverse Menge M^* gestuft ist. Da nun

$$(M + N)^* = N^* + M^*, \quad (MN)^* = M^* N^*,$$

so führt Addition und Multiplication zweier vor- und rückwärts gestufter Mengen wiederum zu einer solchen.

Ueber diese Mengen lässt sich noch Einiges mehr sagen. Eine vor- und rückwärts gestufte Menge ist keinem ihrer Stücke (auch keinem Endstück) ähnlich, ferner ist kein Endstück einem andern, kein Stück einem seiner Stücke ähnlich; sie darf weder Stücke vom Typus ω noch vom Typus ω^* enthalten. Fasst man daher alle unmittelbar auf einander folgenden Elemente zu einer Gruppe Q_n zusammen, so ist diese Gruppe nothwendig *endlich;* und die Menge $N = \{n\}$, aus der durch Einsetzung endlicher Gruppen die vor- und rückwärts gestufte Menge $M = \{Q_n\}$ entsteht, enthält nun keine zwei aufeinanderfolgenden Elemente n mehr, denn die zugehörigen beiden Gruppen Q_n würden ja zu einer einzigen Gruppe zusammenzuziehen sein. Also ist N entweder ein einziges Element oder *überalldicht,* d. h. zwischen je zwei Elementen von N liegt dem Range nach stets wenigstens noch eines (also unendlich viele).

l) *Eine vor- und rückwärts gestufte Menge entsteht, falls sie nicht endlich ist, durch Einsetzung endlicher Mengen für die Elemente einer überalldichten Menge.* Natürlich müssen aber diese endlichen Mengen passend gewählt sein. Das Sicherste wäre, sie allesammt unter einander *verschieden* zu wählen; dann wird aber die überalldichte Menge nur abzählbar, also einem der vier Typen η, $1 + \eta$, $\eta + 1$, $1 + \eta + 1$ ähnlich, wo η den einzigen überalldichten abzählbaren Typus ohne erstes und letztes Element bedeutet (vgl. die Anmerkung auf S. 458). Wir kommen also hier wieder auf die Construction der gestuften Mengen im zweiten Beispiel; man bringe die überalldichte Menge $N = \{n\}$ in die einfache Reihenform $n_1 n_2 n_3 \cdots$, betrachte andererseits eine Reihe wachsender ganzer positiver Zahlen $a_1 a_2 a_3 \cdots$ und ersetze in N das Element $n = n_\nu$ durch die endliche Gruppe Q_n von a_ν Elementen.

Man kann aber auch vor- und rückwärts gestufte Mengen von der Mächtigkeit des *Continuums* construiren, wobei also die endlichen Mengen sicher nicht alle verschieden sein können, sondern mindestens eine *unendlich* oft (ebenfalls von der Mächtigkeit des Continuums) vorkommen muss. Es sei x irgend eine reelle Zahl des Intervalls $0 < x < 1$, die Grenzen ausgeschlossen, $X = \{x\}$ das Linearcontinuum, d. h. die Menge aller der Grösse nach geordneten Zahlen x, eine Menge, deren Ordnungstypus λ ebenfalls überalldicht ist. Nun gilt der Satz:

m) Werden in X die Elemente x durch *gestufte Mengen*

erster Mächtigkeit Q_x ersetzt, *von denen keine der andern ähnlich ist,* so entsteht eine gestufte Menge $M = \{Q_x\}$.

Der Beweis braucht nach allem Früheren nur angedeutet zu werden. Bei jeder Abbildung von M auf einen seiner Abschnitte muss das Bild einer Menge Q_x wiederum eine solche Menge sein, da nur die Stücke Q_x und ihre Theilstücke von erster Mächtigkeit sind, während jedes über ein Q_x hinausragende Stück die Mächtigkeit des Continuums besitzt. Da ferner kein Q_x dem andern ähnlich ist, so lässt sich $M = A + R$ nicht auf A abbilden, weil eine in R auftretende Menge Q_x in A kein Bild besitzt. Ebenso ist die Aehnlichkeit zwischen Abschnitten A und A' sofort ausgeschlossen, wenn die zugehörigen Elemente m, m' verschiedenen Mengen Q_x angehören; gehören sie aber derselben Menge Q_x an, so würde die Aehnlichkeit $A \simeq A'$ die Aehnlichkeit gewisser Abschnitte von Q_x zur Folge haben und widerstritte also der Voraussetzung, dass Q_x eine gestufte Menge ist.

Wählt man aber in m) für Q_x lauter vor- und rückwärtsgestufte Mengen, so wird auch $M = \{Q_x\}$ eine solche. Die Voraussetzungen von m) werden z. B. erfüllt, wenn man jedem Werth x, etwa vermöge $x = (\frac{1}{2})^{a_1} + (\frac{1}{2})^{a_2} + (\frac{1}{2})^{a_3} + \cdots$, eine Reihe wachsender positiver ganzer Zahlen $a_1 a_2 a_3 \cdots$ zuordnet und unter Q_x diejenige vor- und rückwärtsgestufte Menge versteht, die aus der Menge R der der Grösse nach geordneten rationalen Zahlen durch Einsetzung von a_ν Elementen an Stelle des Elementes $r = r_\nu$ gebildet wird; kein solches Q_x ist einem andern ähnlich. Die überalldichte Menge N, aus der durch Substitution *endlicher* Gruppen unsere gestufte Menge M entsteht, ist hier das Product RX mit dem Ordnungstypus $\eta\lambda$; sowohl N wie M sind von der Mächtigkeit des Continuums.

Vielleicht ist es auch von Interesse, eine vor- und rückwärtsgestufte Menge von der Mächtigkeit $\aleph_1$ der zweiten Zahlenklasse zu kennen (eine nur vorwärtsgestufte ist die zweite Zahlenklasse selbst, überhaupt alle wohlgeordneten Mengen, deren Typen die Zahlen der dritten Zahlenklasse sind). Zu diesem Zweck hat man nur das Linearcontinuum X des Satzes m) durch einen überalldichten Typus $U = \{u\}$ zu ersetzen, der selbst sowie jedes seiner Stücke die Mächtigkeit $\aleph_1$ besitzt; werden dann die Elemente u durch abzählbare gestufte Mengen Q_u ersetzt, deren keine der andern ähnlich ist, so entsteht eine gestufte Menge $M = \{Q_u\}$ von der zweiten Mächtigkeit. Eine solche Menge U

liefern die von F. Bernstein angegebenen „ultrarationalen Zahlen" (Diss. S. 52), d. h. die endlichen Gruppen aus Zahlen der beiden ersten Zahlenklassen. Es sei, für beliebiges endliches ν, $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ ein Inbegriff von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse (zur ersten die Null mitgerechnet). Man schreibe dies als unendliche Zahlenfolge

$$u = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu, 0, 0, 0, \cdots$$

und bringe die u derart in Form einer einfach geordneten Menge $U = \{u\}$, dass man festsetzt: es sei $u \prec u'$, wenn, für irgend ein endliches μ, u und u' in den ersten $\mu - 1$ Stellen übereinstimmen und $\alpha_\mu < \alpha'_\mu$. Betrachtet man das Element u'', das die ersten μ Stellen mit u gemein hat, während $\alpha''_{\mu+1} > \alpha_{\mu+1}$, so ist $u \prec u'' \prec u'$, folglich U überalldicht, und da $\alpha''_{\mu+1}$ bis auf einen Abschnitt noch die ganze zweite Zahlenklasse durchlaufen kann, so ist das zwischen u und u' enthaltene Stück von U sicher nicht abzählbar. Andererseits hat U die Mächtigkeit

$$\aleph_1 + \aleph_1^2 + \aleph_1^3 + \cdots = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1,$$

also ist U selbst und jedes seiner Stücke von der zweiten Mächtigkeit $\aleph_1$.

Den Schluss der gegenwärtigen Untersuchung, an die ich bei anderer Gelegenheit wieder anzuknüpfen hoffe, möge eine Verallgemeinerung des Cantor-Bernstein'schen Satzes bilden, dass die Menge aller Typen von der Mächtigkeit $\aleph_0$ (aller abzählbaren Typen) die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ (die Mächtigkeit des Continuums) besitzt.

n) Ist M eine gestufte Menge, deren Cardinalzahl $\mathfrak{m}$ ihrem Quadrat gleich ist, so bilden alle Ordnungstypen von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ eine Menge von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$.

Das gilt z. B. für $\mathfrak{m} = \aleph =$ Mächtigkeit des Continuums, ferner für jedes $\mathfrak{m}$, das in der Alephreihe vorkommt (hierfür hat Bernstein den Satz ohne Beweis ausgesprochen S. 40).

Dem Beweise sind einige Bemerkungen über $2^{\mathfrak{m}}$ vorauszuschicken. Diese Potenz bezeichnet zunächst die Mächtigkeit der Menge aller zweiwerthigen Functionen der Elemente m (aller „Belegungen" von M mit zwei Werthen), d. h. ist $f(m) = \pm 1$, so besitzt die Gesammtheit aller Functionen $f(m)$ die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$. Jede solche Function bestimmt eindeutig umkehrbar eine gewisse Theilmenge P der Menge M, nämlich die Menge aller derjenigen Elemente p, für die $f(p) = +1$; demnach

ist $2^{\mathfrak{m}}$ auch die Mächtigkeit der Menge $\{P\}$ aller Theilmengen P von M. Hieraus folgt beiläufig sehr einfach[1]), dass $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$. Da jedes Element m selbst ein P ist, so enthält $\{P\}$ eine Theilmenge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. Hätte aber $\{P\}$ selbst die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, liesse sich also in die Form $\{P_m\} \sim \{m\}$ bringen, so findet man sofort ein neues, von allen P_m verschiedenes P, indem man P aus allen denjenigen Elementen p zusammensetzt, die in ihren zugehörigen P_p *nicht* vorkommen, sodass die Mengen P und P_m das Element m sicher nicht gemeinsam haben. — — — Für das Folgende brauchen wir noch die Bemerkung, dass auch die Menge $\{S\}$ aller derjenigen Theilmengen S, die mit der Gesammtmenge M gleich mächtig sind, die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$ besitzt. Da jede transfinite Cardinalzahl ihrem Doppelten gleich ist ($\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}$), so kann man M in zwei Theilmengen A, B von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ spalten; die Gesammtheit aller Theilmengen von M, die aus A und einer Theilmenge von B bestehen, hat die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$ und ist ein Theil von $\{S\}$, wie $\{S\}$ wiederum ein Theil der Menge $\{P\}$ von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$ ist; nach dem Aequivalenzsatze hat also $\{S\}$ die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$.

Der Beweis des Satzes n) spaltet sich, ebenfalls nach dem Aequivalenzsatze, in zwei Theile; man hat zu zeigen, dass die Mächtigkeit der Typenklasse $[\mathfrak{m}]$ (der Menge aller Typen von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$) $\leqq 2^{\mathfrak{m}}$, sodann, dass sie $\geqq 2^{\mathfrak{m}}$ ist. Der erste Theil wird genau wie bei F. Bernstein durch eine „Ordnungsfunction" erledigt. Man betrachte die zweiwerthige Function der Elementpaare $f(m, n) = \pm 1$, und setze fest, dass $f(m, n) = +1$ gleichbedeutend sei mit $m \prec n$, $f(m, n) = -1$ gleichbedeutend mit $m \succ n$. Jeder Typus τ von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ lässt sich auf unendlich viele Weisen durch eine solche Ordnungsfunction der Elementpaare von M characterisiren. Umgekehrt stellt nicht jede Function $f(m, n)$ einen Typus τ dar, vielmehr ist dazu erforderlich, dass allgemein $f(n, m) = -f(m, n)$ und dass mit $f(m, n) = f(n, p)$ zugleich $f(m, n) = f(m, p)$ sei. Bestehen aber diese binären und ternären Relationen, so stellt $f(m, n)$ einen bestimmten Typus τ dar. Demnach besitzt der Inbegriff aller Functionen $f(m, n)$, dessen Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}$, eine

1) Vgl. Cantor, Berichte d. D. M. V. I, S. 77, ferner Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten S. 26, Satz VII.

Theilmenge von der Mächtigkeit der Typenklasse $[\mathfrak{m}]$; die Mächtigkeit dieser Typenklasse ist $\leq 2^{\mathfrak{m}}$.

Zum zweiten Theile des Beweises machen wir von der Voraussetzung, dass M gestuft sei, Gebrauch; m sei irgend ein Element von M, A_m der zu m gehörige Abschnitt, $S = \{s\}$ eine mit M äquivalente Theilmenge von M. Ferner sei R eine ungestufte Menge, von der auch jedes Anfangs- und Endstück ungestuft ist; wir wählen im Speciellen R als abzählbare überalldichte Menge vom Typus η. Betrachten wir diejenige geordnete Menge $T = \{R + A_s\}$, die aus S dadurch entsteht, dass man für jedes Element s die geordnete Menge $R + A_s$ einsetzt. Die Mächtigkeit von $R + A_s$ ist $\leq \aleph_0 + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, die Mächtigkeit von T liegt also (da S von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$) zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, d. h. T ist eine geordnete Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, ihr Typus τ gehört zur Typenklasse $[\mathfrak{m}]$. Nun ist zu zeigen, dass alle diese Typen τ unter einander verschieden sind, d. h. dass T und T' einander nicht ähnlich sein können, wenn S und S' verschieden sind. Das beruht auf der eigenthümlichen Structur von T, vermöge deren sich die Stücke A_s mit ihrer Umgebung nicht vermischen, sondern als *gestufte* Stücke herausheben, während jedes über A_s hinausragende Stück ungestuft ist. Sind also zwei Mengen von der Form T einander ähnlich, so müssen die *ganzen* Stücke A_s einander als Bilder entsprechen. Sind aber S und S' verschieden, so giebt es mindestens ein Element m, das zu S, aber nicht zu S' gehört (oder umgekehrt), und dem in T enthaltenen Stück $R + A_m$ entspricht dann in T' nichts Aehnliches. Folglich ist die Beziehung zwischen S und T eindeutig umkehrbar, und die Typenklasse $[\mathfrak{m}]$ enthält eine mit $\{S\}$ äquivalente Menge $\{T\} \sim \{\tau\}$, d. h. eine Theilmenge von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$; die Mächtigkeit der Typenklasse $[\mathfrak{m}]$ ist $\geq 2^{\mathfrak{m}}$. Damit ist der Satz *n*) vollständig bewiesen.

Druckfertig erklärt 12. XII. 1901.]

INHALT.

Seite

Erich Marx, Ueber ein Hochfrequenz-Messgeräth zur Bestimmung von Periode, Capacität und Selbstinduction eines Entladungskreises 437
Arthur von Oettingen, Eine Forderung der malerischen Perspective vom mathematischen Standpuncte aus betrachtet 443
F. Hausdorff, Ueber eine gewisse Art geordneter Mengen . . . 460

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Title pag

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

VII.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1901.

Einzelpreis 1 Mark.

SITZUNG VOM 2. DECEMBER 1901.

Vorträge hielten:

Herr Friedrich Engel, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn H. Liebmann: Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln.

Herr Adolf Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn K. Rohn, o. M.: Einige Beiträge zum Problem der Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades.

Herr W. Scheibner, o. M.: Ueber das Jacobi-Legendre'sche Symbol. Zweite Abhandlung; für die Abhandlungen.

Heinrich Liebmann: *Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln.* (Mit einer Tafel.)

Im zweiten Teil seiner Ausgabe von zwei geometrischen Abhandlungen Lobatschefskij's[1]) macht Herr Professor Engel auf ein Gebiet aufmerksam, welches Lobatschefskij im Gegensatz zu Johann Bolyai, dem anderen Begründer der nichteuklidischen Geometrie, wenigstens in seinen Schriften, gänzlich vernachlässigt hat, nämlich die Constructionen.[2]) Zum grossen Theile lassen sich diese zwar mit Hülfe der bewiesenen Sätze leicht ausführen, indessen giebt es doch manche, welche man erst nach einiger Ueberlegung findet. Hierher gehört z. B. die *Construction des Dreiecks aus den drei Winkeln.* Da diese auch bei J. Bolyai nicht gegeben ist, ja da bis jetzt überhaupt meines Wissens noch keine Lösung dieser Aufgabe veröffentlicht ist, so wird die in der folgenden Abhandlung gegebene Ausfüllung dieser Lücke wohl einiges Interesse verdienen. —

---

1) Nikolaj Jwanowitsch Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen. Uebersetzt und herausgegeben von Friedrich Engel. 2 Theile. Leipzig 1898 und 1899. (Im Folgenden angeführt mit „L.“)

2) „L.“ Seite 394.

Dabei sollen nun *alle möglichen Fälle* in Betracht gezogen werden; d. h. es sollen nicht nur reelle endliche Winkel zugelassen werden, sondern auch Nullwinkel (§ 5) und „Ueberwinkel" (§ 6). (Unter einem Nullwinkel ist ein Paar von parallelen Geraden zu verstehen, unter einem „Ueberwinkel" ein Paar von Geraden, welche einander nicht schneiden. Ein Ueberwinkel ist vollkommen bestimmt durch die Länge des gemeinsamen Lothes der beiden einander nicht schneidenden Geraden.)

Als Hülfsmittel dienen neben den bekannten elementaren Constructionen, die hier in § 1 kurz zusammengestellt sind, noch die Anwendung von zwei bestimmten, übrigens schon in der Literatur vorkommenden Transformationen (§ 2 und § 3—4), von denen namentlich die zweite eine grosse Reihe von Sätzen abzuleiten gestattet.

Durch in geeigneter Reihenfolge vorzunehmende Anwendung dieser beiden Transformationen gelingt es dann, die gestellte Aufgabe in allen Fällen zu lösen.

§ 1. Elementare Constructionen.

Die grundlegenden für uns unentbehrlichen Constructionen sollen hier kurz, zum Theil ohne Beweis zusammengestellt werden, mit Literaturnachweis.

1. *Construction des Parallelwinkels zum Loth.*[1]) (Lösung der Aufgabe: Durch einen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden nach einer Seite hin zu ziehen.)

Die Lösung giebt die Fig. 1, welche sich aus einem Satz über Vierecke mit drei rechten Winkeln ergiebt. (Vgl. unten § 2, 2.) In der Figur sind Strecken durch ihren daneben geschriebenen Parallelwinkel bezeichnet.[2]) Man erhält aus ihr zwei Constructionen, je nachdem man die Gerade FP_1 und den Punkt P, oder die Gerade PF_1 und den Punkt P_1 als gegeben betrachtet. Im *ersteren* Fall findet man die Parallele durch Antragen des Winkels $\Pi(l)$ an PF in P, und diese erste Construction wird auch bewiesen von J. Bolyai in § 34 des Appendix und von

1) „L". S. 256.

2) Diese Bezeichnung wird in allen *Figuren* angewendet. Im *Text* dagegen wollen wir mit $\Delta(\alpha)$ die Strecke bezeichnen (das Loth), zu welchem der Parallelwinkel α gehört.

Herrn M. Simon[1]) durch Grenzbetrachtungen, die nicht recht überzeugend sind.

Im *zweiten* Fall hat man einfach um P_1 einen Kreis mit dem Radius F_1P zu construiren und ihn mit FP zum Schnitt zu bringen, UP_1 ist dann die gesuchte Parallele. Einen directen Beweis für diese Construction hat mit Hülfe von räumlichen Betrachtungen Engel[2]) gegeben, einen anderen projectiven neuerdings Schur.[3])

2. *Construction des Lothes zum Parallelwinkel.* Entweder kann man dabei wie J. Bolyai den Satz benützen, dass im Dreieck alle drei Mittellothe auf den Seiten parallel sind, sobald zwei unter ihnen parallel sind (Appendix, § 35), oder man benützt die Transformation § 2, 1. (Vgl. § 2, 1, Anm.)

Anm. Jetzt kann man allgemein die Aufgabe lösen:

Auf den einen Schenkel eines Winkels ein Loth zu fällen, welches zu dem anderen parallel ist.

Für reelle endliche Winkel ist die Aufgabe soeben gelöst; für den Nullwinkel kann man sie auch lösen: Soll auf g_1 das zu g_2 parallele Loth h errichtet werden, so ziehe man zuerst durch einen beliebigen Punkt P von g_1 die Parallele h_2 zu g_2 und fälle dann auf g_1 das Loth, welches zu h_2 parallel ist. Dieses Loth h ist die gesuchte Gerade (Fig. 2).

Ist der gegebene Winkel ein Ueberwinkel und sind F_1F_2 die beiden Punkte, in denen das gemeinsame Loth die beiden Geraden trifft, so ziehe man zunächst durch F_1 die Parallele h_2 zu g_2 und construire dann die auf g_1 senkrecht stehende Parallele zu h_2 (Fig. 3).

3. *Das gemeinsame Loth von zwei Geraden.* Die zuletzt genannte Construction setzt voraus, dass man die Punkte F_1 und F_2 kennt. Man kann sie in verschiedener Weise finden[4]), z. B. so: (Vgl. Fig. 4.)

---

1) „Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction" (Journal f. d. reine und angewandte Mathematik 107. Berlin 1891. Seite 84—86).

2) Construction der Parallelen in der Lobatschefskij'schen Geometrie (Bulletin de la Soc. phys.-math. de Kasan [in russischer Sprache] 1897).

3) Ueber die Grundlagen der Geometrie. Math. Annalen 55 (1901) S. 292.

4) „L." S. 253, 255.

Man fälle von E das Lot EP auf g_2, ziehe sodann $EE'' \parallel PC$ und $EE' \parallel PD$, endlich construire man $BB' \perp g_1$ und $\parallel EE'$, und $AA'' \perp g_1$ und $\parallel EE''$. Die Mitte zwischen den beiden Fusspunkten A und B, nämlich der Punkt F_1, ist der eine Fusspunkt des gesuchten gemeinsamen Lothes: Man kann leicht beweisen, dass das von F_1 auf g, gefällte Loth F_1F_2 senkrecht steht auf g_1. Zieht man nämlich die Parallelen F_1F_1'' ($\parallel AA'' \parallel PC$) und F_1F_1' ($\parallel BB' \parallel PD$), so ist

$$\sphericalangle AF_1F_1'' = \sphericalangle BF_1F_1' = \Pi(AF_1)$$

und
$$\sphericalangle F_2F_1F_1'' = \sphericalangle F_2F_1F_1' = \Pi(F_1F_2),$$

also
$$\sphericalangle AF_1F_2 = \sphericalangle BF_1F_2 = \frac{\pi}{2}.$$

4. *Parallele zu zwei gegebenen Geraden.* Wenn zwei zu einander nicht parallele Gerade gegeben sind, so giebt es vier Gerade, welche zu beiden parallel sind. Soll eine derselben construirt werden, so ist dieselbe erst durch genaue Angabe des Sinnes, in welchem der Parallelismus gelten soll, festzulegen. Sind z. B. (Fig. 5) die beiden einander schneidenden Geraden P_2P und P_1P gegeben, und es soll die Parallele $F'F''$ gezogen werden, so dass $F''F' \parallel PP_1$ und $F'F'' \parallel PP_2$ wird, so halbiere man den Winkel P_1PP_2 und errichte darauf das Loth $F''F \parallel P_2P$; dieses ist die gesuchte Linie. —

Schneiden die Geraden einander nicht und sind sie nicht einander parallel, haben sie also ein gemeinsames Loth, so giebt es zwei „innere“ gemeinsame Parallele, die durch die Mitte des gemeinsamen Lothes gehen, und sich sofort construiren lassen. Jede der beiden „äusseren“ Parallelen, welche das gemeinsame Loth nicht treffen, findet man, indem man zuerst vom Mittelpunkt des gemeinsamen Lothes aus die beiden (nicht zusammenfallenden) Parallelen zu den gegebenen Geraden zieht. Zu diesen beiden Hülfslinien ziehe man dann im richtigen Sinne die Parallele; sie ist die gesuchte Linie. —

Sind endlich die gegebenen Geraden parallel, so giebt es unendlich viele Geraden, welche ihnen gleichsinnig parallel sind. Die einzige ihnen beiden im entgegengesetzten Sinne parallele Gerade findet man so. Es sei:

$$A'A \parallel B''B \text{ (Fig. 6)},$$

so construire man zuerst

$$CC'' \parallel BB'' \quad \text{und} \quad \perp AA',$$

dann $$D'D'', \quad \text{wo} \quad D''D' \parallel AA'$$

und $$D'D'' \parallel CC'';$$

es ist dann auch

$$D''D' \parallel AA' \quad \text{und} \quad D'D'' \parallel BB''.$$

Anmerkung. Zieht man noch $MM''' \parallel A'A$ und $\perp D'D''$, so ist MM''' die Mittellinie zwischen den beiden gegebenen Parallelen (Fig. 7). Man kann nun auch den Punkt P_2 angeben, in welchem die *Grenzlinie,* welche durch P_1 (auf $A'A$) geht und von der $A'A$ und $B''B$ zwei Axen sind, die Gerade $B''B$ trifft: P_2 findet man als den Schnittpunkt des von P_1 auf die Mittellinie gefällten Lothes mit $B''B$.

§ 2. Die einander zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke und Vierecke.

Wir wollen hier eine Zuordnung von rechtwinkligen Dreiecken und von Vierecken mit drei rechten Winkeln erwähnen und weiter ausführen, auf welche Lobatschefskij zum Theil durch trigonometrische Formeln gekommen ist.[1]) Prof. Engel hat gezeigt[2]), dass auch die Zuordnung des Vierecks zum Dreieck sich mit Hülfe von rein geometrischen Betrachtungen herstellen lässt.

1. *Das einem rechtwinkligen Dreieck zugeordnete rechtwinklige Dreieck.* Jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und den gegenüberliegenden Winkeln α und β entspricht ein anderes, welches ebenfalls zur einen Kathete a hat; die andere Kathete sowie die Winkel haben die in Fig. 9 angegebenen Werthe; überdies bestimmt jedes von diesen beiden Dreiecken das andere eindeutig. Construiren wir zu dem zweiten Dreieck noch ein drittes, in dem wir diesmal die Kathete $\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ festhalten, so bekommen wir Fig. 10. Von diesem dritten Dreieck kann man nun noch weiter gehen, indem man die Kathete $\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(c)\right)$ festhält; nach zwei weiteren Umformungen gelangt man zu dem ursprünglichen Dreieck zurück.

---

1) „L." S. 18 und 242, S. 26 und 255.

2) Zur nichteuklidischen Geometrie. Diese Berichte 1898, S. 181.

Man übersieht dies am besten mit Hülfe der folgenden Tabelle, in welcher von den verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken die Bestimmungsstücke in dieser Reihenfolge angegeben sind: Hypotenuse, eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel, die andere Kathete und der gegenüberliegende Winkel. Auch sind die zwei Dreiecken gemeinsamen Stücke (also je eine Kathete) neben einander geschrieben:

1	2	3	4	5	6(=1)
c	$\Delta(\beta)$	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(b)\right)$	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(a)\right)$	$\Delta(\alpha)$	c
a	a	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(c)\right)$	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(c)\right)$	b	b
α	$\frac{\pi}{2}-\Pi(b)$	β	α	$\frac{\pi}{2}-\Pi(a)$	β
b	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$	$\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$	a
β	$\Pi(c)$	$\frac{\pi}{2}-\Pi(a)$	$\frac{\pi}{2}-\Pi(b)$	$\Pi(c)$	α

Man sieht, dass das sechste Dreieck mit dem ersten bis auf die Vertauschung der Katheten identisch ist.

Anmerkung: Durch Betrachtung der beiden Dreiecke 1 und 2 gelangt man zu einer einfachen Lösung der Aufgabe, zu einem Parallelwinkel β das Loth zu construiren.[1]) Man nehme von Dreieck 1 noch c willkürlich an, β und die Katheten sind dann gegeben, und vom zweiten Dreieck kennt man eine Kathete a und den Winkel $\beta' = \Pi(c)$; die Hypotenuse ist die gesuchte Strecke.

2. *Das einem Viereck mit drei rechten Winkeln zugeordnete rechtwinklige Dreieck.*[2])

Einem Viereck mit drei rechten Winkeln (Fig. 11) entspricht eindeutig ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Bestimmungsstücke die in Fig. 12 angegebenen Werthe haben.[3])

---

1) „L.“ S. 242.
2) „L.“ S. 255.
3) Vgl. Anm. 2 auf der vorigen Seite.

Anmerkung: Man kann das Dreieck so in das Viereck hineinlegen, dass zwei Ecken zusammenfallen und die beiden Katheten auf Vierecksseiten liegen; dadurch erhält man wieder Fig. 1. Erwähnt sei auch, dass man das Viereck mit drei rechten Winkeln in doppelter Weise als ein rechtwinkliges Dreieck mit einem reellen und einem Ueberwinkel auffassen kann.

§ 3. Eine besondere Transformation der nichteuklidischen Ebene.

Mit grossem Erfolge kann man oft zur Vereinfachung von schwierigen Aufgaben der nichteuklidischen Geometrie die folgende Transformation anwenden:

Einem Punkt xy ordne man den Punkt $x_1 y_1$ zu, so dass

$$x_1 = x$$
$$\Pi(y_1) + \Pi(y) = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Wir wollen untersuchen, in was für Curven sich dabei die geraden Linien verwandeln.[1])

1. *Die nicht schneidenden Geraden.*

Untersuchen wir zuerst, welche Kurve aus einer Geraden hervorgeht, die die x-Axe nicht schneidet. Die Gerade möge der x-Axe am nächsten kommen im Punkte $x = 0$, $y = a$ (A in der Figur 13).

Construirt man nun das dem Viereck mit drei rechten Winkeln und einem spitzen Winkel bei P zugeordnete rechtwinklige Dreieck (§ 2, 2), und wendet hierauf die Transformation § 2, 1 an, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten $\Pi(x)$ und $\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(y)\right)$ und der Hypotenuse $\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right)$. Es wird also in Fig. 13 $P_1 O$ das zum Parallelwinkel $\frac{\pi}{2} - \Pi(a)$ gehörige Loth.

Eine *die Axe nicht schneidende Gerade* verwandelt sich somit in einen *Halbkreis,* dessen Mittelpunkt auf der x-Axe liegt und der Fusspunkt des gemeinsamen Lothes von Gerade und Axe ist. Ist ferner a die Länge dieses Lothes, so ist $\frac{\pi}{2} - \Pi(a)$ der Parallelwinkel, welcher zum Radius des Halbkreises gehört.

1) Auf diese Transformation hat mich Herr Prof. Engel aufmerksam gemacht (vgl. § 4, 1). Vgl. auch Hausdorff, Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie. (Diese Berichte 1899, S. 145.)

2. *Parallele zur Axe.* Suchen wir jetzt das Bild einer Geraden, welche der Axe parallel ist, und nehmen wir zum Coordinatenanfang O den Fusspunkt des der Geraden parallelen Lothes. Wir fällen ferner von P aus Lothe auf die beiden Axen (Fig. 15), nämlich $PF_1 = x_1$ und $PF = y$. Dann ist, da die abzubildende Gerade zu den beiden Axen parallel ist, und da einerseits

$$PF_1 \perp OF_1,$$

andrerseits

$$PF \perp OF:$$

$$\alpha = \pi - \Pi(x_1) - \Pi(y).$$

Dann entspricht nach § 2, 2 zusammen mit § 2, 1 dem Viereck (Fig. 15) das Dreieck (Fig. 16).

Dieses Dreieck aber ist identisch mit dem Dreieck P_1FO der Figur 15 und es ist also:

$$\sphericalangle P_1OF = \Pi(x_1)$$

und

$$\sphericalangle OP_1F = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} - \pi + \Pi(x_1) + \Pi(y) = \Pi(x_1) - \left(\frac{\pi}{2} - \Pi(y)\right).$$

Trägt man also in P_1 an OP_1 den Winkel P_1OF an, so wird

$$\sphericalangle FP_1Q = \Pi(x_1) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \Pi(y),$$

d. h. es ist

$$P_1Q \parallel OF.$$

Hieraus folgt, dass P_1 und P zwei Punkte einer Grenzlinie sind, von der OF eine Axe ist.

Die *Parallele* verwandelt sich also in eine *Grenzlinie*, welche die x-Axe zur Axe hat, und welche diese trifft im Fusspunkt der auf der Axe senkrecht stehenden Parallelen zur gegebenen Geraden.

3. *Schneidende Gerade.* Zum Coordinatenanfang nehmen wir den Schnittpunkt O der gegebenen Geraden mit der Axe (Fig. 17).

Dann entspricht dem rechtwinkligen Dreieck OFP ein Viereck mit den in Fig. 18 angegebenen Bestimmungsstücken, und durch

Einfügung dieses Vierecks in die vorige Figur erkennt man, dass die Länge des Lothes, welches von P_1 aus auf die y-Axe gefällt wird, constant ist; nämlich

$$\Pi(x_1) = \alpha.$$

Also: Eine *schneidende Gerade* geht über in einen *Ueberkreis* (Abstandslinie), dessen Mittellinie das im Schnittpunkt errichtete Loth auf der x-Axe ist; der Abstand ist das Loth, welches zu dem Schnittwinkel als Parallelwinkel gehört.

Bei der Transformation verwandeln sich also die drei Arten von Geraden (nichtschneidende, parallele, schneidende) in die drei Arten von Kreisen (Kreis, Grenzlinie, Ueberkreis), welche die x-Axe senkrecht schneiden.

Umgekehrt verwandeln sich natürlich diese drei Kreisarten in die drei Arten von Geraden — oder genauer: Es verwandeln sich die in der oberen Halbebene gelegenen Halbkreise in die betreffenden Geraden, soweit sie in der oberen Halbebene gelegen sind.

§ 4. Weiteres über diese Transformation.

Wegen der interessanten Eigenschaften der aufgestellten Transformation wollen wir noch etwas bei ihr verweilen und eine andere Ableitung derselben andeuten und einige wichtige Folgerungen, endlich noch ihre analytische Darstellung geben, wenn man sich der Cayley'schen Interpretation der nichteuklidischen Geometrie bedient.

1. *Andere Ableitung der Transformation (nach Engel).* Man kann die Transformation auch in anderer Weise begründen, nämlich durch unmittelbar sich ergebende räumliche Beziehungen, Anwendung von Eigenschaften der Grenzfläche u. s. w., statt dass man die Sätze über die zugeordneten Dreiecke und Vierecke benützt.[1]) Hieraus kann man dann leicht folgern, dass die Grenzfläche, wenn man die Transformation im Raume anwendet, und als Fundamentalebene eine Symmetrieebene der Grenzfläche benützt, sich in eine Ebene verwandelt. Hieraus schliesst man weiter, dass Halbkreise sich in Gerade verwandeln. Drittens endlich kann man hieraus wieder erkennen, dass eine (zur Fundamentalebene symmetrisch liegende) Ueberkugel sich in eine

1) Diese Untersuchungen sind bisher noch nicht veröffentlicht.

Ebene verwandelt, und daraus folgert man, dass auch Ueberkreise sich in Geraden verwandeln.

Anmerkung: Man kann auch von der Verwandlung der Kreise in nicht schneidende Gerade ausgehen, und dann (weil die Grenzfläche sowohl wie die Ueberkugeln von unendlich vielen Ebenen in Kreisen getroffen werden) leicht folgern, dass Grenzfläche und Ueberkugel in Ebenen, und Grenzlinie und Ueberkreis daher in Gerade übergehen.

2. *Folgerungen:* Daraus, dass bei der Transformation die verschiedenen Arten von Kugeln sich in Ebenen verwandeln, kann man eine Reihe von Sätzen ableiten und, indem man die Fundamentalebene in geeigneter Weise wählt, z. B. erkennen, dass je zwei derselben sich in einem Kreis (oder Grenzlinie oder Ueberkreis) schneiden, dass jeder ebene Schnitt einer Ueberkugel entweder Abstandslinie oder Grenzlinie oder Kreis ist, u. s. w.

3. *Die Transformation in CAYLEY's Bild der nichteuklidischen Geometrie.* Deutet man die Transformation in der bekannten von CAYLEY ersonnenen, von KLEIN vervollständigten Abbildung der nichteuklidischen Geometrie auf die Ebene durch Benützung einer geeigneten, auf einen Fundamentalkegelschnitt gegründeten Maassbestimmung[1]), so gelangt man zu sehr einfachen Formeln.

Es sei

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0$$

die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes und

$$x_3 = 0$$

stelle die Axe dar, auf welche die Transformation bezogen wird. Dann ist unsere Transformation gegeben durch die Formeln:

$$x_1' = x_1$$
$$x_2' = x_2$$
$$x_3' = \sqrt{x_1 x_2 - x_3^2}.$$

Man erkennt sofort, dass die Transformation involutorisch ist, ferner dass jeder Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

ein „Kreis"

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 = a_3^2 (x_1 x_2 - x_3^2)$$

entspricht.

1) Vgl. etwa die Darstellung von LINDEMANN in den Vorlesungen über Geometrie II, 1, S. 461 ff..

Man sieht auch direct, dass eine Gerade, welche die Fundamentalaxe im imaginären Gebiete (ausserhalb des Kegelschnittes) trifft, sich in einen wirklichen „Kreis“ verwandelt, d. h. in einen Kegelschnitt, der den Fundamentalkegelschnitt in zwei imaginären Punkten berührt.

Eine Parallele zur Geraden $x_3 = 0$, z. B.

$$x_1 + \lambda x_3 = 0,$$

verwandelt sich dagegen in einen Kegelschnitt

$$x_1^2 = \lambda^2 (x_1 x_2 - x_3^2),$$

welcher den Fundamentalkegelschnitt im Punkte ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$) vierpunktig berührt, also in eine „Grenzlinie“; und endlich:

Eine Gerade, welche die Axe trifft, verwandelt sich in einen Kegelschnitt, der den Fundamentalkegelschnitt in zwei reellen Punkten berührt, also in einen „Ueberkreis“.

§ 5. Construction des Dreiecks aus reellen Winkeln.

Mit Anwendung der in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Hülfsmittel gelingt es leicht, ein Dreieck aus drei Winkeln zu construiren, vor allem in den Fällen, wo sich unter den Winkeln kein Ueberwinkel befindet.

1. *Dreiecke mit Nullwinkeln.* Die Construction des Dreiecks aus drei Nullwinkeln findet sich in § 1, 4 (Fig. 6), die des Dreiecks aus zwei Nullwinkeln und einem endlichen Winkel in § 1, 4 (Fig. 5). Um ein Dreieck aus zwei endlichen und einem Nullwinkel zu construiren, hat man einfach, wenn a und b die zu den gegebenen Winkeln gehörigen Lothe sind, diese an einander zu tragen (Fig. 19).

Im gemeinsamen Punkt hat man das Loth zu errichten und durch die Endpunkte die Parallelen zu ziehen.

Befindet sich unter den gegebenen Wiinkeln ein stumpfer, so erleidet die Construction eine kleine, leicht zu findende Veränderung.

2. *Dreieck mit drei endlichen Winkeln.* Zuerst wollen wir zeigen, dass sich zu jedem derartigen Dreieck eine bestimmte andere Figur zuordnen lässt.

Wir zerfällen das Dreieck, in dem $\beta + \beta_1 \geqq \alpha$ und $\geqq \alpha_1$ sein möge, durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Theildreiecke (Fig. 20) und wenden auf jedes derselben zweimal die Transfor-

mation (§ 2, 1) an. Die so erhaltenen beiden rechtwinkligen Dreiecke legen wir in der Weise aneinander, wie es Fig. 21 angiebt.

Umgekehrt kann man nun, wenn blos die Dreiecks*winkel* α, α_1, $\beta+\beta_1$ bekannt sind, Fig. 21 construiren. Man ziehe von einem Punkte O aus die beiden Strecken $\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ und $\Delta\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)$, so dass sie die Winkel $\beta+\beta_1$ mit einander bilden. In den Endpunkten der beiden Strecken errichte man Lothe (l und l_1) und ziehe durch O eine Gerade, welche l und l_1 unter gleichen Winkeln trifft. Um diese Gerade zu finden, bringe man l und l_1 zum Schnitt (es sei P der Schnittpunkt), halbire den Winkel, der ausserhalb des von l, l_1, $\frac{\pi}{2}-\alpha$, und $\frac{\pi}{2}-\alpha_1$ gebildeten Vierecks liegt, und fälle von O aus das Loth auf die Winkelhalbirende. Dieses Loth ist dann die gesuchte Linie und bestimmt durch seine Schnittpunkte mit den Geraden l und l_1 die Figur, aus der man alle Bestimmungsstücke des gesuchten Dreiecks erhält.[1])

Es muss noch gezeigt werden, dass mit den gegebenen Bestimmungsstücken ($\beta+\beta_1$, $\alpha\,[\leqq\beta+\beta_1]$, $\alpha_1\,[\leqq\beta+\beta_1]$, wobei $\alpha+\alpha_1+(\beta+\beta_1)<\pi$) diese Construction sich immer ausführen lässt:

Nehmen wir einmal an, dass der Punkt P existirt. Dann folgt daraus, dass das Loth OF_2, welches von O aus auf die Halbirungslinie des Winkels J_1PF (bezw. JPF_1) gefällt ist, die Strecke PF (bezw. PF_1) wirklich schneidet, weil die beiden rechtwinkligen Dreiecke OF_2P und OFP (bezw. OF_1P) auf derselben Hypotenuse nach derselben Seite hin errichtet sind. Wegen der Symmetrie zur Winkelhalbirenden wird dann das Loth OF_2 auch die Gerade l_1 (bezw. die Gerade l) schneiden. —

Es kommt nun noch darauf an, die Existenz des Punktes P nachzuweisen.

---

1) In einer kleinen Veröffentlichung, die ich erst nachträglich bemerkt habe (Zwei Sätze zur nichteuklidischen Geometrie, Math. Annalen 48 (1897), p. 706) zeichnet Herr Simon die beiden zusammengehörigen Dreiecke Fig. 8 und Fig. 9. Auch stellt er die Behauptung auf: „Damit wird die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln zugänglich.“ Diese Behauptung bestätigt sich hier, indem in der That eine *wiederholte* Anwendung der Transformation zum Ziele führt.

Bezeichnen wir die Lote l und l_1 mit RFJ und $R_1F_1J_1$, so kann man *erstens* leicht zeigen, dass die Geraden FR und F_1R_1 divergiren. Würden sie nämlich convergiren, und sich schneiden oder parallel sein, so erhielte man ein Viereck aus den Seiten FO, OF_1 und den beiden hinreichend verlängerten Lothen FR und F_1R_1, dessen Winkelsumme grösser als 2π wäre, da $\beta + \beta_1 < \pi$. Hätten sie aber ein gemeinsames Loth RR_1, so könnte dieses keine der beiden Geraden FO und F_1O treffen und es wäre daher $RFOF_1R_1R$ ein Fünfeck, dessen Winkelsumme grösser als 3π wäre. —

Wäre nun weiter $FJ \parallel F_1J_1$, so würde, wie man erkennt, indem man durch O die Parallele zu beiden zieht,

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \beta + \beta_1$$

sein, also

$$\pi - \alpha - \alpha_1 - (\beta + \beta_1) = 0,$$

was ausgeschlossen ist.

Würden endlich l und l_1 ein gemeinsames Loth JJ_1 haben, so würde das von O aus auf JJ_1 gefällte Loth den Winkel $FOF_1 = \beta + \beta_1$ in zwei Theile zerlegen, von denen der eine grösser als $\frac{\pi}{2} - \alpha$, der andere grösser als $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$ wäre, was erst recht nicht möglich ist.

l und l_1 müssen sich also nothwendig schneiden, und zwar im Winkelraum FOF_1, w. z. b. w.

§ 6. Dreiecke mit Ueberwinkeln.

Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Construction von Dreiecken mit Ueberwinkeln, namentlich dann, wenn sich kein Nullwinkel unter den gegebenen Winkeln befindet.

1. *Das Dreieck aus zwei Nullwinkeln und einem Ueberwinkel.* Die Construction ist schon in § 1, 4 gegeben.

2. *Dreieck aus einem endlichen Winkel, einem Nullwinkel und einem Ueberwinkel.* Man fälle (Fig. 22) auf die Seite, welche dem Nullwinkel gegenüberliegt, das zu den Schenkeln desselben parallele Loth, dessen Fusspunkt F sein möge. Bezeichnen wir den gegebenen spitzen Winkel mit $\Pi(a)$, die den Ueberwinkel definirende Strecke mit b, so ist in der Figur 22

$$AF = a, \quad \Pi(FC) = \frac{\pi}{2} - \Pi(b),$$

wie man erkennt, wenn man durch C die Parallele zu dem in F errichteten Lothe zieht, und hieraus ergiebt sich die Construction, die noch eine kleine Aenderung erleidet, wenn der gegebene Winkel stumpf ist.

3. *Dreieck aus zwei Ueberwinkeln und einem Nullwinkel.* Fällt man auf die dem Nullwinkel gegenüberliegende Seite das den Schenkeln des Nullwinkels parallele Loth, dessen Fusspunkt F sei, und sind a und b die Strecken, welche die Ueberwinkel definiren, so ist in der Figur $\Pi(AF) = \frac{\pi}{2} - \Pi(a)$, $\Pi(FB) = \frac{\pi}{2} - \Pi(b)$, woraus sich die Construction sofort ergiebt (Fig. 23).

4. *Dreieck aus einem Ueberwinkel und zwei Winkeln.* Gegeben sei die Strecke $AB = a$, welche dem Ueberwinkel entspricht, ferner die Winkel δ und der Winkel γ, dessen Nebenwinkel wir mit γ' bezeichnen. Jetzt sind drei Fälle zu unterscheiden.

Schneidet die Verlängerung von DC die von AB in E (Fig. 24), so kann man nach § 2, 1 zwei zugeordnete rechtwinklige Dreiecke construiren und in folgender Weise auseinanderlegen (Fig. 25).

Wenn in dieser Figur, die sich mit Hülfe der gegebenen Stücke leicht construiren lässt, die Geraden A_1B_1 und D_1C_1, einander nicht schneiden, so war die Annahme falsch, dass in der vorigen Figur AB und DC einander schneiden; schneiden sie einander aber, so kann man die Bestimmungsstücke von Fig. 25 nach § 2, 1 daraus ablesen. —

Schneiden sie einander nicht, so hat man an Stelle von Fig. 25 die folgende anzunehmen (Fig. 26), welche durch die Transformation § 2, 2 übergeht in Fig. 27, die man ebenfalls leicht construiren und aus der man die Bestimmungsstücke von Fig. 26 rückwärts ableiten kann (nach § 2, 2). —

Wenn endlich $AB \parallel CD$, so würde

$$\Pi(CB) = \gamma', \quad \Pi(DA) = \delta$$

sein, und damit ist die Construction auch für diesen Ausnahmefall gegeben.

5. *Dreieck aus einem Winkel und zwei Ueberwinkeln.* Soll ein Dreieck aus einem Winkel und zwei Ueberwinkeln construirt werden (Fig. 28), so zerfälle man es durch ein vom Scheitel des endlichen Winkels aus auf die gegenüberliegende Seite gefälltes Loth in zwei Vierecke mit drei rechten Winkeln.

Man erhält dann hieraus zwei zugeordnete rechtwinklige Dreiecke (Fig. 29), welche eine Kathete gemeinsam haben, von denen man ferner die Hypotenusen und die Summe der beiden der gemeinsamen Kathete anliegenden Winkel kennt.

Durch unsere Transformation verwandelt sich aber die Aufgabe in die triviale Aufgabe: Ein Dreieck, von dem man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt, durch das vom Scheitel dieses Winkels aus auf die gegenüberliegende Seite gefällte Loth in zwei rechtwinklige Theildreiecke zu zerlegen.

6. *Dreieck aus drei Ueberwinkeln.*

Es seien (Fig. 30) abc die Strecken, welche die Ueberwinkel definiren. Die Aufgabe lässt sich dann auch so formuliren: Man soll die Punkte B_2 und C_1 finden, in welchen die Ueberkreise, deren Mittellinien auf a in A_2 und A_1 senkrecht stehen und deren Abstände bezw. b und c sind, von der gemeinsamen (äusseren) Tangente berührt werden. Diese gemeinsame äussere Tangente trifft die Verlängerung von $A_1 A_2$ nicht, weil sie die Geraden $A_1 C_2$ und $A_2 B_1$ nicht schneidet, und hieraus folgt: Wendet man die Transformation § 3 an, indem man dabei die Gerade $A_1 A_2$ als Axe benützt, so verwandelt sich dabei die gemeinsame Tangente in einen Halbkreis (§ 3, 1) welcher zwei Geraden, die Bilder der Ueberkreise (§ 3, 3) berührt. Dieser Halbkreis lässt sich aber sofort construiren; sein Mittelpunkt ist der Schnitt der Mittellinie der Bilder der Ueberkreise mit der Axe $A_1 A_2$; von diesem Mittelpunkt aus braucht man dann nur das Loth auf das Bild eines der Ueberkreise zu fällen, um den gesuchten Halbmesser zu bekommen.

Wendet man die inverse Transformation an, so gelangt man wieder zur Figur 30.

Hiermit sind alle möglichen Fälle der Construction des Dreiecks aus drei Winkeln erledigt.

Erwähnt sei, dass auch die Construction des Tetraeders aus den sechs Kantenwinkeln sich ausführen lässt, da sie, wie man leicht einsehen kann, auf die Construction des Dreiecks aus drei Winkeln zurückkommt.

Druckfertig erklärt 25. XII. 1901.]

K. Rohn: *Einige Beiträge zum Problem der Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades.*

Die Aufgabe *den achten Punkt zu finden, der zusammen mit sieben beliebig gegebenen Punkten die Schnittpunkte dreier Flächen 2. Grades bildet*, hat bereits eine Anzahl von Mathematikern beschäftigt und eine Reihe zum Theil einfacher und eleganter Lösungen gefunden.

Zunächst sind hier die fundamentalen Arbeiten von Hesse zu erwähnen in dem Journal für reine und angewandte Mathematik (Bd. XX, 304; Bd. XXVI, 147, Bd. LXXIII, 371; Bd. LXXXV, 304 und aus Hesse's Nachlass Bd. IC, 110). Ferner hebe ich hervor die Untersuchungen von v. Staudt in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage p. 366, von P. Serret in seiner géométrie de direction p. 142 und p. 311, von Reye in seiner Geometrie der Lage II, 152, und Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. C 487, von Schröter in seiner Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung 704 und Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. IC, 131, von Zeuthen, Danska Vid. Selsk. Jahrg. 1880 und Math. Ann. Bd. XVIII, 63 sowie Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. IC, 320, von Sturm Math. Ann. Bd. I, 533 und Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. IC 317, von Picquet, Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. LXXIII, 367 und Bd. IC, 225, von Caspary, Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. IC, 128.

Ich werde im Folgenden einerseits die Coordinaten des achten Schnittpunktes durch die Coordinaten der übrigen darstellen und andererseits die geometrischen Constructionen in verschiedener Richtung erweitern und ergänzen, insbesondere auch den Fundamentalsatz, auf dem die Construction von Hesse beruht, in einfachster Weise beweisen. Hiernach müssen meine Darlegungen theils analytischer theils rein geometrischer Natur sein.

Bei der analytischen Behandlung des Problems treffe ich folgende Festsetzungen. Acht *beliebige* Raumpunkte mögen durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und ihre Coordinaten mit x_i, y_i, z_i, w_i $(i=1,2\ldots,8)$ bezeichnet werden. Ferner bedeute $|i, k, l, m|$ die mit den Coordinaten dieser Punkte gebildete viergliedrige Determinante.

Dann gilt die Identität:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} 0 = {} & |1234|\cdot|5678|+|1235|\cdot|6784|+|1236|\cdot|7845| \\ & +|1237|\cdot|8456|+|1238|\cdot|4567|. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt sofort, wenn wir etwa $x_8 y_8 z_8 w_8$ als die Coordinaten eines variablen Punktes, also jene Gleichung als die Gleichung einer Ebene ansehen. Diese Ebene müsste dann vier beliebige Punkte 4, 5, 6, 7 enthalten, d. h. ihre Gleichung verschwindet identisch. Aus jener Identität folgen die weiteren für sieben resp. sechs Punkte:

$$\text{(Ia)}\quad \begin{aligned} 0 = {} & |1234|\cdot|1567|-|1235|\cdot|1674|+|1236|\cdot|1745| \\ & -|1237|\cdot|1456|, \end{aligned}$$

$$\text{(Ib)}\quad 0 = |1234|\cdot|1256|+|1235|\cdot|1264|+|1236|\cdot|1245|.$$

Bedeuten nun 1, 2, $\cdots$, 8 die acht Schnittpunkte dreier Flächen 2. Grades, so schneiden die dreifach unendlich vielen Flächen 2. Grades durch die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 7, 8 auf der Geraden 56 eine Involution aus, der auch das Punktepaar 56 angehört. Denn sind $\Gamma = 0$, $\Delta = 0$ zwei Flächen 2. Grades durch die genannten sechs Punkte und die Gerade 56, sind ferner $A = 0$, $B = 0$ zwei beliebige Flächen 2. Grades durch die sechs Punkte, so stellt: $\alpha A + \beta B + \gamma \Gamma + \delta \Delta = 0$ (wo $\alpha\beta\gamma\delta$ beliebige Constanten sind) die Gesamtheit aller Flächen 2. Grades durch jene sechs Punkte dar, deren Schnittpunkte mit der Geraden 56 sich also durch die Gleichung: $\alpha A + \beta B = 0$ bestimmen. Dies beweist aber unsere Behauptung.

Die Flächen $\Gamma = 0$, $\Delta = 0$ schneiden sich — abgesehen von der Geraden 56 — noch in einer Curve 3. Ordnung c; auf ihr liegen die Punkte 1, 2, 3, 4, 7, 8 und sie schneidet die Gerade 56 in zwei Punkten $5 + \lambda' 6$ und $5 + \lambda'' 6$, oder P' und P'', mit den Coordinaten $x_5 + \lambda' x_6, \ldots$ und $x_5 + \lambda'' x_6, \ldots$. Offenbar bilden auch P' und P'' ein Punktepaar der genannten Involution. Die Coordinaten von P' und P'' oder vielmehr die

zugehörigen Parameter ergeben sich in einfachster Weise durch folgende Ueberlegung.

Projicirt man die Curve 3. Ordnung c aus P', resp. P'', so erhält man zwei Kegel $K' = 0$, resp. $K'' = 0$ mit den Scheiteln P', resp. P'', welche durch die acht gegebenen Punkte gehen. Sind $x_0 y_0 z_0 w_0$ die Coordinaten eines variablen Punktes, so lautet die Gleichung des ersten Kegels:

$$\begin{aligned} K' \equiv & |5+\lambda' 6, 1, 2, 0| \cdot |5+\lambda' 6, 3, 4, 0| \cdot |5+\lambda' 6, 1, 3, 7| \cdot \\ & \cdot |5+\lambda' 6, 2, 4, 7| \\ & - |5+\lambda' 6, 1, 3, 0| \cdot |5+\lambda' 6, 2, 4, 0| \cdot |5+\lambda' 6, 1, 2, 7| \cdot \\ & \cdot |5+\lambda' 6, 3, 4, 7| = 0. \end{aligned}$$

Denn er besitzt den Scheitel P' und geht ersichtlich durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 7. Da dieser Kegel durch c und somit auch durch den Punkt 5 geht, so muss seine Gleichung erfüllt sein, wenn man in ihr $x_0 y_0 z_0 w_0$ durch $x_5 y_5 z_5 w_5$ ersetzt. Also müssen λ' und λ'' der quadratischen Gleichung genügen:

$$\begin{aligned} 0 = & |5, 6, 1, 2| \cdot |5, 6, 3, 4| \cdot |5+\lambda 6, 1, 3, 7| \cdot |5+\lambda 6, 2, 4, 7| \\ & - |5, 6, 1, 3| \cdot |5, 6, 2, 4| \cdot |5+\lambda 6, 1, 2, 7| \cdot |5+\lambda 6, 3, 4, 7| \end{aligned}$$

Von der Involution auf der Geraden 56 ist das Punktepaar 5, 6 durch die Parameter 0, ∞ und das Punktepaar P', P'' durch die Parameter λ', λ'' bestimmt. Sind μ', μ'' die Parameter eines beliebigen weiteren Punktepaares dieser Involution, so besteht somit die bekannte Relation: $\lambda' \cdot \lambda'' = \mu' \cdot \mu''$.

Mögen m, n, p, q, r, s die Zahlen 1, 2, 3, 4, 7, 8 in beliebiger Reihenfolge sein, dann schneiden nach dem oben Gesagten die Ebenen mnp und qrs die Gerade 56 in einem Punktepaar unserer Involution, so dass man für μ' und μ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$|5+\mu 6, m, n, p| \cdot |5+\mu 6, q, r, s| = 0$$

setzen kann.

Aus den voranstehenden Gleichungen zweiten Grades ergeben sich die Werthe von $\lambda' \cdot \lambda''$ resp. $\mu' \cdot \mu''$ als Quotienten, deren Zähler die bezüglichen constanten Glieder und deren Nenner die Coefficienten von λ^2, resp. μ^2 sind. Demnach geht die Relation: $\lambda' \cdot \lambda'' = \mu' \cdot \mu''$ über in:

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
&|5mnp|\cdot|5qrs|\cdot\\
&\cdot\{|5612|\cdot|5634|\cdot|6713|\cdot|6724|-|5613|\cdot|5624|\cdot|6712|\cdot|6734|\}\\
&=|6mnp|\cdot|6qrs|\cdot\\
&\cdot\{|5612|\cdot|5634|\cdot|5713|\cdot|5724|-|5613|\cdot|5624|\cdot|5712|\cdot|5734|\},
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\begin{vmatrix}
|5mnp|\cdot|5qrs|, & |7512|\cdot|7534|, & |7513|\cdot|7524| \\
|6mnp|\cdot|6qrs|, & |6712|\cdot|6734|, & |6713|\cdot|6724| \\
0 & |5612|\cdot|5634|, & |5613|\cdot|5624|
\end{vmatrix} = 0.
$$

In Folge dreier zur Identität (Ib) analogen Relationen kann man, ohne den Werth der Determinante zu ändern, die zweite oder dritte Verticalreihe durch:

$$
|7514|\cdot|7523|,\quad |6714|\cdot|6723|,\quad |5614|\cdot|5623|
$$

ersetzen.

Die vorstehende Gleichung (II) verknüpft die Coordinaten des Punktes 8 *linear* mit denen der sieben andern Punkte. Ersetzt man in ihr den Punkt 8 durch den variablen Punkt 0, so stellt sie eine Ebene dar, der der Punkt 8 angehören muss. Die Gleichung (II) liefert verschiedene Ebenen durch den Punkt 8, da man m, n, p, q, r, s noch in beliebiger Wahl durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 7, 8 ersetzen kann. Wählt man insbesondere $m = 3$, $n = 4$, $p = 7$, $q = 1$, $r = 2$, $s = 8$, so geht die Gleichung (II) mit Hilfe einer Identität von der Form (Ib) über in:

$$
\text{(III)}\quad
\left.\begin{aligned}
&|8512|\cdot|5634|\cdot|5734|\cdot|6713|\cdot|6724|\\
+&|8612|\cdot|6734|\cdot|6534|\cdot|7513|\cdot|7524|\\
+&|8712|\cdot|7534|\cdot|7634|\cdot|5613|\cdot|5624|
\end{aligned}\right\} = 0.
$$

Aus dieser Gleichung folgen durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, . . ., 7 eine ganze Reihe weiterer; sie stellen alle lineare Relationen für die Coordinaten des Punktes 8 dar. Die Gleichung (III) sagt aus, dass der Punkt 8 in einer Ebene durch 12 liegt, deren Gleichung aus (III) hervorgeht, wenn man für den Punkt 8 den variablen Punkt 0 einsetzt.

Die Relation (III) lässt sich noch in überaus einfacher Weise durch folgende Ueberlegung gewinnen. Sind wieder $x_0 y_0 z_0 u_0$ die Coordinaten eines variablen Punktes, so stellt:

$$
\varrho|8502|\cdot|6730| + \sigma|8602|\cdot|7530| + \tau|8702|\cdot|5630| = 0,
$$

(wobei ϱ, σ, τ beliebige Constanten sind) die Gleichung einer Fläche 2. Grades durch die sechs Punkte: 2, 3, 5, 6, 7, 8 dar. Soll diese Fläche auch noch durch den Punkt 4 gehen, so sind ϱ, σ, τ so zu bestimmen, dass die Relation:

$$\varrho|8542|\cdot|6734|+\sigma|8642|\cdot|7534|+\tau|8742|\cdot|5634|=0$$

erfüllt ist. Nun gilt aber die zu (Ib) analoge Identität:

$$|8542|\cdot|6724|+|8642|\cdot|7524|+|8742|\cdot|5624|=0.$$

Setzt man also:

$$\varrho=|6724|:|6734|,\quad \sigma=|7524|:|7534|,\quad \tau=|5624|:|5634|,$$

so wird jener Relation genügt, und die vorerwähnte Fläche 2. Grades enthält sieben von den gegebenen Punkten und folglich auch noch den achten, nämlich Punkt 1. Die Gleichung der so gefundenen Fläche 2. Grades muss also durch die Coordinaten des Punktes 1 befriedigt werden, was unmittelbar die mit (III) übereinstimmende Relation:

$$(\mathrm{III}')\qquad \left.\begin{aligned} &|8512|\cdot|6713|\cdot|6724|:|6734|\\ +&|8612|\cdot|7513|\cdot|7524|:|7534|\\ +&|8712|\cdot|5613|\cdot|5624|:|5634|\end{aligned}\right\}=0$$

liefert.

Die Gleichung (II) und ihre analogen gestatten auch sofort eine explicite Darstellung der Coordinaten des achten Punktes. Führt man die folgenden Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} K&=\{|5613||5624||7512||7534|-|5612||5634||7513||7524|\}:|5123|\\ L&=\{|5612||5634||6713||6724|-|5613||5624||6712||6734|\}:|6123|\\ M&=\{|6712||6734||7513||7524|-|6713||6724||7512||7534|\}:|7123|\\ N&=\{|6413||5624||7412||7534|-|6412||5634||7413||7524|\}:|4123|\end{aligned}$$

so ergeben sich aus (II) durch Vertauschung der Indices die drei Gleichungen:

$$(\mathrm{II}')\qquad \begin{aligned} K|6784|&=L|7845|,\\ K|6784|&=M|8456|,\\ K|6784|&=N|5678|.\end{aligned}$$

Es gilt aber die Identität:

$$4|5678|+5|6784|+6|7845|+7|8456|+8|4567|=0,$$

wo die vor den Determinanten stehenden Zahlen die x, y, z oder w-Coordinate des bezüglichen Punktes bedeuten. Trägt man für

die Determinanten in die Identität ihre aus den vorausgehenden Relationen sich ergebenden Werthe ein, so erhält man die explicite Darstellung der Coordinaten des achten Punktes:

$$\text{(IV)} \qquad 8 = 4 : N + 5 : K + 6 : L + 7 : M.$$

Hierin vertreten die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8 entweder die Coordinaten x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, oder $y_4, \ldots, y_8$, oder $z_4, \ldots, z_8$, oder $w_4, \ldots, w_8$. Die Gleichung (IV) bleibt völlig ungeändert, wenn man zwei der 4 Zahlen 4, 5, 6, 7 vertauscht; denn alsdann vertauschen sich dementsprechend zwei der vier Constanten N, K, L, M und alle ändern zugleich ihre Vorzeichen.

Die Gleichungen (II) und (III), oder besser (II′) und (III′) lassen auch eine einfache geometrische Deutung zu. So sagt die Gleichung:

$$|K6 + L5, 7, 4, 8| = 0$$

aus, dass die Ebene 874 durch einen Punkt der Geraden 65 geht, der — entsprechend den Ausdrücken K und L — mit Hilfe der gegebenen sieben Punkte construirt werden kann. Weiter unten soll auf diese Construction näher eingegangen werden.

Die Gleichung (III′) hat die Form:

$$|\alpha 5 + \beta 6 + \gamma 7, 1, 2, 8| = 0,$$

wo:

$$\alpha = |6713| \cdot |6724| : |6734|, \quad \beta = |7513| \cdot |7524| : |7534|,$$
$$\gamma = |5613| \cdot |5624| : |5634|$$

ist. Demnach geht die Ebene 812 durch einen bestimmten Punkt $\alpha 5 + \beta 6 + \gamma 7$, oder R, der Ebene 567. Nun bilden drei Punktepaare 5, 6; $5 + \lambda' 6$, $5 + \lambda'' 6$ und $5 + \mu' 6$, $5 + \mu'' 6$ eine Involution, wenn $\lambda' \lambda'' = \mu' \mu''$ ist.

Diese Relation ist aber für:

$$\lambda' = -|5713| : |6713|, \quad \lambda'' = -|5724| : |6724|,$$
$$\mu' = -|5734| : |6734| \text{ und } \mu'' = \beta : \alpha$$

erfüllt. Daraus folgt, dass auf der Geraden 56 das Punktepaar 5, 6 mit dem in den Ebenen 713 und 724 liegenden Punktepaar eine Involution bestimmt, in welcher der Punkt $\alpha 5 + \beta 6$ dem in der Ebene 734 liegenden Punkt entspricht. In gleicher Weise liegt auf der Geraden 57 eine Involution; ein Punktepaar von ihr ist 5, 7, ein zweites schneiden die Ebenen

613 und 624 aus; dem Schnittpunkt der Ebene 634 entspricht der Punkt $\alpha 5 + \gamma 7$. Die Geraden, welche die Punkte 7 und $\alpha 5 + \beta 6$, resp. 6 und $\alpha 5 + \gamma 7$ verbinden, schneiden sich im Punkte R, und die Ebene $12R$ geht durch den Punkt 8. Ganz ebenso kann man zwei weitere Ebenen $23S$ und $13T$ finden, indem man von jeder der beiden einen der Ebene 567 angehörigen Punkt S resp. T sucht.

Zur wirklichen Construction sei noch folgendes bemerkt. Man schneide die Seiten des Tetraëders 1234 mit der Ebene

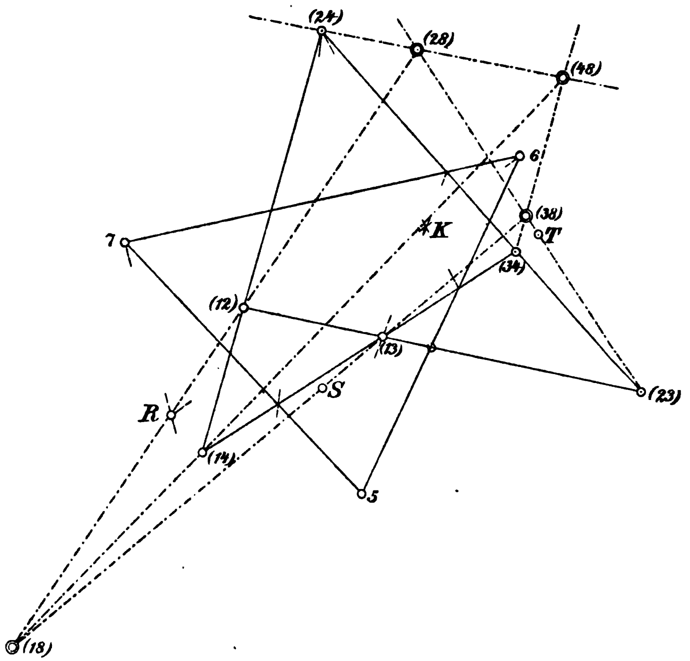


Fig. 1.

567, so erhält man ein Vierseit mit den Ecken (14), (24), (34), (12), (13), (23), wo (ik) den Schnittpunkt der Geraden ik mit der Ebene 567 bezeichnet. (Fig. 1.) Dann ist die weitere Construction ganz in der Ebene 567 auszuführen, indem man die Punkte (18), (28), (38) in ihr aufsucht. Es liegen aber (18) und (28) auf einer Geraden, die (12) mit dem vorher erwähnten Punkte R verbindet. Ebenso liegen (28) und (38) auf der Ver-

bindungslinie von (23) mit S und schliesslich (38) und (18) auf der Verbindungslinie von (13) mit T. Der Punkt R ergiebt sich mit Hilfe zweier Strahl-Involutionen, wobei 75 und 76, 7(13) und 7(24), 7(34) und 7R drei Strahlenpaare der einen ebenso 65 und 67, 6(13) und 6(24), 6(34) und 6R drei Strahlenpaare der andern sind. Die Construction von R erfordert das Ziehen von fünf Geraden.

Es sind nämlich (13) und (24) zwei Gegenecken eines Vierseits, von dem zwei weitere Gegenecken durch 67 aus der Geraden (24)(34) und durch 57 aus der Geraden (13)(34) ausgeschnitten werden, so dass (34) und J das dritte Paar Gegenecken bilden; demnach geht 7J durch R. Ein zweites Vierseit besitzt die Gegenecken (13) und (24), ein weiteres Paar seiner Gegenecken bilden die Schnittpunkte von (24)(34) mit 67 und von (13)(34) mit 56, so dass das dritte Paar aus (34) und K besteht; 6K geht also ebenfalls durch R.

S und T werden in gleicher Weise construirt, worauf sich die Geraden 18, 28 und 38 durch die bezüglichen Ecken des Dreiecks mit den Seiten (24)S, (13)T und (12)R ziehen lassen.

Um die Stellung der vorliegenden Arbeit im Rahmen der zu Anfang citirten Abhandlungen zu kennzeichnen, sind einige allgemeine Bemerkungen nöthig. Die verschiedenen Constructionen laufen darauf hinaus Ebenen zu finden, die durch den gesuchten Punkt 8 gehen und zwei von den gegebenen Punkten enthalten. Zur Festlegung einer solchen Ebene ist also die Construction eines weiteren Punktes erforderlich.

Man kann nun einen derartigen Punkt entweder 1) auf der Verbindungslinie zweier gegebener Punkte, oder 2) auf der Verbindungsebene dreier gegebener Punkte, oder endlich 3) irgendwie sonst im Raume bestimmen. Der zuletzt erwähnte Fall scheint nur zu Lösungen unseres Problems zu führen, die wohl übersichtlich und elegant (vergl. Reye a. a. O. C, 487), aber weniger einfach in der Ausführung sind, als die durch die beiden ersten Fälle erzielten Lösungen. Die Constructionen des achten Schnittpunktes, von Serret (a. a. O. 314ff.), von Schröter (a. a. O. IC, 131), von Zeuthen (a. a. O. IC, 320) und von Sturm (a. a. O. IC, 533) ordnen sich dem zweiten Falle unter und sind in ihrer Ausführung nicht wesentlich verschieden, so verschieden auch der Ausgangspunkt ist, der die einzelnen Geometer zu derselben hinführt.

So ist auch die oben geschilderte Construction der von Schröter gegebenen völlig gleich.

Der erste Fall findet seine Erledigung in den citirten Arbeiten von Hesse und in der géom. de dir. von Serret (p. 317 u. ff.). Insbesondere ergeben sich hierbei Gerade, die den gesuchten Punkt 8 enthalten. Sind nämlich i, k, l, m vier von den gegebenen Punkten, und sucht man auf den Geraden ik und lm je einen Punkt, der mit der andern Geraden eine Ebene durch 8 bestimmt, so geht ihre Verbindungslinie durch den Punkt 8.

Die geometrische Deutung der Gleichungen II (oder II') müsste natürlich auch zu der von Hesse gegebenen Lösung führen. Ich ziehe es indess vor eine rein geometrische Behandlung dieser Frage zu geben; die erzielte Lösung kann dann wiederum zur Ableitung der Gleichung II dienen. Zum Schluss werde ich noch auf die Lösung von Hesse eingehen und unter anderem einen höchst einfachen Beweis des Fundamentaltheorems geben, auf dem seine Lösung basirt.

Um den achten Schnittpunkt dreier Flächen zweiten Grades zu bestimmen, wollen wir auf der Geraden 65 drei Punkte A_1, B_1, C_1 der Art suchen, dass die Ebenen $A_1 23$, $B_1 31$, $C_1 12$ sich im Punkte 8 schneiden. Nun führen wir die folgenden Bezeichnungen für die Schnittpunkte der Ebenen mit der Geraden 56 ein:

$$\begin{array}{lll} 741 \times 56 = A, & 742 \times 56 = B, & 743 \times 56 = C, \\ 723 \times 56 = A_2, & 713 \times 56 = B_2, & 712 \times 56 = C_2, \\ 423 \times 56 = A_3, & 413 \times 56 = B_3, & 412 \times 56 = C_3, \\ 823 \times 56 = A_1, & 813 \times 56 = B_1, & 812 \times 56 = C_1; \end{array}$$

endlich seien $P'P''$ die Schnittpunkte der Geraden 56 mit der Raumcurve dritter Ordnung c durch die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 7, 8. Auf der Geraden 56 befinden sich drei verschiedene Involutionen. *Erstens* die Involution J_1 mit den Punktepaaren 5, 6; AA_1; BB_1; CC_1; $P'P''$, die von Flächen zweiten Grades durch die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 7, 8 ausgeschnitten wird. *Zweitens* die Involution J_2 mit den Punktepaaren AA_2; BB_2; CC_2; $P'P''$, die von einem Kegelbüschel mit den gemeinsamen Kanten 71, 72, 73, 74 ausgeschnitten wird. *Drittens* die Involution J_3 mit den Punktepaaren AA_3; BB_3; CC_3; $P'P''$, die von einem Kegelbüschel mit den gemeinsamen Kanten 41, 42, 43, 47 ausgeschnitten wird. Die drei Involutionen J_1, J_2, J_3 besitzen ein

gemeinsames Punktepaar $P'P''$, bilden also einen Büschel. J_2 und J_3 sind bekannt, von J_1 kennt man ein Punktepaar und soll zu A, B und C die entsprechenden Punkte finden.

Hierzu kann man in doppelter Weise gelangen. Es möge dem Punkt 5 in J_2 der Punkt 5″ und diesem in J_3 der Punkt 5′ entsprechen, ferner möge dem Punkt 6 in J_3 der Punkt 6″ und diesem in J_2 der Punkt 6′ entsprechen. Dann ist die Reihe der Punkte: P', P'', A, B, C, 5″, 6″ vermöge J_2 projectiv zur Reihe: P'', P', A_2, B_2, C_2, 5, 6′ und vermöge J_3 projectiv zur Reihe: P'', P', A_3, B_3, C_3, 5′, 6. Demnach ist auch das Doppelverhältniss $(P', P'', 5, 6') = (P', P'', 5', 6) = (P'', P', 6, 5')$, d. h. P', P''; 5, 6 und 5′, 6′ sind drei Punktepaare einer Involution, nämlich von J_1. Man kann somit mit Hülfe der projectiven Zuordnung der Reihen A_2, B_2, C_2, 5, 6′ und A_3, B_3, C_3, 5′ 6, von der man drei Paare entsprechender Punkte kennt, die Punkte 5′ und 6′ zeichnen. Alsdann construire man in der Involution J_1 mit Hülfe der Punktepaare 5, 6 und 5′, 6′ zu den Punkten A, B, C die entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1.

Aus den Involutionen J_1, J_2, J_3 folgt aber auch die Gleichheit der Doppelverhältnisse: $(P', P'', A, B) = (P'', P', A_1, B_1) = (P'', P', A_2, B_2) = (P'', P', A_3, B_3) = (P'', P', B, A)$. Deshalb ist auch: $(B, A_1, A_2, A_3) = (A, B_1, B_2, B_3)$. Endlich folgt aus J_1 die Relation: $(5, 6, A, B_1) = (6, 5, A_1, B) = (5, 6, B, A_1)$. A_1 und B_1 erscheinen also sowohl als entsprechende Punkte in den projectiven Reihen B, 5, 6 .. und A, 5, 6 .., als auch in den Reihen B, A_2, A_3 .. und A, B_2, B_3 .., sie lassen sich somit in bekannter Weise construiren. Der Punkt C_1 ergiebt sich als entsprechender Punkt zu C in der Involution J_1 mit den bekannten Punktepaaren A, A_1; B, B_1 und 5, 6.

Ich wende mich nun dem von Hesse gefundenen Theorem zu, das er schon im XX. Bande des Journ. f. r. u. a. Math. abgeleitet und im XXVI. Bande auch rein geometrisch bewiesen hat. In der von Herrn Caspari im IC. Bande publicirten Arbeit aus dem Nachlasse von Hesse lautet dieses Theorem (S. 125):

Wenn man von den acht Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ordnung irgend sechs Punkte als die Ecken eines räumlichen Sechsecks U betrachtet, hierauf von dem siebenten Schnittpunkt der drei Oberflächen aus drei Gerade zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks U paarweise schneiden, und die sechs Schnittpunkte in der Reihenfolge der Seiten des Sechsecks U

als die Ecken eines dem Sechseck U einbeschriebenen Sechsecks V_* nimmt; wenn man ebenso von dem achten Schnittpunkt der drei Oberflächen aus drei Gerade zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks U paarweise schneiden, und die sechs Schnittpunkte in derselben Reihenfolge als die Ecken eines zweiten, dem Sechseck U einbeschriebenen Sechsecks V^* nimmt; so liegen die beiden einbeschriebenen Sechsecke V_* und V^* auf einem und demselben Hyperboloide H.

Wir bezeichnen mit Hesse die Ecken des Sechsecks U mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und mit 7 und 8 die letzten beiden Punkte; ferner die Ecken der Sechsecke V_* und V^* mit $V_1, V_2 \dots V_6$, resp. $V^1, V^2 \dots V^6$; und zwar seien:

$$\begin{aligned} V_1 &= 12 \times 745, & V^1 &= 12 \times 845, \\ V_2 &= 23 \times 756, & V^2 &= 23 \times 856, \\ V_3 &= 34 \times 761, & V^3 &= 34 \times 861, \\ V_4 &= 45 \times 712, & V^4 &= 45 \times 812, \\ V_5 &= 56 \times 723, & V^5 &= 56 \times 823, \\ V_6 &= 61 \times 734, & V^6 &= 61 \times 834. \end{aligned}$$

Dann gehören $V_1 V_2$, $V_3 V_4$, $V_5 V_6$, $V^2 V^3$, $V^4 V^5$, $V^6 V^1$ dem Hyperboloide H als Erzeugende der einen Schaar, dagegen $V^1 V^2$, $V^3 V^4$, $V^5 V^6$, $V_2 V_3$, $V_4 V_5$, $V_6 V_1$ als Erzeugende der andern Schaar an. Denn jede Gerade der ersten Schaar schneidet jede Gerade der zweiten Schaar. Offenbar wird z. B. $V_1 V_2$ von $V_2 V_3$, $V_6 V_1$, $V_4 V_5$ und $V^1 V^2$ geschnitten, da $V_1 V_2$ und $V^1 V^2$ in der nämlichen Ebene 1 2 3 liegen und $V_1 V_4$ und $V_2 V_5$ sich in 7 schneiden. Es erübrigt also nur noch zu zeigen, dass $V_1 V_2$ von $V^3 V^4$ und $V^5 V^6$ getroffen wird.

Zu diesem Zweck bemerken wir, dass es ein Hyperboloid durch die acht Punkte $1, 2, \dots, 8$ giebt, welches die Geraden 81 und 75 ganz enthält. Es wird durch zwei projective Ebenenbüschel mit den Axen 81 und 75 erzeugt, und jeder der vier Punkte 2, 3, 4, 6 liegt in zwei entsprechenden Ebenen dieser Büschel. Die Ebenen 812, 813, 814, 816 sind projectiv zu den Ebenen 752, 753, 754, 756; die ersteren schneiden wir mit der Geraden 34 und die letzteren mit der Geraden 23 und erhalten so die projectiven Punktreihen: $X, 3, 4, V^3$ und $2, 3, Y, V_2$, wo $X = 34 \times 812$ und $Y = 23 \times 754$ ist. Diese Reihen sind perspectiv, da sie den Punkt 3 entsprechend gemein haben, somit

schneiden sich $X2$, $4Y$ und V^3V_2 in einem Punkte, etwa Z. Nun liegt die Gerade $X2$ in der Ebene 812 und die Gerade $Y4$ in der Ebene 754; ihr Schnittpunkt Z liegt also auf der Schnittlinie der Ebenen 812 und 754, d. h. auf der Geraden V_1V^4. Wenn sich aber die Geraden V^3V_2 und V_1V^4 in einem Punkte Z schneiden, so schneiden sich auch die Geraden V_1V_2 und V^3V^4. Hiermit ist also der Satz von Hesse bewiesen.

Das gleiche Resultat lässt sich auch auf analytischem Wege gewinnen. Man gehe von der Identität:

$$1\,|2345| + 2\,|3451| + 3\,|4512| + 4\,|5123| + 5\,|1234| = 0$$

aus, in der wieder wie früher $|2345|$ etc. die bezüglichen Determinanten und die vor diesen stehenden Zahlen entweder die x-Coordinaten der fünf Punkte, oder ihre y-, z- oder w-Coordinaten bedeuten. Spalten wir diese Identität in:

$$\text{(V)} \qquad 1\,|2345| + 2\,|3451| + 3\,|4512|\,\varkappa$$
$$\text{und} \qquad 5\,|4321| + 4\,|3215| + 3\,|2154|\,\lambda,$$

wobei $\varkappa + \lambda = 1$ ist, so stellen beide Ausdrücke die Coordinaten des nämlichen Punktes S dar, der offenbar auf der Schnittlinie der beiden Ebenen 1 2 3 und 3 4 5 liegt. Nun existiren für die acht Schnittpunkte dreier Flächen zweiten Grades Relationen von der Form:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{|5734|\cdot|5726|}{|5724|\cdot|5736|} = \frac{|1834|\cdot|1826|}{|1824|\cdot|1836|}.$$

Denn die linke Seite dieser Relation stellt das Doppelverhältniss der vier Ebenen 753, 752, 754, 756 dar und ihre rechte Seite das der vier Ebenen 813, 812, 814, 816; beide Doppelverhältnisse sind aber gleich, wie auch schon vorher hervorgehoben wurde. Setzen wir jetzt in den ersten der beiden Ausdrücke (V) für $\varkappa$ die linke Seite von (VI) ein, und ebenso in den zweiten für $1 - \lambda = \varkappa$ die rechte Seite von (VI), also für λ das Doppelverhältniss $|1832|\cdot|1846|:|1842|\cdot|1836|$, so erhalten wir die Coordinaten des Punktes S in der doppelten Darstellung:

$$\text{(VII)} \quad \begin{matrix} 1\,|2345| + 2\,|3451| + 3\,|4512|\cdot|5734|\cdot|5726|:|5724|\cdot|5736|, \\ 5\,|4321| + 4\,|3215| + 3\,|2154|\cdot|1832|\cdot|1846|:|1842|\cdot|1836|. \end{matrix}$$

In dem ersten Ausdruck fehlen die Coordinaten des Punktes 8, in dem zweiten die des Punktes 7; beide Ausdrücke gehen durch gleichzeitige Vertauschung der Punkte 1 und 5, der Punkte 2 und 4,

sowie der Punkte 7 und 8 in einander über. Die Coordinaten des Punktes S stehen also in der gleichen geometrischen Beziehung zu den sieben Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 wie zu den sieben Punkten 5, 4, 3, 2, 1, 6, 8. Welches ist nun diese geometrische Beziehung?

Die Coordinaten von S kann man auch schreiben:

$$1\,|2345|\cdot|5724|\cdot|5736| + 2\,|3451|\cdot|5724|\cdot|5736| + 3\,|4512|\cdot|5734|\cdot|5726|,$$

oder mit Benutzung der Identität:

$$|3451|\cdot|5724| = |3452|\cdot|5714| + |3457|\cdot|5124|,$$

$$\text{(VII}'\text{)} \qquad |2345|\cdot|5736|\,\{1\,|5724| - 2\,|5714|\} + |4512|\cdot|5734|\,\{3\,|5726| - 2\,|5736|\}.$$

Es sind aber:

$$\{1\,|5724| - 2\,|5714|\}$$

die Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden 12 mit der Ebene 574, d. h. des Punktes V_1; ganz ebenso sind

$$\{3\,|5726| - 2\,|5736|\}$$

die Coordinaten von V_2. Aus (VII′) folgt also, dass die Verbindungslinie $V_1 V_2$ durch S geht. In der gleichen Weise folgert man aus dem zweiten Ausdruck (VII), dass die Verbindungslinie $V^4 V^3$ durch S geht, was wiederum das Theorem von Hesse beweist.

Zur Ausführung der Construction des achten Schnittpunktes von drei Flächen 2. Grades dienen folgende Bemerkungen. Die drei Ebenen 123, 345, 561 bilden ein Dreikant, dessen Kanten k_1 durch 1, k_3 durch 3 und k_5 durch 5 wir bestimmen. Die sechs Geraden $V_1 V_2$, $V^3 V^4$, $V_5 V_6$, $V^1 V^2$, $V_3 V_4$, $V^5 V^6$ bilden die aufeinander folgenden Seiten eines Sechsecks, dessen erste und vierte Ecke auf k_3, dessen zweite und fünfte Ecke auf k_5 und dessen dritte und sechste Ecke auf k_1 liegt. Sucht man also zunächst die Punkte $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6$, so kann man auch die erste, dritte und fünfte Seite jenes Sechsecks zeichnen und erhält seine zweite, vierte und sechste Seite als Verbindungslinien der auf den Geraden k_1, k_3 und k_5 liegenden Ecken. Der Punkt 8 erscheint alsdann als der gemeinsame Punkt der Geraden $V^1 V^4$, $V^2 V^5$ und $V^3 V^6$.

Will man die Construction möglichst in einer Ebene, etwa der Ebene 123, ausführen, so kann man in folgender Weise ver-

fahren (Fig. 2). Man schneide die Strahlen 74, 75 und 76 mit der Ebene 123 resp. in 4′, 5′ und 6′ und die Ebene 456 mit der Ebene 123 in a. Dann ist $12 \times 4'5' = V_1 = V_4'$,

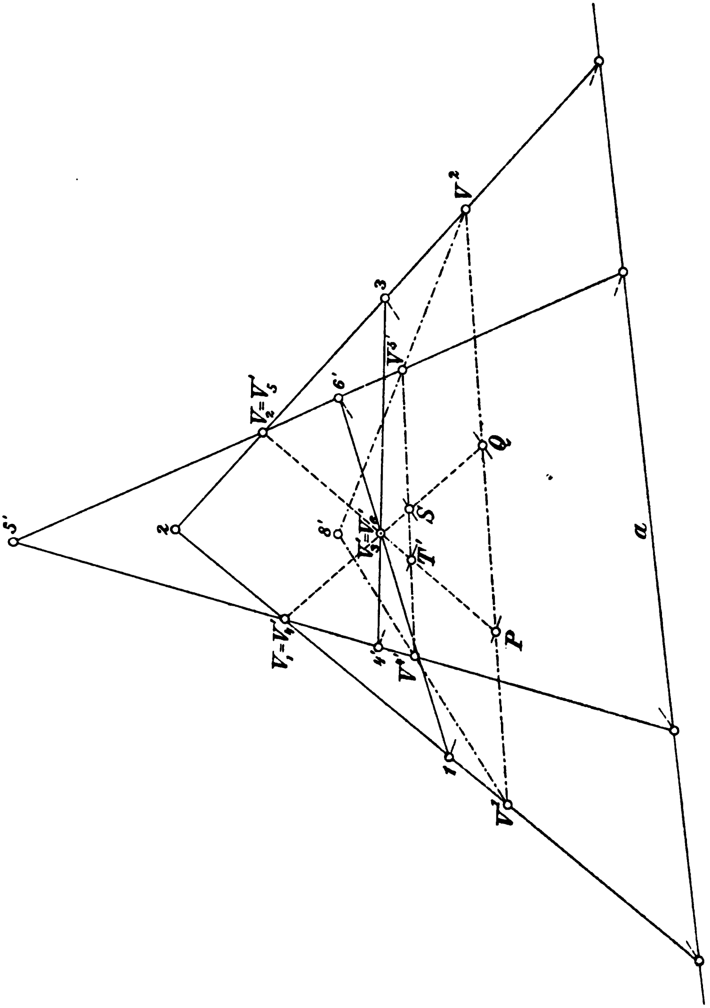


Fig. 2.

ferner $23 \times 5'6' = V_2 = V_5'$, endlich $34' \times 6'1 = V_3' = V_6'$; dabei sind V_3', V_4', V_5', V_6' die Projectionen von V_3, V_4, V_5, V_6 aus dem Punkte 7 auf die Ebene 123. Um die Punkte V^1 auf 12 und V^2 auf 23 zu finden, bedenke man, dass die Gerade

$V^1 V^2$ durch die Schnittpunkte Q und P der Geraden $V_3 V_4$ und $V_5 V_6$ mit der Ebene 123 geht. Es liegt aber Q auf $V_3' V_4'$ und auf der Schnittlinie der Ebenen 345 und 123, d. h. auf der Verbindungslinie des Punktes 3 mit dem Schnittpunkt von $4'5'$ mit a. Ebenso liegt P auf $V_6' V_5'$ und der Verbindungslinie des Punktes 1 mit dem Schnittpunkt von $5'6'$ mit a. In der gleichen Weise werden $V^{4\prime}$ auf $4'5'$ und $V^{5\prime}$ auf $5'6'$ durch eine Gerade $S'T'$ ausgeschnitten, wo die Accente wieder die Projectionen der bezüglichen Punkte aus dem Punkte 7 auf die Ebene 123 bedeuten. Es sind aber S und T die Schnittpunkte von $V_1 V_6$ und $V_2 V_3$ mit der Ebene 456, also liegt S' auf $V_1 V_6'$ und der Verbindungslinie von $6'$ mit $a \times 12$ und ebenso T' auf $V_2 V_3'$ und der Verbindungslinie von $4'$ mit $a \times 23$. Die Geraden $V^1 V^{4\prime}$ und $V^2 V^{5\prime}$ schneiden sich in $8'$, oder die Geraden $V^1 V^4$ und $V^2 V^5$ schneiden sich im gesuchten Punkte 8.

Druckfertig erklärt 13. I. 1902.]

NEKROLOG

VORGETRAGEN

IN DER OEFFENTLICHEN GESAMMTSITZUNG
ZUR FEIER DES TODESTAGES LEIBNIZENS

AM 14. NOVEMBER 1901

OSCAR SCHLÖMILCH von Martin Krause, o. m.

Oscar Schlömilch.

Von Martin Krause, o. M.

Am 7. Februar d. J. starb zu Dresden der weithin bekannte Mathematiker Oscar Schlömilch. Mit ihm schied ein ausgezeichneter Gelehrter aus dem Leben, der lange Jahre die Vorlesungen über höhere Mathematik an der jetzigen technischen Hochschule zu Dresden mit glänzendem Erfolge gehalten und sich um die Förderung und Hebung der genannten Anstalt die wesentlichsten Verdienste erworben hat. Da folge ich denn einer Pflicht der Pietät, wenn ich es auf Wunsch der königlichen hiesigen Gesellschaft der Wissenschaften versuche, den wissenschaftlichen Verdiensten Schlömilch's an dieser Stelle gerecht zu werden.

Am 13. April 1823[1]) zu Weimar geboren und auf dem Gymnasium seiner Vaterstadt vorgebildet, besuchte Schlömilch vom Jahre 1839 bis 1842 die Universitäten zu Jena und Berlin, sowie das polytechnische Institut zu Wien. Die Zahl der von ihm gehörten mathematischen Vorträge war eine äusserst geringe, sie beschränkte sich auf je eine Vorlesung bei Fries und Minding, sowie zwei Vorlesungen bei Dirichlet, dagegen beschäftigten ihn schon frühzeitig selbständige mathematische Studien. Einen Beweis hierfür liefert der erste Band des Grunert'schen Archivs für Mathematik und Physik, welcher im Jahre 1841

1) Die Nachrichten über das Leben von Schlömilch verdanke ich zum Theil der grossen Liebenswürdigkeit von Frau Geheime Hofrath Fränkel, daneben möge auf die folgenden Nachrufe verwiesen werden.

I. Fuhrmann: Oscar Schlömilch. Centralblatt der Bauverwaltung. 21. Jahrgang.

II. Helm: Oscar Schlömilch. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Band 46.

III. Cantor: Nachruf an Oscar Schlömilch. Bibliotheca Mat. 3. Folge, Band 2. Mit diesem Nachruf ist ein sorgfältiges Verzeichniss der Schriften von Schlömilch verbunden.

IV. Nachruf auf Schlömilch in dem Bericht über die Thätigkeit des sächsischen Realgymnasiallehrervereins 1901. In diesem Aufsatz werden die Verdienste von Schlömilch um das sächsische Realschulwesen gewürdigt.

erschien und nicht weniger als fünf Abhandlungen von ihm enthielt. Nachdem er im Jahre 1842 unter dem Decanate seines Lehrers Fries zum Doctor promovirt war, habilitirte er sich 1844 als Privatdocent der Mathematik in Jena und wurde ebendaselbst schon im Jahre 1846 zum ausserordentlichen Professor ernannt. Da seine Stellung mit einem Gehalt nicht verbunden war, sah Schlömilch sich veranlasst, im Jahre 1848 eine Lehrerstelle an der neu gegründeten Realschule zu Eisenach anzunehmen, jedoch mit Reservirung seiner Stelle in Jena und gewissermaassen nur mit Urlaub von dort. Glücklicher Weise war dieser Zustand nur ein vorübergehender. Schon im Jahre 1849 konnte er einem Rufe an die damalige technische Bildungsanstalt in Dresden Folge leisten und zwar mit der Verpflichtung, wöchentlich bis zu zwanzig Lehrstunden in der höheren Mathematik, nach Befinden auch in der descriptiven Geometrie und der Mechanik oder Physik zu übernehmen. Dieser Stelle ist er 25 Jahre lang treu geblieben, obwohl er mehrfach Rufe nach auswärtigen Hochschulen erhielt und zwar an die Universitäten Dorpat und Kiel, sowie an das Polytechnicum in Zürich, an welchem damals eine Lehrerabtheilung im Entstehen begriffen war. Im Jahre 1874 verliess er zum tiefen Bedauern seiner zahlreichen ihm in Dankbarkeit ergebenen Schüler und Verehrer seinen segensreichen Wirkungskreis, um in dem sächsischen Cultusministerium das Amt eines Referenten für das Realschulwesen zu übernehmen. In dieser Stellung nahm er an einigen Verordnungen, welche die heutige glückliche Entwickelung der Realanstalten wesentlich bedingten, hervorragenden Antheil und hat sich auch sonst um den mathematischen Unterricht und die Vertreter desselben an den genannten Anstalten durch Belehrung und Anregung in Wort und Schrift die mannigfachsten Verdienste erworben. Die lebhafte Dankbarkeit des sächsischen Realschulmänner-Vereines bethätigte sich hierfür in der Ernennung Schlömilch's zu seinem Ehrenmitgliede.

Ein hartnäckiger Lungencatarrh zwang ihn im Jahre 1885 auch aus dem Ministerium zu scheiden und in den Ruhestand zu treten.

Die letzten Lebensjahre wurden ihm durch den Tod seiner treuen Lebensgefährtin, sowie durch zunehmendes Leiden verbittert, welches trotz aller aufopfernden und hingebenden Pflege der Seinen seinem erfolg- und arbeitsreichen Leben am Beginne dieses Jahres ein schmerzliches Ende setzte.

Um die wissenschaftlichen Verdienste Schlömilch's objectiv würdigen zu können, müssen wir uns in seine Jugendzeit zurück versetzen, in welcher er die Ideen und Gesichtspunkte in sich aufnahm, die sein ganzes späteres Wirken bedingten, d. h. in den Beginn der vierziger Jahre des vorigen Jahrhunderts.

Mit der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung durch Leibniz und Newton hatte eine neue Aera für unsere Wissenschaft begonnen. Probleme, die früher als unauflöslich gegolten hatten, wurden jetzt in grösster Mannigfaltigkeit gleichsam spielend gelöst, von allen Seiten drang immer neuer, weiterer Stoff hinzu, der bewältigt werden konnte. In jenen Zeiten des achtzehnten Jahrhunderts bildete sich jenes gewaltige analytische Geschick, jene gewaltige Beherrschung des Calculs heraus, die wir noch heute in den Arbeiten der Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange u. a. bewundern. Was das achtzehnte Jahrhundert begonnen, wurde am Beginn des neunzehnten fortgesetzt, vor allem schufen Legendre und Jacobi die grosse Theorie der elliptischen Integrale und Functionen. Sehr bald zeigte sich aber zwischen den Untersuchungen der beiden Jahrhunderte ein tiefgehender Unterschied. In der Freude über den errungenen Calcul wurden die Rechenoperationen, die für endliche Grössen gelten, im Anfange ohne jede Kritik auf unendliche Processe angewandt. Mit dem wachsenden Stoffe und der wachsenden Erfahrung zeigte sich immer mehr und mehr die Unrichtigkeit dieses Verfahrens und als das achtzehnte Jahrhundert zur Neige ging, da trat die Mathematik aus dem naiven Zeitalter in das kritische. Einzelne Zeichen einer gesunderen Auffassung zeigten sich schon früh, ein wirklicher Umschwung trat aber erst mit den Arbeiten von Gauss, von Abel und vor allem von Cauchy ein. Cauchy war es, der als erster der gesammten Analysis des Unendlichen eine einigermaassen gesicherte Grundlage gab, und ihm folgte in Deutschland Dirichlet, der in einer berühmten Arbeit im 4. Bande des Crelle'schen Journals die Theorie der Fourier'schen Reihen zu einem einstweiligen glänzenden Abschluss führte. Jene Zeiten von Cauchy und Dirichlet sind die Lehrzeiten von Schlömilch. Aus den Arbeiten der Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange, Legendre, Jacobi u. a. zog er die Freude uud die Begeisterung für den Calcul, aus den Arbeiten von Cauchy und Dirichlet entnahm er die strengeren Anschauungen über die Principien der höheren

Analysis, die ihn überall in seinen Arbeiten begleiten. SCHLÖMILCH kann als einer der letzten und fruchtbarsten Vertreter jener Anschauungen aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts angesehen werden. Wie wenige war er in den Geist der Arbeiten der genannten Mathematiker eingedrungen und wusste ihnen in immer neuen Formen und Anwendungen Geltung zu verschaffen. Hierbei freilich ist er stehen geblieben.

Noch zu seinen Lebzeiten brach wieder eine neue Zeit für die Mathematik an. Die CAUCHY'schen Ideen zeigten sich für die Fundirung der Analysis des Unendlichen auf die Dauer nicht als genügend, erst die Arbeiten von RIEMANN, HANKEL, WEIERSTRASS, CANTOR und anderen brachten hier die nothwendige Vertiefung und den nothwendigen Abschluss. Daneben aber entwickelten sich unter dem Einfluss von RIEMANN und WEIERSTRASS ganz neue Anschauungen über die Functionentheorie und auch bei anderen Disciplinen zeigte sich neues Leben und neuer Inhalt. Diesen modernen Anschauungen hat SCHLÖMILCH in seinen Arbeiten nicht mehr Ausdruck gegeben. Zwar versuchte er auf seinem eigentlichsten Gebiete, der höheren Analysis, die Principienfragen weiter zu führen, als es in den CAUCHY'schen und DIRICHLET'schen Arbeiten geschehen war, es finden sich Aufsätze vor, in denen nach einer Erweiterung des Functionsbegriffes gestrebt und die Ausdehnung bekannter Prozesse auf unendliche Gebilde schärfer als bisher untersucht wurde, aber alle diese Arbeiten bedeuten doch mehr gelegentliche Versuche und Vorstösse, eine tiefere Rücksichtnahme auf die modernen Ideen hat auch hier nicht mehr statt gefunden.

Wer wollte hieraus einen Vorwurf für SCHLÖMILCH herleiten? Wir alle sind Kinder unserer Zeit, die Ideen, die in der Jugend aufgenommen werden, sind im Allgemeinen maassgebend für die spätere Entwickelung. Nur wenigen Naturen ist es vergönnt, in reiferem Alter grosse neue, ihrem ursprünglichen Denkungskreise ferner liegende Disciplinen oder ihn überschreitende Ideen in sich aufzunehmen und productiv weiterzuführen, im Allgemeinen zeigt sich hier ein gewisses Gesetz der Beharrung, welches bis zu einem Widerstand gegen das neue führen kann. So erzählt Herr JULES TANNERY in einem seiner letzten Litteraturberichte, dass die Einführung der divergenten Reihen in die Astronomie durch Herrn POINCARÉ einige Gelehrte zur Verzweiflung gebracht habe, insbesondere spricht er von einem Astronomen, der erklärte lieber

auf seine Wissenschaft verzichten, als von diesen miserablen Dingern Gebrauch machen zu wollen.[1])

Speziell bei SCHLÖMILCH kam die naturgemässe Einwirkung seiner Stellung an einer technischen Hochschule hinzu, die ihn für Theorien, die „noch keinen Eingang in die Gedankenkreise der Physiker und Ingenieure gefunden hatten“[2]), weniger empfänglich machten. Auch muss erwogen werden, dass er schon im Jahre 1874 sein Lehramt verliess, um eine Stellung einzunehmen, die ihm zu einem tiefergehenden Verfolgen der mathematischen Litteratur die richtige Musse nicht mehr gab.

In jedem Falle ist es ein Gebot der Gerechtigkeit, seine wissenschaftlichen Leistungen nach den Anschauungen der Zeiten zu würdigen, die für ihren Werdegang maassgebend waren.

Seine litterarische Thätigkeit ist eine ungemein ausgedehnte gewesen und kann in eine productive und eine mehr reproductive unterschieden werden. In das Gebiet des ersteren fallen einige Monographien aus der Theorie der bestimmten Integrale[3]), daneben eine überaus grosse die Zahl von mehreren hundert übersteigende Reihe von Abhandlungen, gelegentlichen Bemerkungen und Aufgaben, die von dem Anfange der vierziger Jahre an in schneller Folge in einer Anzahl von Zeitschriften erschienen sind. Wir können hierbei zwei Perioden in seinem Leben ziemlich deutlich von einander unterscheiden, die erste, die etwa bis zum Jahre 1874 reicht und die eigentlichen wissenschaftlichen Arbeiten in sich schliesst, sowie eine zweite, die in die Zeit seiner Thätigkeit als Verwaltungsbeamter und in den Ruhestand fällt und wesentlich von pädagogischen Gesichtspunkten getragen ist. Aus dieser zweiten Periode stammt eine Anzahl kleinerer Aufsätze und eine schier „unerschöpfligen Fülle von Aufgaben aller Art, die hauptsächlich dem Bedürfniss des sich weiter bildenden Lehrers an

---

1) Bulletin des sciences mathématiques. Tome 25, page 61.

2) Vorwort zur vierten Auflage des zweiten Bandes des Compendiums der höheren Analysis.

3) Die Monographien von Schlömilch sind die folgenden:

I. Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale. Jena 1843.
II. Analytische Studien. Leipzig 1848.
III. Die allgemeine Umkehrung gegebener Functionen. Halle 1849.
IV. Mathematische Abhandlungen. Dessau 1850.
V. Der Attractionscalcul. Halle 1851.
VI. Die Reihen-Entwicklungen der Differential- und Integralrechnung. Dresden 1851.

höheren Schulen entsprechen und die meist dem Inhalt nach neu, immer aber in Form und Auffassung schöpferisch und eigenartig waren."[1]) Zu ihnen gesellen sich die wissenschaftlichen Arbeiten der ersten Periode. Es würde nun weit über den Rahmen dieses Vortrages herausgehen, wollte ich dieselben hier alle in ausführlicher Weise besprechen — ich muss mich vielmehr darauf beschränken, gewisse Categorien derselben herauszugreifen, die sich für unsere Wissenschaft von besonderer Bedeutung gezeigt haben und der Analysis des Unendlichen angehören.[2])

Seit der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts spielte in der Differentialrechnung die TAYLOR'sche Entwicklung einer Function, sowie daran anschliessend die Entwickelung einer Function in eine TAYLOR'sche Reihe eine hervorragende Rolle. Bei der ersten Theorie handelt es sich vor allem um die Bestimmung des Restgliedes, bei der letzteren um die Angabe der hinreichenden und nothwendigen Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer vorgelegten Function. Beiden Problemen hat SCHLÖMILCH mehrfach seine Aufmerksamkeit zugewandt und bei dem zweiten schon frühzeitig im Jahre 1850 in einer wenig bekannten und nicht ganz einwandsfreien Arbeit die imaginären Argumente mit in Betracht gezogen. Vor allem aber gelang es ihm im Jahre 1847 eine Restbestimmung zu geben, welche eine verhältniss mässig sehr allgemeine Form hat und mehrere der vor ihm gefundenen als specielle Fälle in sich enthält. Diese Restform ist bekannt unter dem Namen der SCHLÖMILCH'schen und dürfte seinen Namen dauernd mit einem der wichtigsten Sätze der höheren Analysis verbinden.

Sodann beschäftigte ihn lebhaft das Problem der höheren Differentialquotienten, vor allem für den Fall einer Function von einer Function. Er war hier in der Problemstellung nicht immer glücklich, auch waren seine Resultate nicht immer neu, wohl

---

1) Siehe den S. 509, Anm. 1) unter IV citirten Nekrolog.

2) Ausser auf die SCHLÖMILCH'schen Arbeiten selbst, möge in Bezug auf die folgenden Bemerkungen auf die Vorlesungen von SAALSCHÜTZ über die BERNOULLI'schen Zahlen verwiesen werden, sowie auf die Referate von VOSS und BRUNEL über die Differential- und Integraltheorie in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften und die Abhandlung von PRINGSHEIM über die Geschichte des TAYLOR'schen Lehrsatzes Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. 1. Band. Das Referat von BRUNEL giebt zu Bemerkungen Anlass, auf welche an anderer Stelle eingegangen werden soll.

aber gelang es ihm bei diesem etwas dürren Problem die Gefahr des Schematismus nach Möglichkeit zu vermeiden und einzelne Fälle einer eleganten Lösung zuzuführen, die auch jetzt noch von Interesse ist. Vor allem aber, und hierauf möchte ich das Hauptgewicht legen, hat er die Bedeutung und die Anwendbarkeit der gefundenen Resultate für eine Reihe weiterer Probleme nachgewiesen. So gelingt es ihm Functionen unter gewissen näher angegebenen Bedingungen nach Potenzen geschickt gewählter anderer Functionen zu entwickeln, so stellt er das allgemeine Gesetz der Facultätencoefficienten auf und verwendet seine Methoden in glücklicher Weise dazu, um aus einfachen bestimmten Integralen durch mehrfache Differentiation nach dem Parameter complicirtere zu erhalten. Als wichtigste Anwendungen dürften aber diejenigen zu bezeichnen sein, welche sich auf die Bernoulli-Euler'schen Zahlen und die Bernoulli'schen Functionen beziehen. Das Problem, die Potenzen der natürlichen Zahlen zu summiren, hatte Bernoulli zu gewissen eigenthümlichen gebrochnen positiven Zahlen geführt, die von Euler mit den Summen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen und anderen mathematischen Gebilden in Verbindung gesetzt wurden. Die Aufmerksamkeit der Analytiker wandte sich sehr bald diesen interessanten Grössen zu, zumal sich immer mehr neue und merkwürdige Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Theorien ergaben. Gewissermaassen von selbst entwickelte sich hierbei das Problem, eine independente Darstellung der in Frage stehenden Grössen zu geben. Das Streben nach Vollständigkeit drängte zu demselben, daneben bot die Schwierigkeit des Themas Anlass zur Entfaltung grosser mathematischer Erfindungskraft. Hier setzen einige Untersuchungen von Schlömilch ein, der sich auch nach anderer Richtung hin gerne mit diesen Gebilden beschäftigte. Auf Grund der Darstellung gewisser höherer Differentialquotienten gelang es ihm im Jahre 1858 in geschickter und glücklicher Weise eine independente Darstellung der in Frage stehenden Zahlen zu geben, welche die bisherigen von Laplace, Eytelwein und Scherk an Einfachkeit bedeutend übertraf und sich als werthvoll für die betreffende Theorie erwiesen hat.

Ebendasselbe Problem, die Potenzen der natürlichen Zahlen zu summiren, führte Bernoulli ferner zu einer ganzen rationalen Function, welche zuerst von Malmsten und Raabe ausführlicher untersucht und von letzterem mit dem Namen der Bernoulli'schen

bezeichnet wurde. Wir stehen hier vor einer Function, welche ähnliche Eigenschaften und eine ähnliche Structur besitzt, wie die so oft untersuchten Kugel- und andere ganze rationale Functionen, wenngleich ihr Anwendungsbereich einstweilen als ein etwas geringerer bezeignet werden muss.

Es gelang Schlömilch diese eigenartigen Gebilde im Jahre 1856 als höhere Differentialquotienten darzustellen und damit eine ebenso einfache wie natürliche Entstehungsart derselben zu geben, welche eine elegante und übersichtliche Entwickelung ihrer Eigenschaften ermöglichte.

In der Integralrechnung interessirte Schlömilch vor allem die Theorie der bestimmten Integrale. Wir stehen hier vor demjenigen Gebiete, dem seine besten und nachhaltigsten Leistungen angehören. Tief war er in den Geist der Methoden dieser Disciplin eingedrungen, die er allesammt beherrschte. In immer neuen und veränderten Formen verstand er es, neue Veränderliche zu substituiren, oder nach dem Parameter zu differenziren und integriren oder unendliche Reihen einzuführen oder sonstige Methoden anzuwenden, um unbekannte Integrale auszuwerthen, wichtige Beziehungen zwischen Integralen untereinander oder zu unendlichen Reihen herzustellen, gewisse Constanten wie die Mascheroni'sche oder die Bernoulli'schen Zahlen durch Integrale darzustellen, Oberflächen auszuwerthen oder sonstige in dieses Gebiet fallende Probleme zu lösen. Stets zeigt er sich als Meister in der Beherrschung des Calculs, dem keine Feinheit desselben entgangen war. Die von ihm behandelten Integrale und Integralrelationen waren nicht immer neu, vielfach legte er nur Gewicht auf die Methode, aber auch hierin zeigte er eine glückliche Hand. Eine Anzahl seiner hierauf bezüglichen Arbeiten, wie die Aufsätze über die Entwickelung des Logarithmus der Gammafunction, die Ableitung der Legendre'schen Relation in der Theorie der elliptischen Functionen, die Complanation des dreiaxigen Ellipsoides u. a. haben mit Recht Beachtung in der Litteratur gefunden und die betreffenden Theorien wesentlich vereinfacht und gefördert. Daneben aber gelang es ihm eine ganze Reihe neuer Resultate abzuleiten. Wie gross dieselbe schon bis zum Jahre 1858 war, dürfte am besten aus den bekannten Tafeln von Bierens de Haan zu ersehen sein. Unter all den Mathematikern, die hier genannt werden, nimmt Schlömilch der Zahl der Arbeiten nach bei weitem die erste Stelle ein und auch

bei den einzelnen Citaten trifft man seinen Namen in reicher Fülle. Es ist nun unmöglich, hier alle diejenigen Integrale anzuführen, mit denen er sich beschäftigt hat, wohl aber möchte ich wenigstens die wichtigsten unter ihnen kurz andeuten, denen er immer wieder und wieder seine Aufmerksamkeit zuwandte. Zu ihnen gehört der Integrallogarithmus, den Gauss in geistvoller Weise in der Zahlentheorie verwerthete, sowie der ähnlich gebaute Integralsinus und -cosinus, zwei Integrale, die Schlömilch selbst als solche in die Analysis einführte, zu ihnen gehören die Gammafunctionen, jene wichtigen transcendenten Grössen, welche von Goldbach, Bernoulli und Euler zuerst untersucht wurden und Anlass zu der Entwickelung grosser neuer Theorien gaben, zu ihnen gehören ferner die elliptischen Transcendenten und schliesslich die Fourier'schen Reihen und Integrale, jene harmonisch gestalteten Gebilde, welche die Mathematiker der beiden letzten Jahrhunderte in lebhafte Bewegung gesetzt haben und auch heute noch der völligen Beherrschung harren.

Mit all diesen Grössen hat Schlömilch sich gern und oft beschäftigt und sich mit seinen hierauf bezüglichen Arbeiten ein Denkmal gesetzt, welches ihm einen ehrenvollen Namen in der höheren Analysis sichert.

Zu der productiven Thätigkeit gesellte sich nun eine ungemein reiche mehr reproductive. Im Jahre 1845 erschien sein Handbuch der algebraischen Analysis; ihm folgten noch in den vierziger Jahren ein Handbuch der Differential- und Integralrechnung, die Theorie der Differenzen und Summen, sowie die Grundzüge einer wissenschaftlichen Theorie des Maasses. In späteren Jahren schlossen sich hieran das Compendium der höheren Analysis, die analytische Geometrie, sowie seine Aufgabensammlung aus der Differential- und Integralrechnung.

Es gehörte für Schlömilch ein gewisser Muth dazu, seine Lehrbücher zu schreiben, da eine derartige wissenschaftliche Thätigkeit in Deutschland damals wenig Sitte war, ja wohl als etwas minderwerthiges angesehen wurde. Deutschland stand hier in einem entschiedenen Gegensatze zu Frankreich, wo es die ersten Mathematiker nicht verschmähten, ihre hervorragenden Kenntnisse und Erfahrungen durch das Abfassen ausgezeichneter Compendien in den Dienst der Allgemeinheit zu stellen. Die Folge davon war, dass auch der deutsche Markt von den französischen Werken beherrscht wurde. Es ist das grosse Ver-

dienst von Schlömilch, als einer der ersten hier Wandel geschaffen zu haben. Seine Werke sind zum grossen Theile aus der Praxis, aus dem lebendigen Vortrag entstanden und diese Berührung mit dem wirklichen Leben prägt ihnen einen eigenen Reiz auf. Sie zeichnen sich durch eine natürliche, behagliche und doch elegante Sprache aus. Die Principienfragen werden in einer einfachen, an den gesunden Menschenverstand appellirenden, nicht immer einwandfreien, aber immer ansprechenden Weise behandelt, daneben kommen die Anwendungen in ausreichender Weise zur Geltung. Die Aufgaben in den Sammlungen sind geschickt gewählt, bei ihrer Behandlung wird der Schematismus und der leere Formelkram nach Möglichkeit vermieden. Diese Eigenschaften trugen den Erfolg in sich. Binnen kurzem gehörten seine Bücher zu den gelesensten mathematischen Werken Deutschlands, ja auch über unsere Grenzen hinaus fanden sie weitgehende Beachtung, immer neue und neue sorgfältig redigirte, zum Theil völlig umgearbeitete Auflagen[1]) machten sich nothwendig, die bis in die letzten Zeiten reichen und ihren Verfasser zu einem der populärsten Mathematiker in unserem Vaterlande machten. Eine Reihe von Jahren hindurch dürfte es nicht viele Studirende der Mathematik oder der Technik gegeben haben, die nicht aus dem einen oder dem anderen seiner Werke Anregung und Belehrung geschöpft hätten.

Ein ähnlich glänzendes Bild ergiebt sich aus der Betrachtung seiner Lehrthätigkeit. Einstimmig rühmen seine Schüler den mächtigen Eindruck und den grossen Erfolg seiner Vorlesungen. „Krystallklar, in reinster Durchsichtigkeit und unerschütterlicher

1) In Bezug auf die Auflagen der Schlömilch'schen Werke möge folgendes hervorgehoben werden.

Es erschien das Handbuch der Algebraischen Analysis in sechs Auflagen (1888); die Geometrie des Maasses I in sieben Auflagen (1888) (das Werk ist ins holländische und italienische übersetzt worden); die Geometrie des Maasses II in drei Auflagen (1874); das Compendium der höheren Analysis I in fünf Auflagen (1881), II in vier Auflagen (1895) (ein Theil des Werkes ist ins französische übersetzt worden); die analytische Geometrie des Raumes in sechs Auflagen (1898) (die beiden letzten Auflagen sind von Heger bearbeitet); das Uebungsbuch der höheren Analysis I in vier Auflagen (1887), II in vier Auflagen (1900) (die letzte Auflage ist von Henke bearbeitet).

Die in Klammern gesetzten Zahlen bezeichnen das Jahr, in welchem die letzte Auflage erschienen ist.

Festigkeit", so äussert sich einer derselben, Herr College Helm, „standen die Lehren der Mathematik vor dem Hörer. Ein Meister der Darstellung verstand er es wunderbar, auch die schwierigeren Gedankengänge der Analysis auf den Hörer wirken zu lassen, wie ein geistvolles Spiel und doch nachdrucksvoll wie ein Kunstwerk voll ästhetischen Ebenmaasses".

Sein Zuhörerkreis bestand vornehmlich aus Studirenden der Technik, doch fehlte es auch nicht an solchen der Mathematik.

Schlömilch war tief durchdrungen von den hohen Aufgaben und den hohen Zielen der technischen höchsten Bildungsanstalten und war als Professor und stellvertretender Director auf's eifrigste und mit Erfolg bestrebt, die Dresdener Anstalt ihres schulmässigen Charakters zu entkleiden und den Universitäten in ihrer gesammten Organisation immer mehr und mehr zu nähern. Daneben hatte er die Ueberzeugung, dass die Arbeitsgebiete und Aufgaben der beiden Arten von Anstalten nicht völlig getrennt wären, dass es vielmehr gewisse Zwischengebiete und Aufgaben gebe, die auf beiden in sorgsamer Weise zu pflegen seien, um den Anforderungen der Wissenschaft und des Lebens in gleicher Weise gerecht zu werden. Hierzu gehören die mathematisch-naturwissenschaftlichen Disciplinen, sowie die Aufgabe, Lehrer derselben heranzubilden. Unter seiner Beihülfe wurde an der Dresdener Anstalt eine Lehrerabtheilung gegründet, deren ständiger Vorstand er bis zu seinem Abgange von der Hochschule im Jahre 1874 geblieben ist. Diese Abtheilung sollte ein Bindeglied zwischen den Universitäten und den technischen Anstalten abgeben, sie war für solche Studirende geplant, die neben der Durchbildung in den reinen Wissenschaften auch eine tiefere Kenntniss der angewandten Theile derselben erstrebten. Der Erfolg war ein erfreulicher. Noch jetzt denkt eine Reihe von Gelehrten gerne der mannigfachen Anregungen und Belehrungen, die sie auf der Dresdener Hochschule im Allgemeinen, und in den Schlömilch'schen Vorlesungen im Besonderen erfahren haben. Zu ihnen gehören Männer, die in Verfolg der Anschauungen ihres Lehrers ihre beste Kraft daran gesetzt haben, Theorie und Praxis in nahe Wechselbeziehungen zu einander zu bringen und heute wichtige Lehrstühle an deutschen Hochschulen oder andere bedeutende Stellen inne haben.

Denselben weiten Blick, denselben vermittelnden Sinn zeigte er bei der Herausgabe der Zeitschrift für Mathematik und Physik,

die er mit Witzschel im Jahre 1856 gründete[1]) und bis zum Jahre 1897 in erfolgreicher und thatkräftiger Weise leitete. Ein bestimmtes Programm wurde im Anfang nicht aufgestellt, indessen brachte es seine Stellung an der *Dresdener* Hochschule, sowie seine Beziehungen zu den technischen Kreisen von selbst mit sich, dass neben der reinen Mathematik die angewandten Theile derselben, wie das numerische Rechnen, die darstellende Geometrie mit Schattenconstructionen und Perspective, die graphische Statik u. s. f. in besonderer Weise gepflegt wurden. Unter solchen Umständen nahm sein Journal sehr bald eine eigenartige Stellung ein, es bildete eine Art von Brücke, die von den weiten Sphären der reinen Wissenschaft überführte zu den Disciplinen, die in der Praxis mit ihren unendlich vielgestaltigen Bedürfnissen ihre tiefliegenden Wurzeln besitzen und aus ihr immer neue Anregungen erfahren. In dieser Eigenschaft hat es besonders segensreich gewirkt, und war „in der Hauptsache nur schon bestehendes auszubauen und zu vertiefen"[2]), um ihm diejenige ausgesprochene mathematisch-technische Richtung zu geben, die es augenblicklich unter neuer Leitung eingeschlagen hat.

Ich bin am Ende meiner Betrachtungen angelangt. Fasse ich noch einmal kurz alles zusammen, so kann gesagt werden: Mit Schlömilch schied ein feinsinniger Mathematiker, der es verstanden, ihren Grundzügen nach bestehende Theorien mit neuem, reichen, vertieften Inhalt zu versehen, ein hervorragender Pädagoge und Schriftsteller, der das Verständniss, die Liebe und die Begeisterung für die mathematische Wissenschaften durch Wort und Schrift in die weitesten Kreise getragen hat, endlich ein weitblickender Mann, der seiner Zeit vorauseilend die reinen mit den angewandten Wissenschaften in ein harmonisches Verhältniss, in eine harmonische Wechselbeziehung zu setzen bestrebt war. Sein Andenken wird in Ehren bleiben!

---

1) Nach Witzschel's Tode trat im Jahre 1859 Herr M. Cantor in die Schriftleitung ein und erweiterte im 20. Bande die bis dahin Litteraturzeitung genannte zweite Abtheilung zur „Historisch- litterarischen Abtheilung." E. Kahl war 1860 bis 1892 mehr dem Namen als der Sache nach an der Leitung betheiligt.

2) Siehe das Vorwort von Mehmke zum 42. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Druckfertig erklärt 12. XII. 1901.]

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts Dr. *Kurt Damm Paul v. Seydewitz*.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Ernst Windisch* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1902.

Geheimer Hofrath *Hermann Lipsius* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1902.

Professor *Hugo Berger* in Leipzig.

—— *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.

Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *Friedrich Karl Brugmann* in Leipzig.

Professor *Karl Bücher* in Leipzig.

—— *Berthold Delbrück* in Jena.

—— *August Fischer* in Leipzig.

Bibliotheksdirector Professor *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *Heinrich Gelzer* in Jena.

—— —— *Georg Götz* in Jena.

Geheimer Kirchenrath *Albert Hauck* in Leipzig.

Geheimer Rath *Max Heinze* in Leipzig.

Professor *Rudolf Hirzel* in Jena.

Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.

Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *August Leskien* in Leipzig.

Professor *Friedrich Marx* in Leipzig.
—— *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Ludwig Mitteis* in Leipzig.
Professor *Eugen Mogk* in Leipzig.
Oberschulrath *Hermann Peter* in Meissen.
Geheimer Hofrath *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *Sophus Ruge* in Dresden.
—— *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrath *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Gerhard Seeliger* in Leipzig.
—— *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Georg Steindorff* in Leipzig.
—— *Franz Studniczka* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Georg Treu* in Dresden.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig
—— —— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.
Professor *Heinrich Zimmern* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erich Marcks* in Heidelberg.
Professor *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Regierungsrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1901.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1901.
Professor *Ernst Abbe* in Jena.
—— *Ernst Beckmann* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *Wilhelm Biedermann* in Jena.
Geheimer Medicinalrath *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimrath *Ludwig Boltzmann* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Professor *Victor Carus* in Leipzig.
—— *Karl Chun* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
Professor *Friedrich Engel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Paul Flechsig* in Leipzig.
—— —— *Ewald Hering* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Otto Hölder* in Leipzig.
—— *Ludwig Knorr* in Jena.
Geheimer Hofrath *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Medicinalrath *Felix Marchand* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Ernst von Meyer* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Wirklicher Staatsrath Professor *Arthur v. Oettingen* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
—— —— *Karl Rohn* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Professor *Ernst Stahl* in Jena.
Geheimer Hofrath *Johannes Thomae* in Jena.
—— —— *August Töpler* in Dresden.
Professor *Otto Wiener* in Leipzig.
Geheimer Rath *Clemens Winkler* in Freiberg.
—— —— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
—— —— *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
—— —— *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Alfred Fischer* in Leipzig.
—— *Otto Fischer* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Rath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Felix Klein* in Göttingen.
—— —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebers, Georg, 1898.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleckeisen, Alfred, 1899.
Fleischer, Heinr. Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Krehl, Ludolf, 1901.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Miaskowski, August von, 1899.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Overbeck, Johannes Adolf, 1895.
Pertsch, Wilhelm, 1899.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ribbeck, Otto, 1898.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.

Rohde, Erwin, 1898.
Roscher, Wilhelm, 1894.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Socin, Albert, 1899.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Drobisch, Moritz Wilhelm, 1896.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Geinitz, Hans Bruno, 1900.
Hankel, Wilhelm Gottlieb, 1899.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Krüger, Adalbert, 1896.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Leuckart, Rudolph, 1898.
Lie, Sophus, 1899.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Ludwig, Carl, 1895.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schenk, August, 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schlömilch, Oscar, 1901.
Schmitt, Rudolf Wilhelm, 1898.
Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Stohmann, Friedrich, 1897.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Wiedemann, Gustav, 1899.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. December 1901.

Verzeichniss

der bei der Königl Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1901 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Auf d. J. 1899. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1900, No. 39—53. 1901, No. 1—38. Berlin d. J.

Acta Borussica. Denkmäler der Preuss. Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Herausg. von der Königl. Akademie der Wissenschaften. Die Behördenorganisation und allgemeine Staatsverwaltung Preussens im 18. Jahrh. Bd. 3. 6. Getreidehandelspolitik. Bd. 2. Berlin 1901.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 26. Berlin 1900.

Kekulé von Stradonitz, Ueber ein Bildniss des Perikles in den Kgl. Museen. 61. Programm zum Winckelmannsfeste der Archäologischen Gesellschaft. Berlin 1900.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 33, No. 19. 20. Jahrg. 34, No. 1—17. Berlin 1900. 01.

Die Fortschritte der Physik im J. 1899 und 1900. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 55. 56. Abth. 1—3. Braunschweig 1900. 01.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Jahrg. 2, No. 17. Jahrg. 3, No. 1—10. Berlin 1900. 01.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 14 (Jahrg. 1900), No. 19—26. Bd. 15 (Jahrg. 1901), No. 1—18. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 25. (1900/01), No. 1—13. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt N. F. H. 34. Geologisch-morphologische Uebersicht der Provinz Pommern. Berlin 1901.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt und Bergakademie. Bd. 20 (1899). Berlin 1900.

Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1900. S.-A. Berlin 1900.

Verzeichniss der Veröffentlichungen aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. 1887—1900. Berlin 1901.

Die Hundertjahrfeier der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. 18.—21. October 1899. Berlin 1900.

Wolff, F., Berlin, die Stadt der Hohenzollern. Rede, gehalten in der Halle der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1901.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 106. 107. Bonn 1901.

Arbeiten aus dem botanischen Institut des Kgl. Lyceum Hosianum in Braunsberg. I. Braunsberg 1901.

Achtundsiebzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1900. Nebst Ergänzungsheft. Breslau 1901.

Abhandlungen des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts [in Chemnitz]. H. 5. 6. Leipzig 1901.

Decaden-Monatsberichte des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts. Jahrg. 2. 3. 1900. 01.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts. Jahrg. 16 (1898). I. II. Chemnitz 1900. 01.

Das Klima des Königreichs Sachsen. Hft. 6. Chemnitz 1901.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 10. H. 2. 3. Danzig 1901.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. *Arth. Geissler*. Jahrg. 46 (1900), No. 3. 4. Jahrg. 47 (1901), No. 1. 2. Dresden 1900. 01.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1899/1900. Dresden 1900.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1900, Jul.—Dec. 1901, Jan.—Jun. Dresden d. J.

Verzeichniss der Vorlesungen und Uebungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1901 u. Wintersem. 1901/02. — Bericht über die Kgl. Sächs. Techn. Hochschule für 1900/01.

Mittheilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. No. 13—15 (Jahrg. 57. 58). Dürkheim a. d. H. 1900. 01.

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 15. Düsseldorf 1900.

Mittheilungen des Vereins für die Geschichte und Alterthumskunde von Erfurt. H. 22. Erfurt 1901.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. H. 32 (1900). Erlangen d. J.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. f. das Rechnungsjahr 1899/1900. — Das Klima von Frankfurt a. M. Bearb. von *Jul. Ziegler* u. *Walt. König*. Nachtrag. Frankfurt 1901.

Helios. Abhandlungen u. monatliche Mittheilungen aus d. Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins

des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausg. von *H. Roedel*. Jahrg. 18. Berlin 1901.

Societatum litterae. Verzeichniss der in d. Publikationen der Akademien und Vereine aller Länder erscheinenden Einzelarbeiten auf d. Gebiete d. Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftl. Vereins für den Reg.-Bezirk Frankfurt herausg. von *M. Klittke*. Jahrg. 14 (1900), No. 1—12.

Jahrbuch f. d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1901. Freiberg d. J.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1901/02. Freiberg 1901.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Grossherzogl. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Giessen. Sommer 1901, Winter 1901/02; Personalbestand W. 1900/01, S. 1901. — 85 Dissertationen aus den Jahren 1900 u. 1901.

Baldensperger, W., Das spätere Judenthum als Vorstufe des Christenthums (Progr.). — *Haupt*, *Herm.*, Renatus Karl Freiherr v. Senckenberg. 1751—1800 (Festschrift). — *Netto*, *Eugen*, Ueber die Grundlagen und Anwendungen der Mathematik (Festrede). — *Schmidt*, *Arthur*, Das Bürgerliche Gesetzbuch als Erzieher unseres Volkes (desgl.). Giessen 1900. 01.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausg. von *R. Jecht*. Bd. 76. Görlitz 1900.

Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Bd. 2. H. 1. Görlitz 1900.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Classe. Bd. 3. No. 2. Bd. 4. No. 4. 5. Bd. 5. No. 1. 2. Math.-phys. Classe. Bd. 1. No. 4. Göttingen 1901.

Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. I. Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens. II. Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. III. Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe. Berlin 1901.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Cl. 1900, No. 3. 4. 1901, No. 1. Philol.-hist. Cl. 1900, No. 3. 1901, No. 1. 2. Geschäftliche Mittheilungen. 1901, H. 1. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1900/01. Grimma 1901.

Leopoldina. Amtl. Org. d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 36, No. 12. H. 37, No. 1—11. Halle 1900. 01.

Nova Acta Academiae Caes. Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum. Tom. 75—79. Halis 1899—1901. — *Grulich, Osc.*, Geschichte der Bibliothek und Naturaliensammlung der Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. — *Graesel, Arnim*, Repertorium zu den Acta und Nova Acta der Akademie. Bd. 1. 2. Halle 1894—99.

Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 22. 23. Halle 1901.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturwiss. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. 73. H. 3—6. Bd. 74. H. 1. 2. Halle 1900. 01.

Mittheilungen der Hamburger Sternwarte. No. 7. Hamburg 1901.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 4. H. 1. Hamburg 1901.

Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover. 48. 49. 1897/98—1898/99. Hannover 1900.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 10, Heft 2. Heidelberg 1900.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg N. F. Bd. 6, H. 4. 5. Heidelberg 1900. 01.

Programm der Grossherzogl. Badnischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe für das Studienjahr 1901/02. — *Lehmann, O.*, Physik und Politik (Festrede). — 1 Habilitationsschrift und 1 Dissertation a. d. J. 1900. 01.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1900/01. — Verzeichniss der Vorlesungen. Winter 1900/01, Sommer 1901. — *Milchhoefer*, Ueber die Trogödien des Aeschylus auf der Bühne (Rede zum Winckelmanns-Tage). — *Pappenheim, Max,* Die Revisionsbedürftigkeit des deutschen Seehandelsrechts (Rectoratsrede). — *Rudenberg, C.,* Gedächtnissrede zur Feier des 200-jährigen Jubiläums des Königreichs Preussen. — 135 Dissertationen a. d. Jahren 1900 u. 1901.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Herausg. von der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirthschaft, Domänen u. s. w. N. F. Bd. 4. Abtheilung Helgoland. H. 2. Bd. 5. Abtheilung Kiel. H. 2. Kiel und Leipzig 1901.

Publication der Kgl. Sternwarte in Kiel. XI. Kiel 1901.

Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. 12, Hft. 1. Kiel 1901.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 41 (1900). Königsberg 1900.

Jahresbericht des Nikolaigymnasiums in Leipzig. Bericht über das Schuljahr 1900/01.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Meissen von Juli 1900 bis Juli 1901. Meissen 1901.

Abhandlungen der math.-phys. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 21, Abth. 2. München 1900.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abth. 1. München 1901.

Abhandlungen der philos.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 21, Abth. 3. München 1901.

Almanach der k. bayer. Akad. d. Wiss. f. d. J. 1901.

Auswahl aus dem Verlagskatalog der k. bayer. Akad. d. Wiss. München 1900.

Lipps, Theod., Psychologie, Wissenschaft und Leben (Festrede). — *Riggauer, Hans,* Ueber die Entwickelung der Numismatik und der numismatischen Sammlungen im 19. Jahrh. (desgl.). — *Zittel, Karl*

A. v., Ziele und Aufgaben der Akademien im 20. Jahrhundert (desgl.). München 1900. 01.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1900, H. 3. 1901, H. 1—3. — Inhaltsverzeichniss zu Jahrg. 1886—1899. München 1900. 01.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1900, H. 4. 5. 1901, H. 1—4. — Inhaltsverzeichniss zu Jahrg. 1886—1899. München 1900. 01.

42. Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München 1901.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 16. H. 1. 2. München 1900. 01.

Säcular-Feier der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Festschrift. Nürnberg 1901.

Anzeiger und Mittheilungen des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1900. Hft. 1—4. Nürnberg d. J.

Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen. 14. Jahresschrift aus d. J. 1900. Plauen 1901.

Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jahrg. 1, No. 8—12. Jahrg. 2, No. 1—3. Posen 1900. 01.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 15, H. 1. 2. Posen 1900.

Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts (in Potsdam). N. Folge No. 5. 6. Berlin 1901.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. — Photographische Himmelskarte. Bd. 2. Potsdam 1901.

Veröffentlichung der Kgl. Württemberg. Kommission für die internationale Erdmessung. H. 4. — Relative Schwermessungen. I. S. A. Stuttgart 1901.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Herausg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 10 (1901). Stuttgart d. J.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 51, 2. Dresden 1901.

Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar. — Verzeichniss der von Reinhold Köhler hinterlassenen Büchersammlung. Weimar 1901.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 54. Wiesbaden 1901.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1900, No. 2—4. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 34, No. 2—6. Würzburg 1901.

Oesterreich-Ungarn.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti (Agram). Svez. 15. 1900. U Zagrebu 1901.

Monumenta historico-juridica Slavorum meridionalium. Vol. 8. Zagrebiae 1901.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Knj. 143—145. U Zagrebu 1900. 1901.

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znanosti i umjetnosti. Svez. 20. U Zagrebu 1900.

Vjestnik hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. N. S. Svesk. 5. U Zagrebu 1901.

Vjestnik kr. hrvatsko-slavonsko-dalmatinskog zemaljskog arkiva. God. 3, Svez. 1—4. U Zagrebu 1901.

Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Svez. 5, II. 6, I. U Zagrebu 1900. 01.

Znanstvena Djela za obću naobrazbu na svijet izdaje Jugoslav. Akad. Knj. 2. U Zagrebu 1900.

Landwirthschaftliche Statistik der Länder der Ungarischen Krone. Bd. 5. Im Auftrag des k. Ungar. Ackerbauministeriums verfasst u. hrsg. durch das k. Ungar. Statistische Central-Amt. Budapest 1900.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1901. Budapest d. J.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 17, szám. 6—8. Budapest 1900.

Archaeologiai Értesitö. A Magyar. tudom. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 20, szám. 3—5. Köt. 21, szám. 1. 2. Budapest 1900. 01.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 18, füz. 3—5. Köt. 19, füz. 1. 2. Budapest 1900. 01.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar. tudom. Akad. Köt. 27, sz. 5. Budapest 1901.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 30, füz. 3. 4. Köt. 31, füz. 1. 2. Budapest 1900. 01.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1900. Budapest 1901.

Daday, Jenő, A magyarországi Kakylósrákok magánraja. Ostracoda Hungariae. Budapest 1900.

Karácsonyi, János, A magyar nemzetségek a XIV. század Közepéig. Köt. 1. ebd. 1900.

Munkácsi, Bernát, Árja és kaukázi elemek a finn-magyar nyelvekben. Köt. 1. ebd. 1901.

Verzeichniss d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1901. Winter-Sem. 1901/02. — Die feierliche Inauguration des Rectors für 1900/01.

Die k. k. Franz-Josefs-Universität in Czernowitz im ersten Vierteljahrhunderte ihres Bestandes. Festschrift herausg. vom Akadem. Senate. — Xenia Czernovicensia. — *Norst, Ant.*, Alma mater Francisco-Josephina. Festschrift. Czernowitz 1900.

Beiträge zur Kunde steiermärk. Geschichtsquellen. Herausg. von dem historischen Vereine für Steiermark. Bd. 30. Graz 1899.

Mittheilungen des historischen Vereines für Steiermark. Hft. 47. Graz 1899.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1900, No. 9. 10. 1901, math.-naturw. Cl. No. 1—7. Philol. Cl. No. 1—8. Krakau d. J.

Biblioteca pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). No. 38—40. W Krakowie 1900. 01.

Collectanea ex Archivio Collegii iuridici. Tom. 7. Krakow 1900.

Katalog literatury naukowej Polskiej. Tom. 1. Rok 1901. zesz. 1. 3. Krakow 1901.

Materialy i prace komisyi językowej Akad. umiejętn. w Krakowie. Tom. 1. zes. 1. W Krakowie 1901.

Rozprawy Akademii umiejętności. — Wydział filologiczny. T. 31. 32. (Ser. II. T. 16. 17). — Wydział historyczno-filozoficzny. T. 39. 40. (Ser. II. T. 14. 15). W Krakowie 1900. 01.

Sprawozdania komisyi fizyograficznéj. T. 35. Kraków 1901. — Atlas geologiczny Galicyi. zes. 8. 12. W Krakowie 1900.

Karłowicz, Jan, Słownik gwar Polskich. T. 2. Kraków 1901.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 13. 14. Abth. 1. 2. Laibach 1900. 01.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 10. V. Ljubljani 1900.

Chronik der ukrainischen (ruthenischen) Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. 1900. No. 4—7. Lemberg d. J.

Lud, Organ towarzystwa ludoznawczego we Lwowie. T. 7, zesz. 1—4. Folklor. Podręcznik dla zajmujących się Ludoznawstwem. We Lwówie 1901.

Almanach České Akademie Císaře Františka Josefa. Ročn. 11. 1901. V Praze d. J.

Historický Archiv. Čisl. 17—19. V Praze 1900. 01.

Rozpravy České Akad. Cís. Františka Josefa. Tříd. I. Ročn. 8. Tříd. II. Ročn. 9. Tříd. III Ročn. 8, Čisl. 1. — V Praze 1900.

Věstnik České Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 9, Čisl. 1—9. V Praze 1900.

Sbírka Pramenův ku poznání literárního života. Skup 3, Čisl. 3. V Praze 1900.

Národni Písně Moravské nově nasbírané sebral *Frant. Bartoš.* Seš. 1. V Praze 1899.

Gruss, Gust., Základové theoretické astronomie. ebd. 1900.

Winter, Zikm., Život a učení na partikulárnich školach v Čechách v XV a XVI stoleti. ebd. 1901.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1900. Prag 1901.

Spisův poctěných jubilejní cenou Král České Společnosti nauk v Praze čisl. 11. Praze 1900.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1900. — Philos.-histor.-philolog. Classe Jahrg. 1900. Prag 1901.

Matiegka, Heinr., Bericht über die Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's. — *Studnička, F. J.,* Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe. Prag 1901.

Bericht über die am 4. März 1901 von der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen aus Anlass ihres 10-jährigen Bestandes abgehaltene Festsitzung. Prag 1901.

Mittheilungen der Gesellschaft z. Förd. deutscher Wissensch., Kunst u. Literatur in Böhmen. No. 13. 14. Prag 1901.

Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens auf dem Gebiete der Wissenschaft, Kunst u. Literatur in den Jahren 1895—97. Herausg. von der Gesellschaft z. Förd. deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. Prag 1900.

Beiträge zur Kenntniss der Wirbelthierfauna der Böhmischen Braunkohlenformation. Im Auftrage der Gesellschaft z. Förd. deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. herausg. I. II. Prag 1901.

Krug, Anton, Die lineare Differentialgleichung 3. Ordnung. Bd. 1. Herausg. mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutsch. Wiss. etc. in Böhmen. Aussig 1901.

Lang, S., Ueber die Stickstoffausscheidung nach Leberexstirpation. Ausgeführt mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutsch. Wiss. etc. in Böhmen. Strassburg 1901.

Scherer, J. E., Die Rechtsverhältnisse der Juden in den deutsch-österreichischen Ländern. Mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutsch. Wiss. etc. in Böhmen. Leipzig 1901.

Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1900. Prag 1901.

Astronomische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag in den J. 1892—99, nebst Zeichnungen und Studien der Mondoberfläche. Prag 1901.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1900. Jahrg. 61. Prag 1901.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1901/02.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 39, No. 1—4. Prag 1900/01.

Abhandlungen des deutschen naturw.-medicinischen Vereins für Böhmen „Lotos“. Bd. 1. H. 2. 3. Prag 1898.

Sitzungsberichte des deutschen naturw.-medicin. Vereins für Böhmen „Lotos“. N. F. Bd. 16—18. 20. Prag 1896—1900.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Pressburg. N. F. H. 12. Pressburg 1901.

Wissenschaftliche Mittheilungen aus Bosnien und der Hercegovina. Hrsg. vom Bosnisch-Hercegovinischen Landesmuseum. Bd. 7. Sarajevo 1900.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 23 (1900), No. 12. Anno 24 (1901), No. 1—11. Spalato d. J.

Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 49. 50. (1899. 1900). Wien d. J.

Anzeiger der Kais. Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Cl. 1901. No. 18. 19. 21—26.

Archiv für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 87. 88. 89, I. Wien 1899. 1900.

Denkschriften der Kais. Akademie d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 66, Th. 3. Bd. 68. Philol.-hist. Cl. Bd. 46. Wien 1900.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen, hrsg. v. d. histor. Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 48, 2. 49, 2 Register zu Bd. 1—50. Bd. 51. Wien 1896—1901.

Südarabische Expedition. Veröffentlicht von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Bd. 1. *Reinisch, Leo,* Die Somalisprache. II. Wien 1902. — Schriften der Balkancommission. Linguistische Abtheilung I. *Rešetar, Milan,* Die serbokroatische Betonung südwestlicher Mundarten. ebd. 1900.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Cl. Bd. 108 (1899). 109 (1900) I, No. 1—7. IIª, No. 1—9. IIᵇ, No. 1—10. III, No. 1—7. — Philos.-histor. Cl. Bd. 141. 142 (1899. 1900). Register zu Bd. 131—140 (XIV). Wien 1900.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1900. Bd. 43. Wien d. J.

Abhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 1. Hft. 1. 2 Wien 1901.

Botanik und Zoologie in Oesterreich in den Jahren 1850 bis 1900. Festschrift, hrsg. v. d. k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien anlässlich der Feier ihres 50-jährigen Bestandes. Wien 1901.

Ornithologische Section der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. — Die Schwalbe. Berichte des Comités für ornithologische Beobachtungsstationen in Oesterreich. N. F. II (1900—01).

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 50, H. 10. Bd. 51, H. 1—8. Wien 1900. 01.

Publicationen für die internationale Erdmessung. Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. u. k. militärgeographischen Institutes in Wien. Bd. 17. Astronomische Arbeiten. Wien 1901.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 15, No. 3/4. Wien 1900.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 16, H. 1. Wien 1900.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 50 (1900), H. 2—4. Jahrg. 51 (1901), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1900, No. 13—18. Jahrg. 1901, No. 1—14. Wien d. J.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 12. Wien 1900.

Belgien.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin. V. Sér. des Annales. 10. Part. II, 1. 2. Anvers 1901.

Paedologisch Jaarboek. Onder redactie van *M. C. Schuyten.* Jaarg. 2. Antwerpen 1901.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1900. 01 (Année 66. 67). Bruxelles d. J.

Académie Roy. de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. 1899. 1900. Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts. 1899. 1900. Bruxelles d. J.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 58—60. Bruxelles 1899. 1900.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 57. 58. Bruxelles 1898—1900.

Analecta Bollandiana. T. 20. Bruxelles 1901.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 44. Bruxelles 1900.

Mémoires de la Société entomologique de Belgique. 8. Bruxelles 1901.

Annales de la Société R. malacologique de Belgique. T. 35. Bruxelles 1900.

Bulletins des séances de la Société R. malacologique de Belgique. T. 34. Bg. 9—11. Bruxelles 1900.

Bulletin mensuel du magnétisme terrestre de l'Observatoire R. de Belgique. 1900. Mars — Nov.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 18, Fasc. 1. Louvain 1901.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1900, No. 6. 1901, No. 1—5. Kjøbenhavn d. J.

Fortegnelse over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forlagsskrifter. Jan. 1901. Kjøbenhavn.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturv. og math. Afd. 6. Række. T. 9, No. 7. T. 10, No. 2. T. 11, No. 1. Kjøbenhavn 1901.

Regesta diplomatica historiae Danicae, cura Soc. Reg. scient. Danicae. Ser. II, T. 2, V. Kjøbenhavn 1901.

Tychonis Brahe Dani die XXIV octobris a. D. 1601 defuncti operum primitias de nova stella summi civis memor denuo edidit Reg. Societas Scientiarum Danica. Hauniae 1901.

England.

Aberdeen University Studies. No. 1—3. Aberdeen 1900.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 10, P. 7. Vol. 11, P. 1—13. Cambridge 1901.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 6, No. 2. 3. Vol. 7. Dublin 1901.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 31, P. 8—11. Dublin 1900.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 23, No. 3. 4. Edinburgh 1900/01.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 39, P. 5. Edinburgh 1900.

Proceedings of the R. Physical Society of Edinburgh. Vol. 14, P. 3. (Session 129, 1899/1900.) Edinburgh 1901.

Transactions of the Edinburgh Geological Society. Vol. 8, P. 1. Edinburgh 1901.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 15 (1900/01). Liverpool 1901.

Otia Merseiana, the Publication of the Arts Faculty of University College Liverpool. Vol. 2. Liverpool 1900/01.

Proceedings of the R. Institution of Gr. Britain. Vol. 16, P. 1. London 1900.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 67—69, No. 439—453. London 1901. — Yearbook of the R. Society 1901. — Reports to the Malaria Committee. Ser. 3—5. London 1900. 01.

Transactions of the R. Society of London. Vol. 193. B. 195. A. 196. A. London 1900. 01.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 32—34. No. 731—766. London 1900. 01.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1901, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 45, P. 1. 3. 4. Vol. 46, P. 1. Manchester 1900. 01.

Report of the Manchester Museum Owens College for 1900/01. — Museum Handbooks: *Hobson, B.,* Correlation tables of Britisch Strata. London and Manchester 1901.

Frankreich.

Mémoires des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. V. Sér. T. 5, Cah. 2 et Append. Bordeaux 1900.

Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1899/1900. Paris et Bordeaux d. J.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathematiques de Cherbourg. T. 31 (Sér. IV, T. 1). Cherbourg 1898—1900.

Travaux et mémoires de l'Université de Lille. Mém. 22—28. Lille 1899—1901. — Livre de l'étudiant. 1900/01. 1901/02. Lille 1900. 01.

Annales de l'Université de Lyon. N. S. Sciences. Médecine. Fasc. 4. Paris et Lyon 1901.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 11, No. 1—9. Marseille 1901.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. Ser. II. T. 3, No. 1. 2. T. 4, No. 1. Mémoires de la section de médecine. Ser. II. T. 1, No. 4. Mémoires de la section des sciences. Ser. II. T. 2, No. 6. 7. Montpellier 1899. 1900.

Bulletin des séances de la société des sciences de Nancy. Année 10, No. 1—3. Ser. III. T. 1, Fasc. 4—6. T. 2, Fasc. 1. 2. Paris et Nancy 1900. 01.

Oeuvres complètes d'*Augustin Cauchy*, publ. sous la direction scientifique de l'Académie des sciences. Ser. I. T. 12. Paris 1900.

Pingré, A. L., Annales célestes du XVIIe siècle. Oeuvre publ. sous les auspices de l'Académie des sciences par *M. G. Bigourdan.* Paris 1901.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1899. 1900. Paris d. J.

Journal de l'École polytechnique. Ser. II. Cah. 5. 6. Paris 1900. 01.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1900, No. 5—7. 1901, No. 1—3. Paris d. J.

Annales de l'École normale supérieure. III. Sér. T. 17, No. 10—12. T. 18, No. 1—12. Paris 1900. 01.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 28, No. 4. T. 29, No. 1—3. Paris 1900. 01.

Bulletin de la Société scientifique et médicale de l'ouest. Tom. 1—9. T. 10, No. 1. 2. Rennes 1892—1901.

Bulletin de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. T. 1 (1897/98), No. 1. 3. Toulouse 1898.

[Histoire et] Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. T. 1—6 (1827—1841). Ser. III—IX (1844—1897). — Table alphabétique des matières cont. dans les Tomes des Sér. I—VI.

Annales du midi. Revue de la France méridionale, fondée sous les auspices de l'Université de Toulouse. Ann. 12. 13 (No. 47—49). Toulouse 1900. 01. — Livret de l'Université de Toulouse. 1900.

Bibliothèque méridionale, publ. sous les auspices de la Faculté des lettres de Toulouse. Ser. I, T. 6. Ser. II, T. 6. Toulouse 1901.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Ser. II. T. 2, Fasc. 2—4. T. 3, Fasc. 1. Paris et Toulouse 1900. 01.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 23 (1899), No. 12. Année 24 (1900), No. 1—6. Athen, Paris d. J.

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts. Athenische Abtheilung. Bd. 25, H. 4. Bd. 26, H. 1. Athen 1901.

Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθηναῖς Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας. T. 13. No. 1—4. Athen 1901.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigd te Amsterdam voor 1900. Amsterdam 1901.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 3, No. 1—4. Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 7, No. 6. 7. Sect. II. Deel 7, No. 4—6. Amsterdam 1900. 01.

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 9. Amsterdam 1901.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1902. — *Damsté, Pet. Helb.*, Patria rura. Carmen in certamine poetico Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Acced. 4 poemata laudata. Amstelodami 1901.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 9, P. 1. 2. Amsterdam 1901.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 5. St. 1. 2. Amsterdam 1901.

Wiskundige opgaven med oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel 8. St. 1. 2. Amsterdam 1901.

Programma van jaarlijksche prijsvragen voor het j. 1901, ter beantwoording uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Ser. II. T. 4, Livr. 2—5. T. 5. 6. Harlem 1900. 01.

Oeuvres complètes de *Christiaan Huygens*. Publ. par la Société hollandaise des sciences. T. 9. La Haye 1899.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 7, P. 3. 4. Harlem 1901.

Musée botanique de Leide, par *W. P. R. Suringar*. Vol. 1—3. Liv. 1—8. Leide 1871—97.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden 1896—1900. Leiden 1901.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. III. Deel 2, Stuk 2. Nijmegen 1901. — Prodromus Florae Batavae. Vol. 1, P. 1. Edit. altera. St. 1. Nijmegen 1901.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 25. Juni 1900. Utrecht d. J.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 26. Jun. 1900. Utrecht d. J.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 21. 's Gravenhage 1900.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. Ser. No. 52. 61. Amsterdam 1899. 1901.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. 5. Reeks. II, Afl. 2. III, Afl. 1. Utrecht 1901.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 360. [N. S.] No. 1—12. Firenze 1900. 01.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. N. S. Vol. 10 (1899/1900). Memorie della classe d. lettere. Acireale 1900.

Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Vol. 7. Bologna 1897.

Rendiconto delle sessioni della R. Accademia dell' Istituto di Bologna. N. S. Vol. 2. 3. Bologna 1898. 99.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di scienze fisiche e naturali. No. 31—38. 40. Firenze 1900. 01.

Le opere di *Galileo Galilei*. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. Maestà il Re d' Italia. Vol. 10. 11. Firenze 1900. 01.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e science morali e polit. Vol. 21 (Ser. III, Vol. 12), Fasc. 3. — Classe di science matematiche e naturali. Vol. 19 (Ser. III, Vol. 10), Fasc. 1—3. Milano 1900.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 33. Milano 1900.

Opere matematiche di *Francesco Brioschi*. Pubbl. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 1. Milano 1901.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Ser. III. Vol. 2. Modena 1900.

Società Reale di Napoli. Atti della R. Accad. d. archeol., lettere e belle arti. Vol. 20, Suppl. Vol. 21. — Rendiconto delle tornate e dei lavori della R. Accad. di archeologia, lettere e belle arti. N. S. Anno 14 (1900) Magg.—Dic. Anno 15 (1901) Genn.—Apr. — Atti della R. Accad. di scienze morali e politiche. Vol. 32. 33. Napoli 1901. Rendiconto della R. Accademia di scienze morali e politiche. Anno 39. 1900.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 16. Padova 1900. — Indice generale dei lavori letti alla R. Accademia di scienze, lettere ed orti in Padova e pubbl. ne' suoi atti dall' anno 1779 a 1899/1900. Padova 1901.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 14 (1900), Fasc. 6. T. 15 (1901), Fasc. 1—6. Palermo d. J.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Filosofia e filologia. Vol. 14. Pisa 1900.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 12. Genn.—Magg. 1901.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. I (Memorie), Vol. 7, P. 1. P. II (Notizie degli scavi), Vol. 8, Ott.—Diz. 1900. Vol. 9, Genn.—Ott. 1901. — Rendiconti. Vol. 9 (1900), Fasc. 7—12. Vol. 10 (1901), Fasc. 1—8. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Ser. V. Memorie. Vol. 1—3 (1895—1901). Rendiconti. Vol. 9 (1900), II. Sem., Fasc. 12. Vol. 10 (1901) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—11. — Rendiconto dell' adunanza solenne del 2. Giugn. 1901. Roma d. J.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 15, H. 4. Bd. 16, H. 1—3. Roma 1900. 01.

Studi Sassaresi, pubbl. per cura di alcuni professori della Università di Sassari Anno 1. Sez. 1, Fasc. 2. Sez. 2, Fasc. 1. Sassari 1901.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 12, No. 4—10. Siena 1900.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 36, Disp. 1—15. Torino 1901.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 50. Torino 1901.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1900 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1901.

5me Congrès international de physiologistes. Turin 1901.

Luxemburg.

Publications de l'Institut Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles et mathématiques. T. 26. Luxembourg 1901.

Recueil des mémoires et des travaux publ. par la Société botanique du Grand-Duché de Luxembourg. No. 14 (1897—99). Luxembourg 1899.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 9, No. 5. 6. Anul 10, No. 1—4. Bucuresci 1900. 01.

Russland.

Acta societatis scientiarum Fennicae. T. 26. 27. Helsingfors 1900.

Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan. Ser. II. T. 10, No. 2—4. Kasan 1901.

Učenyja Zapiski Imp. Kasanskago Universiteta. 1901, T. 68, No. 1—11. Priloz. za 1901 [1—4]. — 5 Dissertationen a. d. J. 1900/01.

Universitetskija Izvěstija. God 40, No. 10—12. God 41, No. 1—8. Kiev 1900. 01.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1900. No. 1—4. 1901, No. 1—2. Moscou d. J.

Observations faites à l'Observatoire météorologique de l'Université Impér. de Moscou. Sept. 1899—Feb. 1901.

Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Ser. V. T. 12, No. 2—5. T. 13, No. 1—3. St. Pétersbourg 1900.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. Ser. VIII. Cl. phys.-mathém. Vol. 10, No. 7—9. St. Pétersbourg 1900.

Procès-verbaux des séances de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg depuis sa fondation jusqu'à 1803. T. 1—3 (1725 bis 1785). S. Pétersbourg 1897—1900.

Annales de l'Observatoire physique central, publ. par. *M. Rykatchew*. Année 1899, P. 1. 2. St. Pétersbourg 1900.

Comité géologique, St. Pétersbourg. Bulletins. T. 19, No. 1—10. T. 20, No. 1—6. Mémoires. Vol. 13, No. 3. Vol. 18, No. 1. 2. St. Pétersbourg 1900. 01.

Acta Horti Petropolitani T. 16. T. 18, Fasc. 1—3. S. Peterburg 1900. 01.

Bulletin du Jardin Impérial botanique de St. Pétersbourg. Livr. 1. St. Pétersburg 1901.

Scripta botanica Horti Universit. Imper. Petropolitani. Fasc. 15. Petropoli 1899/1900.

Trudy Petersburgskago Obščestva Estestvoispytatelej. Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 29, 3—5. T. 30, 2—5. T. 31, 2. 4. Protokoly zasědanij. Vol. 29, Liv. 1, No. 2—8. Vol. 30, Liv. 1, No. 1—8. Vol. 31, Liv. 1, No. 1—8. S. Pétersbourg 1898—1900.

Publications de l'Observatoire central Nicolas. Ser. II. Vol. 6. 8. St. Pétersbourg 1900. 01.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S. Peterburgsk. Universiteta na 1900/01.

Otčet v sostojanii i dějatelnosti Imp. S. Petersburgsk. Universiteta za 1900 god. S. Peterburg 1901.

Zapiski istoriko-philolegičeskago Fakulteta Imp. S. Peterburgskago Universiteta. Čast 56—59. S. Peterburg 1900. 01.

Visantijskij vremennik (*Βυζαντινά Χρονικά*), izdavaemyi pri imp. Akad. nauk. T. 7, Vyp. 4. S. Peterburg 1900.

Svod Zakonov Rossijskoj imperii. T. 4. 7. 9. 10, 1. 12, 1. S. Peterburg 1899. 1900.

Arbeiten des Naturforscher-Vereins zu Riga. N. F. H. 10. Riga 1901.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 44. Riga 1901.

Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums im J. 1897. Tiflis 1900.

Monatsberichte der Horizontalpendel-Station im Physikalischen Observatorium zu Tiflis. No. 1—5. Tiflis 1900.

Prace matematyczno-fizyczne. T. 12. Warszawa 1901.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. 14. Stockholm 1901.

Bergens Museum. Aarbog for 1900. H. 1. 2. — Aarsberetning for 1900. Bergen 1901.

Sars, G. O. An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 4, P. 1. 2. Bergen 1901.

Meeresfauna von Bergen. Redig. v. *A. Appellöf.* H. 1. Bergen 1901.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1900. Christiania d. J.

Skrifter udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1900, No. 5—7. Hist.-filos. Kl. 1900, No. 6. Kristiania d. J.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 21, H. 4. Bd. 22, H. 1—4. Kristiania 1899. 1900.

Nyt magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 37. 38. Christiania 1900.

Det Kon. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1898/99. Kristiania 1900.

Kung. Vetenskaps- och Vitterhets Samhälles Handlingar. 4. Följd. 3. Göteborg 1901.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler.* 24, 3. 4. Stockholm 1901.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 26. Stockholm 1901.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 33. 34. Stockholm 1900. 01.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årg. 57. (1900.) Stockholm 1901.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 37. 38 (Ser. II, Bd. 23. 24). Årg. 1895. 96. Stockholm 1900. 01.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps Akademiens efter år 1854 aflidna Ledamöter. Bd. 4. H. 1. 2. Stockholm 1899. 1901.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens Månadsblad. 25 (1896). Stockholm 1901.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens Handlingar. Deel 33 (N. F. Deel 13), 1. Stockholm 1901.

Berättelser om Folkskolorna i Riket för åren 1893—98. Afg. af till förordnade Folkskoleinspektörer. I. II. Stockholm 1900.

Medelanden från Nordiska Museet. 1897. 98. Utg. af *Art. Hazelius.* Stockholm 1898. 1900.

Samfundet för Nordiska Museets främjande 1893/94—98. Utg. af *Art. Hazelius.* Stockholm 1895—99.

Guide au Musée du Nord à Stockholm. Publ. par *Art. Hazelius.* Trad. par *J. H. Kramer.* Stockholm 1889.

König, Wilh., Ein eigenartiges Museum für Natur- und Völkerkunde. Stockholm 1898.

Skansen, Karta öfver Nordiska Museets anläggningar.

Passarge, L., Das Nordische Museum und Skansen. Stockholm 1897.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Årg. 21 (1900). Stockholm d. J.

Tromsø Museums Aarshefter. 23. — Aarsberetning for 1899. 1900. Tromsø 1900. 01.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. 19. Upsaliae 1901.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 5, P. 1, No. 9. Upsala 1901.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 32 (1900). Upsal 1900/01.

Urkunder rörande Stockholms historia. I. Stockholms stads privilegiebref 1423—1700. H. 2. Stockholm. Upsala 1901.

Schweiz.

Jahresverzeichniss der Schweizerischen Universitätsschriften 1900/01. Basel 1901.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft zu Neuenburg (1899) und Thusis (1900). 82. u. 83. Jahresversammlung. — Compte rendu de la Société helvétique des scienses naturelles. Session 82 et 83. Genève 1899. 1900.

Taschenbuch der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau für 1900. Aargau d. J.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 5, H. 4. Basel 1901.

25. Jahresbericht der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Vereinsj. 1899/1900. Basel 1900.

Baseler Zeitschrift für Geschichte und Alterthumskunde. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Bd 1, H. 1. Basel 1901.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 13. 14. Basel 1901. — Namenverzeichniss und Sachregister der Bde. 6—12 (1875—1900) der Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Von *G. W. A. Kahlbaum.* Basel 1901.

Rütimeyer, L., Gesammelte kleine Schriften allgemeinen Inhalts aus dem Gebiete der Naturwissenschaft. Bd. 1. 2. Basel 1898.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus den J. 1898—1900 (No. 1451—1499). Bern 1899—1901.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrgang 44 (1900/01). Chur 1901.

Index lectionum in univers. Friburgensi per mens. aest. 1901 et per mens. hiem. 1901/02. — Behörden, Lehrer u. Studenten. Wintersem. 1900/01. Sommersem. 1901. — Bericht über das Studienjahr 1899/1900. Freiburg.

Collectanea Friburgensia. N. S. Fasc. 1. 2. Friburgi 1901.

Schnürer, Gust., Ueber Periodisierung der Weltgeschichte. Rede. Freiburg 1900.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 33, P. 2. Genève 1899—1901.

Anzeiger für Schweizerische Geschichte und Alterthumskunde. Jahrgang 2—14 (1856—68). Zürich d. J.

Rahn, J., Zur Statistik schweizerischer Kunstdenkmäler. Bog. 11. 12.

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Hrsg. vom Schweizerischen Landesmuseum. N. F. Bd. 2, No. 3. 4. Bd. 3, No. 1—3. Zürich 1900. 01.

Schweizerisches Landesmuseum. 9. Jahresbericht (1900).

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Hrsg. auf Veranstaltung der allgemeinen geschichtsforschenden Gesellschaft der Schweiz. Bd. 26. Zürich 1901.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 45, H. 3. 4. Jahrg. 46, H. 1. 2. — Neujahrsblatt a. d. J. 1901 (103. Stück). Zürich d. J.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 59—62. Godišnjak. 13 (1899). — Spomenik. 35. 38. Beograd 1900. 01.

Geologija Srbsje. Svesk. 2. Beograd 1900.

Svečani pomen posvetnom dobrotvoru pokojnom Dimitriju Stamenkoviću. Beograd 1901.

Stojanović, Ljub., Katalog rukopisa i starich štampanich knjiga. Beograd 1901.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1899. Vol. 1. 2. Washington 1900.

Transactions and Proceedings of the American Philological Association. Vol. 31 (1900). Boston d. J.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 21, No. 2. Vol. 22, No. 1. New Haven 1901.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 11. — Index to Vol. 1—10, pp. 1—209. Rochester 1900.

Miscellaneous scientific Papers of the Allegheny Observatory. N. Ser. No. 1—3. 1900. 01.

Maryland Geological Survey: Eocene. — Physical Atlas of Maryland: Allegany County (with Atlas). — Maryland and its natural resources, prepared by the Maryland Geological Survey. Baltimore 1900. 01.

Johns Hopkins University Circulars. No. 144—154. Baltimore 1900. 01.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 22, No. 2—4. Vol. 23, No. 1—4. Baltimore 1900. 01.

American Journal of Philology. Vol. 21, No. 1—4. 22, No. 1. Baltimore 1900. 01.

American chemical Journal. Vol. 23, No. 5. 6. Vol. 24. 25. Vol. 26, No. 1—3. Baltimore 1900. 01.

Grave, Caswell, Ophiura brevispina. Diss. Baltimore 1900.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. XVIII, 5—12. Ser. XIX, 1—9. Baltimore 1900. 01.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. 36, No. 9—29. Vol. 37, No. 1—5. Boston 1900. 01.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Vol. 5, No. 6. 7. Boston 1900. 01.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 29, No. 9—14. — Occasional Papers. IV. Boston 1900.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 36, No. 5—8. Vol. 37, No. 3. Vol. 38, No. 1—4. Vol. 39, No. 1. Cambridge, Mass. 1900. 01.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 25, 1. Cambridge, Mass. 1901.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. for 1899/1900. 1900/01. Cambridge, Mass. 1901.

The John Crerar Library. 6. Annual Report for 1900. Chicago 1901.

Field Columbian Museum. Publications. No. 45. 51—59. Chicago 1900. 01.

Colorado College Studies. Vol. 9. Colorado Springs 1901.

The University of Missouri Studies. Vol. 1, No. 1. Columbia, Miss. 1901.

Jowa Geological Survey. Vol. 11. Des Moines 1901.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick.* Vol. 10, No. 4. Vol. 11, No. 1—3. Granville 1900. 01.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of science. Vol. 10. P. 2. Halifax 1900.

Proceedings of the Indiana Academy of sciences 1899. Indianapolis 1900.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 1, No. 4. Vol. 2, No. 1—4. Lancaster and New York 1900. 01.

The Kansas University Quarterly. Vol. 9. 10, No. 1. 2. Lawrence 1900.

Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. 12. Art. 1. 5. Lincoln 1899/1900.

13th Annual Report of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Lincoln 1900.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 10, P. 2. Vol. 12, P. 2. Vol. 13, P. 1. Madison 1900. 01.

Boletin del Instituto geologico de México. No. 14. 1900.

Memorias de la Sociedad científica „Antonio Alzate". T. 13, Cuad. 1. 2. T. 15. 16. Cuad. 1. México 1899—1901.

Lick Observatory, University of California. [Mount Hamilton.] Bulletin. No. 1—11. Sacramento 1900. 01.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 10, P. 2. New Haven 1900.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 13, P. 1—3. New York 1900. 01.

Memoirs of the New York Academy of sciences. Vol. 2, P. 2. 3. New York 1900. 01.

American Museum of Natural History. Bulletin. Vol. 11, P. 2. 3. Vol. 12. 13. — Memoirs. Vol. 1, P. 6. Vol. 4. Anthropology. III, 2. — Annual Report for 1899. 1900. New York 1900. 01.

The Museum of the Brooklyn Institute of arts and sciences. Science. Bulletin. Vol. 1, No. 1. New York 1901.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 32, No. 5. Vol. 33, No. 1—4. New York 1900. 01.

American Journal of Archaeology. N. S. Vol. 4, No. 4. Vol. 5, No. 1—4. Norwood Mass. 1900. 01.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. Ser. II. Vol. 6. Ottawa 1900.

Geological Survey of Canada. Annual Report. N. S. Vol. 11 (with maps). Ottawa 1900. — Catalogue of Canadian Birds. P. 1. Ottawa 1900.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1900, P. 3. 1901, Vol. 53, P. 1. 2. Philadelphia d. J.

Transactions of the Wagner Free Institute of science. Vol. 3, P. 5. Philadelphia 1900.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. Vol. 38, No. 163. 164. Vol. 40, No. 165. 166. Philadelphia 1900. 01.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. N. S. Vol. 20, P. 2. Philadelphia 1901.

Boletin de Estadística del Estado de Puebla. Époc. 2. No. 21. 27. Époc. 3. No. 1. 2. 5. 6. 8. Puebla 1900. 01.

Proceedings of the California Academy of sciences. Ser. III. Botany. 1, 10. 2, 1. 2. Geology. 1, 7—9. Zoology. 2, 1—7. Mathematical-Physical 1, 5—7. Occasional Papers. 7. San Francisco 1900.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 10, No. 9—11. Vol. 12, No. 1—5. St. Louis 1900. 01.

Transactions of the meetings of the Kansas Academy of science. Vol. 17 (1899/1900). Topeka 1900.

Proceedings of the Canadian Institute. N. S. Vol. 2, P. 4. Toronto 1901.

Transactions of the Canadian Institute. No. 13. (Vol. 7, P. 1.) Toronto 1900.

University of Toronto Studies. Anat. Ser. No. 1. — Geolog. Ser. No. 1. — Hist. Ser. I. Vol. 5. — Psycholog. Ser. No. 4. Toronto 1900. 01.

Illinois State Laboratory [Urbana]. Bulletin. Vol. 5, Art. 12. Urbana 1901.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 8. Mem. 4. Washington 1899.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1898/99. Vol. 2. 1900/01. Vol. 1. Washington 1900. 01.

Annual Report to the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 17 (1895/96), I. II. 18 (1896/97), I. Washington 1898/99.

U. S. Department of Agriculture. Division of Biological Survey. Bulletin. No. 14. North American Fauna. No. 16. 20. 21. — Section of foreign Markets. Bulletin. No. 18. 20. 21. 23. Washington 1900.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1253. 1258. Washington 1901.

Annuals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. Vol. 1. Washington 1900.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for 1897/98, 1898/99. — Report of the U. S. National Museum. 1896/97. P. 2. 1897/98, 1898/99. Washington 1900. 01.

Astronomical, magnetical and meteorological Observations made during the years 1891 and 1892 at the U. S. Naval Observatory. Washington 1899. 1900.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for 1899/1900. Washington 1900.

Publications of the U. S. Naval Observatory. 2. Ser. Vol. 1. Washington 1900.

U. S. Coast and Geodetic Survey. Special Publication No. 4. Washington 1900.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work from July 1, 1898, to June 30, 1899. Washington 1900.

Department of the Interior. U. S. Geological Survey. Preliminary Report on the Cope Nome Gold Region Alaska. Washington 1900.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 163—176. Washington 1900.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. 39. 40. Washington 1900.

Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 20. 1898/99, P. II—V. VII. 21. 1899/1900, P. I. VI. Washington 1900. 01.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 50, Entr. 5. 6. T. 51. 52, Entr. 1—3. Buenos Aires 1900. 01.

Anales del Museo nacional de Montevideo. Tom. 2, Fasc. 17. Tom. 3, Fasc. 18. 20. 21. Tom. 4, Fasc. 19. Montevideo 1898—1901. — *Arechavaleta, J.,* Las gramíneas Uruguayas. Montevideo 1898.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1901. (Anno 17.) Rio de Janeiro 1900.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro de 1900, Maio—Dezembro. Rio de Janeiro 1900. 01.

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 10, Livr. 3. 4. T. 11, Livr. 1. Santiago 1900. 01.

Asien.

Notulen van de algemeene en directie vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 38, Afl. 2—4. Deel 39, Afl. 1. 2. Batavia 1900. 01.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 43. 44. Batavia 1900. 01.

Nederlandsch-Indie Plakaatboek 1602—1811. Deel 17. Batavia, 's Hage 1900.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Ann. 1637. 1641—42. 1673. 's Gravenhage, Batavia 1900. 01.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 60. Ser. X, Deel 4. Batavia 1901.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 22. 1899, P. 1. Batavia 1900. — Regenwaarnemingen in Nederl. Indie. Jaarg. 21. ib. 1900.

Alcock, A., A descriptive Catalogue of the Indian Deep-Sea Crustacea Decapoda Macrura and Anomala, in the Indian Museum. Calcutta 1901. — Catalogue of the Indian Decapod Crustacea in the Collection of the Indian Museum. P. 1. Brachyura. Fasc. 1. ib. 1901.

The Kyōto Imperial University Calendar for the year 2560/61 (1900/01). Kyōto 1901.

Publications of the Earthquake Investigation Committee. No. 5. 6. Tōkyō 1901.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan, Vol. 13, 4. Vol. 15, 1—3. Tōkyō 1901.

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 5, No. 1. Tokio 1901.

Annotationes Zoologiae japonensis. Vol. 2, P. 2. 3. Vol. 3, P. 4. Vol. 4, P. 1. Tokyo 1901.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. N. S. Vol. 12, P. 2. Vol. 13. 14, P. 1. Melbourne 1900. 01.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 34 (1900). Abstract of Proceedings. Jul. 1900—Sept. 1901. Sydney d. J.

---

2. Einzelne Schriften.

Arldt, C., Elektrische Kraftübertragung und Kraftvertheilung. 3. Ausg. Berlin 1901.

Bortolotti, E., Sulla determinazione dell' ordine di infinito. Modena 1901.

Duport, H., Mémoire sur la loi de l'attraction universelle. Dijon 1901.

Fritsche, H., Die Elemente des Erdmagnetismus und ihre säcularen Aenderungen während des Zeitraums 1550 bis 1915. Publ. III. St. Petersburg 1900.

Gadot, Ado., Les unités de la force. Paris 1900.

— Un nouveau mètre. Unité physique essentielle. Les unités de la force decimales. Fasc. 1 et Resumé des fasc. 3—5. Paris s. a.

Goppelsroeder, Fried., Capillaranalyse, beruhend auf Capillaritäts- und Adsorptionserscheinungen. S.-A. Basel 1901.

Grave, Gaswell, The oyster reefs of North Carolina. S.-A. Baltimore 1901.

Hippauf, Herm., Die Rectification und Quadratur des Kreises. Breslau 1901.

Jeffrey, Edw. C., The morphology of the central cylinder in the Angiosperms. S.-A. Toronto s. a.

Kalecsinsky, Alex., Ueber die ungarischen warmen und heissen Kochsalzseen als natürliche Wärmeaccumulatoren. S.-A. Budapest 1901.

Levi, Ugo, I monumenti piu antichi del dialetto di Chioggia. Venezia 1901.

Ricerche di Fisiologia e scienze affini dedicate al Prof. Luigi Luciani nel 25. anno del suo insegnamento. Milano 1900.

Socolow, Serge, Corrélations régulières supplémentaires du système planétaire. Moscou 1901.

Vogel, H. C., Ueber die Bewegung von α Persei in der Gesichtslinie. S.-A. Berlin 1901.

— Ueber das Spectrum der Nova Persei. S.-A. ebd. 1901.

— Weitere Beobachtungen über das Spectrum der Nova Persei. S.-A. ebd. 1901.

— Der spectroskopische Doppelstern Mizar. S.-A. ebd. 1901.

Weiss, F. E., On the phloem of Lepidophloios and Lepidodendron. S.-A. Manchester 1901.

Wüllenweber, P. W., Diagramme der elektrischen und magnetischen Zustände und Bewegungen. St. Johann a. d. Saar 1901.

Die Ferdinand Wilhelm Mende-Stiftung.

Die durch nachfolgendes Codicill von dem im Jahre 1857 verstorbenen Leipziger Bürger Herrn Ferdinand Wilhelm Mende für wissenschaftliche Zwecke begründete Stiftung von M. 75000 ist im Jahre 1901 der Kön. S. Ges. d. Wissensch. als der testamentarisch verordneten Verwalterin übergeben worden.

Codicill.

I.

Was ich mittelst eines zweiten Nachtrags zu meinem Testament, welchen ich am 9. August d. J. dem Stadtgericht Leipzig übergab, den beiden Kindern meiner seeligen Schwester Julius Harck und Elisen verehel. Regierungsräthin von Hübel in gewissen Summen legatweise zugedacht habe, das soll ihnen jedenfalls zu lebenslänglichem Zinsengenuſs dienen.

II.

Wer von diesen Beiden jedoch etwa nach mir ohne Hinterlassung ehelicher Descendenz verstürbe, aus dessen Nachlaſs soll binnen Jahresfrist vom Tode an die Summe von Rth. 25,000 —, —, sage Fünf und Zwanzig Tausend Thaler —, —, zu dem weiter unten von mir eventuell bezeichneten Stiftungszweck an die eben da genannte Gesellschaft, resp. an deren Actor, von seinen Erben unweigerlich gewährt werden, indem ich dies zur ausdrücklichen Bedingung der Vermächtnisse selbst mache und dabei das feste Vertrauen zu meinen beiden Verwandten hege, daſs sie sich die sichere Erhaltung der Legaten-Fonds schon um dieser

Bedingung willen zur Liebes-Pflicht machen werden. Daher enthalte ich mich auch jeder Cautionsmaasregel zu Gunsten der eventuell bedachten Gesellschaft hier gänzlich und überlasse es ihrer völlig freien Willkühr, ob etwa und inwiefern sie sich der Sorge einer Verlustabwendung von ihren Legaten-Fonds, soweit ich darüber weiter verfügt habe, durch geeignete Mittel entheben wollen oder nicht.

III.

Zugleich lege ich aber auch meinen eigenen Erben auf:

a.

für den Fall, wenn genannte beide Geschwister Harck oder eines derselben vor mir, jedoch mit Hinterlassung ehelicher Descendenz versterben und sonach das ihnen oder ihm bestimmte Legat sich erledigen sollte, den nach Abzug des von jeder solchen erledigten Legaten-Summe abzurechnenden Stiftungsfonds an Rth. 25,000 —, —, sage Fünf und Zwanzig Tausend Thaler —, —, den hinterlassenen ehelichen Nachkommen des oder der Verstorbenen binnen zwei bis drei Jahren von meinem Tode ab als Vermächtniſs auszuzahlen, den übrigen abgerechneten Theil des ursprünglichen Legats aber an die von mir untenbenannte Gesellschaft im ebenmäſsigen Zeitraume kostenfrei zu gewähren;

b.

für den Fall endlich, daſs beide Geschwister Harck oder eines vor mir ohne Hinterlassung ehelicher Descendenz mit Tode abgingen, die dadurch erledigte Legatensumme ungekürzt mit Rth. 50,000 —, —, in gleicher Frist eben dieser Gesellschaft zu zahlen und zu überlassen.

Ich gründe nämlich hiermit eventuell eine

Stiftung

zu Förderung von Untersuchungen und Entdeckungen, welche zu einer genauern Erkenntniſs der Naturgesetze oder durch deren Anwendung zu

nützlichen Erfindungen führen, sowie auch zu Unterstützung geschichtlicher und nationalökonomischer Forschungen und Darlegungen ihrer Resultate.

1.

Hat die Naturforschung in neuerer Zeit durch Beobachtungen und Versuche, durch Messung und Berechnung, so Groſses für Auffindung der Natur-Kräfte und Gesetze geleistet, und hat diese Erweiterung unserer sicheren Erkenntniſs so erweckend und bildend auf das geistige Leben und bei ihrer weiteren Anwendung so fördernd auf das practische Leben und Wohlsein eingewirkt, so kann man die gewisse Ueberzeugung haben, für das Wohl des Menschengeschlechts zu wirken, wenn man diese Forschungen und Entdeckungen unterstützt, sowie deren Anwendung auf das practische Leben erleichtern hilft.

Dies ist zwar schon vielfach durch Begründung von Lehranstalten, wissenschaftliche Sammlungen, Preiſsaufgaben, Stipendien und gelehrten Gesellschaften geschehen, es mangelt aber gar sehr an Stiftungen, durch welche vielversprechende naturwissenschaftliche Forschungen und zu hoffende wichtige Entdeckungen mittelst Geldunterstützung zu Stande und Tage gefördert werden können, indem es auſserdem an den nöthigen Mitteln zur Ausführung fehlen würde. Andererseits kann uns geschichtliche sowohl als nationalökonomische Forschung und Darlegung, wenn sie auf das practische Leben der Völker gerichtet werden, lehren, durch welche Sitten und Thaten die Wohlfahrt der Nationen befördert oder zu Grunde gerichtet worden ist und welcher künstlichen und naturgemäſsen Staatseinrichtungen und Maaſsnehmungen es bedürfe, um in cultivirten und zugleich übervölkerten Ländern Arbeitslosigkeit und Mangel am Nöthigen von den Aermern abzuwenden.

Was die frühere Geschichte hierüber uns lehrt, das ist sorgfältig mit dem zu vergleichen, was die von verschiedenen Nationen in der neuesten Zeit gemachten, durch Statistik und Zahlenangaben genauer bestimmten Erfahrungen hierüber

schlieſsen lassen, soweit sie in nationalökonomischen oder statistischen Schriften niedergelegt und geordnet zusammengestellt sind.

Auch diese Forschungen in beiderlei Richtung erfordern viel Zeit und starke Mittel zu Herbeischaffung, Prüfung und umsichtiger Benutzung zahlreicher Quellen und Urkunden, machen sogar bisweilen Reisen unerläſslich.

Durch meine Stiftung sollen nun dergleichen gediegene Forschungen und wichtige Entdeckungen in beiderlei Beziehung, wenn sie wegen Mangels an den nöthigen Hülfsmitteln nicht wohl fortgesetzt und zur Ausführung gebracht werden können, von einer Gesellschaft einsichtsvoller Männer, welche sich, da nöthig, besonderer Sachverständiger als Beirath auf Kosten der Stiftung bedienen mögen, gründlich geprüft und wenn sie der Unterstützung als wichtig und vielversprechend wirklich werth befunden worden, mit Geld unterstützt werden.

2.

Eine solche Aushülfe soll einem Jeden zu Theil werden können, wes Standes und Vaterlandes, welcher Religion er sein möge, wenn seine Arbeiten, Pläne oder Entdeckungen beweisen, daſs er die Fähigkeit zu solchen Leistungen besitze und etwas Geistig-Neues im Werk, etwas der Menschheit Nützliches erfunden oder aufzudecken habe, oder zu practischer Anwendung zu bringen im Stande sei.

Es werden zu diesem Zwecke der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften hier und insbesondere ihrer mathematisch-physischen Classe diejenigen Fonds eventuell überwiesen, welche nach Obigem unter II bei dem erst nach meinem Ableben etwa ohne Hinterlassung ehelicher Descendenz eintretenden Tod eines oder beider Geschwister Harck aus deren Nachlassen durch ihre Erben von den übernommenen Legaten an je Fünfzig Tausend Thalern —, —, sage 50000 Rth. —, —, zurückzugewähren sind, ingleichen diejenigen Summen, welche nach Vorstehendem unter III in den Fällen, wenn die Legatare eines oder beide vor mir *ad a* mit — oder *ad*

b ohne eheliche Descendenz verstürben, von meinen eigenen Erben an die nun genannte Gesellschaft als Stiftungs-Fonds gezahlt werden sollen.

3.

Das Stiftungscapital ist unangreifbar, und zu sicherster Verwahrung dahin gehöriger Effecten und Documente sowie Gelder, ingleichen zur Verwaltung ist eine Behörde im Inlande zu vermitteln, welche sich der Mühwaltung und Garantie gegen die Gebühr unterzieht, und die Anträge der mathematisch-physischen Classe und derjenigen zuzuziehenden Mitglieder der Königlichen Gesellschaft, welche die Geschichte und resp. Staatsökonomie vertreten, ausgeführt, sie mögen nun Sicherstellung der Stiftung, Revision der Rechnungen, Anlegung der Fonds oder stiftungsmäſsige Verwendung der Zinsen oder andere Beaufsichtigung der Stiftung betreffen. — Jedoch sollen nach meinem Willen der Staat und dessen Organe keinen Einfluſs auf die Verwendung und resp. Ansammlung der Zinsen oder auf die Verwaltung ausüben, weniger noch die Fonds an sich nehmen.

4.

Die Executirung der Anträge von den betreffenden Personen wird Sache der Behörde sein. Aber der Actor der Stiftung — ein in Verwaltungen bewährter Jurist — soll die Rechte und das Interesse derselben nach auſsen, gleichwie auch bei Anlegung und Einziehung der Fonds deren Sicherheit gewahren, bei Prüfung der Stiftungsrechnungen und Negocirung von Geldern zugezogen werden und alle etwaigen Inconvenienzen und Nachtheile abzuwenden bemüht, aber auch ermächtiget sein, diejenigen verantwortlich zu machen, welche der Stiftung oder ihren Fonds durch offenbare Verschuldung Eintrag thaten.

Die Wahl des Actors steht der Gesellschaft zu.

5.

Die Zinsen des Stiftungscapitals sollen zu zwei Drittheilen zur Unterstützung von Untersuchungen und wichtigen

Entdeckungen im Gebiete der allgemeinen Naturlehre (Physik), der Chemie und Physiologie, auch von Arbeiten zur Beförderung der zum Wohl der Menschen dienenden Anwendung der Naturgesetze auf die Erreichung technischer und ökonomischer Zwecke, zu einem Drittheil hingegen auf geistreiche Forschungen und Darlegungen im Gebiet der Geschichte und Staats-Oeconomie verwendet werden, in der Art, wie ich schon oben angedeutet habe.

6.

Diese Verwendung soll blos dann geschehen, wenn sich in einem dieser Fächer eine dem angegebenen Zwecke entsprechende Gelegenheit zur Zinsenvergebung findet. Ist dies nicht der Fall, so sollen die Zinsen — wenn auch auf mehrere Jahre — zum Capital geschlagen werden, jedoch mit der Bestimmung, daſs, wenn es in besonderen Fällen wünschenswerth ist, eine die jährlichen Zinsen übersteigende Summe zu Unterstützungen zu verwenden, dieselbe aus dem durch Ansammlung von Zinsen gebildeten Capitale oder aus den Zinsen auf mehr als ein Jahr vervollständiget werden können.

7.

Die Gesellschaft wird die Gesuche um Unterstützung durch die in jedem einzelnen Falle competenten Mitglieder der betreffenden Classe und da nöthig unter Zuziehung Sachverständiger z. B. Mechaniker und anderer Techniker gründlich prüfen und durch erforderte Vorlagen erörtern lassen, ob mit höherer Wahrscheinlichkeit ein guter Erfolg von der Unterstützung einer Arbeit oder Untersuchung und Entdeckung zu erwarten stehe, oder nicht, und nur, wenn das Urtheil der betreffenden Classe und Sachverständigen günstig ausfällt, beschlieſsen, ob und inwieweit Unterstützung gewährt werden soll. Der Petent und resp. Empfänger aber ist verpflichtet, der betreffenden Gesellschafts-Classe den Erfolg seiner Untersuchung oder Arbeit zu berichten und Nachweisungen zu geben. — Berechtigt der Erfolg zu weiteren Erwartungen, und erfordert die Vollendung des Werks fernere Unterstützung, so kann solche bewilliget werden.

8.

Ist die Prüfung der Gesuche und Beurtheilung der Leistungen oder Erfindung mit Aufwand von Zeit und Mühe verbunden, so sind diejenigen Mitglieder, welche sich derselben speciell unterzogen, auf billige Weise aus den Zinsen der Fonds zu honoriren und entschädigen, also ist ihnen aller baare nöthige Aufwand jedenfalls zu erstatten.

Die Honorirung des Actors erfolgt ebenfalls aus den Zinsen dieser Fonds, da nöthig nach vorgängiger Feststellung seiner Liquidation durch das Universitätsgericht oder eine andere Behörde.

9.

Die Stiftung soll für immer meinen Namen führen und ist mit keiner anderen zu vermischen.

Dies ist mein wohlüberlegter Wille, dessen gute Absicht man nicht verkennen und welcher segensreiche Folgen für die Menschen haben möge!

Leipzig, den 1^{n}. December 1856.

(L. S.) **Ferdinand Wilhelm Mende.**

INHALT.

Seite

Heinrich Liebmann, Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln. (Mit einer Tafel.) 477

K. Rohn, Einige Beiträge zum Problem der Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades . . 492

Martin Krause, Nekrolog auf Oscar Schlömilch 507

Verzeichniss der Mitglieder der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften I

Verzeichniss der eingegangenen Schriften VI

Die Ferdinand Wilhelm Mende-Stiftung XXIX

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

3 2044 058 285 099

The borrower must return this item on or before the last date stamped below. If another user places a recall for this item, the borrower will be notified of the need for an earlier return.

*Non-receipt of overdue notices does **not** exempt the borrower from overdue fines.*

Harvard College Widener Library
Cambridge, MA 02138 617-495-2413

WIDENER
MAY 8 2002
CANCELLED

Please handle with care.
Thank you for helping to preserve library collections at Harvard.